



существует  $f(x) \in L_2^2(0, 2)$  такая, что  $F(x) = Gf(x)$ . Отсюда вытекает, что ряд (49) будет сходиться абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 2]$ . Таким образом, теоремы 3 и 4 полностью доказаны.

В заключение отметим, что для доказательства теоремы о разложении может быть применен также метод контурного интеграла (см., например, [13]). Для этого надо проинтегрировать функцию Грина  $G(x, t) = G(x, t, \lambda)$  по системе расширяющихся контуров в  $\lambda$ -плоскости, не проходящих через собственные значения  $\lambda_n$ . Вычисляя затем полученные интегралы и применяя теорию вычетов, получаем в пределе, с одной стороны, ряд Фурье по собственным функциям, а с другой стороны, разлагаемую функцию  $F(x)$ .

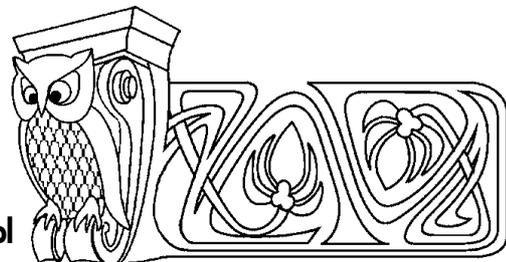
*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).*

### Библиографический список

1. Айнола Л., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3–63.
2. Нигул У.К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // ПММ. 1969. Вып. 2. С. 308–322.
3. Nigul U. Regions of effective of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Intern. J. of Solid and Structures. 1969. Vol. 5. P. 607–627.
4. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругости тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
5. Kaplunov U.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San-Diego: Academic Press, 1998. 226 с.
6. Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 111–131.
7. Miklovits Y. On wave propagation in an elastic plate with nonmixed edge conditions // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 41, № 6. P. 1587.
8. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 272 с.
10. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 624 с.
13. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

УДК 004.942

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА УПРУГОГО СТЕРЖНЯ КАК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ



К.С. Листрова, В.К. Манжосов

Ульяновский государственный технический университет,  
кафедра теоретической и прикладной механики  
E-mail: v.manjosov@ulstu.ru

Разработана модель продольного удара стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы. Уравнения движения преобразованы к виду, когда в структуре уравнений представлен параметр, определяющий скорость звука в материале стержня. Это позволяет естественным образом сопоставлять результаты с волновой моделью продольного удара. Представлен алгоритм численного решения уравнений движения и его реализация при моделировании продольного удара тестового объекта.

**Ключевые слова:** продольный удар, модель удара, удар стержня, удар о жесткую преграду, ударная сила, волновая модель удара.

**Modelling of the Longitudinal Impact Springy Rod as Mechanical System with Final Number of the Degree of the Liberty**

K.S. Listrova, V.K. Manjosov

Ulyanovsk State Technical University,  
Chair of Theoretical and Applied Mechanics  
E-mail: v.manjosov@ulstu.ru

The model of the longitudinal impact rod was designed as mechanical system with final number of the degrees of the liberty. The Equations of the motion are transformed to type, when in structure of the equations is presented parameter, defining velocity of the sound in material rod. This allows the natural image to match the results with wave model of the longitudinal impact. The Presented algorithm of the numerical decision of the equations of the motion and its realization at modeling of the longitudinal impact of the test object.

**Key words:** longitudinal impact, model of the impact, impact of the rod, impact about hard barrier, striking power, wave model of the impact.



## 1. ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА СТЕРЖНЯ

Рассмотрим продольный удар со скоростью  $v$  стержня массой  $m_c$  о жесткую преграду (рис. 1, а). Представим стержень  $n$ -м количеством конечных элементов с массой  $m_1, m_2, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$  (рис. 1, б). Причем

$$m_c = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-2} + m_{n-1} + m_n.$$

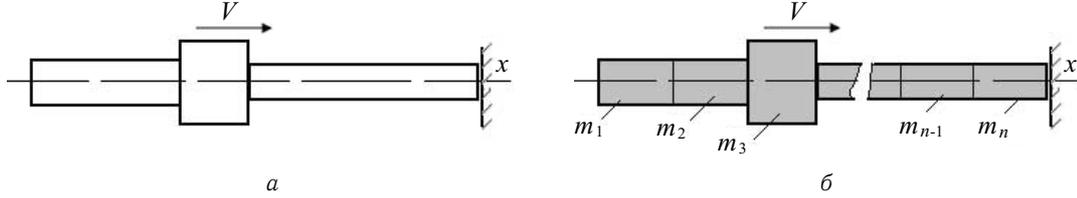


Рис. 1. Схема и модель продольного удара стержня о жесткую преграду

Продольная жесткость конечного элемента (рис. 2, а) моделируется упругим элементом жесткости  $c_j$  (рис. 2, б).

Жесткость  $c_j$  определяется как  $c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}$ , где  $E_j$  – модуль упругости первого рода материала  $j$ -го конечного элемента стержня,  $A_j$  – площадь поперечного сечения  $j$ -го конечного элемента стержня,  $l_j$  – длина  $j$ -го конечного элемента массой  $m_j$  ( $l_j = x_j - x_{j-1}$ ).

Если масса  $j$ -го конечного элемента сосредоточена в сечении  $x_{j-1}$  (см. рис. 2, б), то расчетная модель стержня, представляющая последовательно сопряженные элементы, примет вид, изображенный на рис. 2, в.

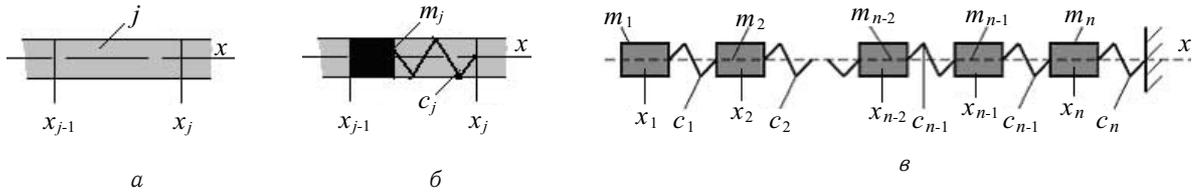


Рис. 2. Схема конечного элемента и элементная модель стержня

Данная схема эквивалентна исходной по соответствию кинетической энергии и количеству движения механической системы перед нанесением удара, а также по ее упругим свойствам в процессе удара.

Расчетную модель стержня представим совокупностью сосредоточенных масс  $m_1, m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$  и упругих элементов (см. рис. 2, в). Причем

$$m_1 = \frac{l}{n} \rho \cdot A_1, \quad m_2 = \frac{l}{n} \rho \cdot A_2, \quad \dots, \quad m_j = \frac{l}{n} \rho \cdot A_j, \quad c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Движение  $j$ -й массы описывается дифференциальным уравнением вида

$$m_j \ddot{u}_j = c_{j-1}(u_{j-1} - u_j) - c_j(u_j - u_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n, \quad (1)$$

где  $u_j$  – перемещение  $j$ -й массы  $m_j$  относительно фиксированной координаты  $x_j$ , определяющей положение массы;  $\ddot{u}_j$  – ускорение  $j$ -й массы.

Систему дифференциальных уравнений (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{c_1}{m_1}(u_1 - u_2), \\ \ddot{u}_2 &= \frac{c_1}{m_2}(u_1 - u_2) - \frac{c_2}{m_2}(u_2 - u_3), \\ &\dots, \\ \ddot{u}_{n-1} &= \frac{c_{n-2}}{m_{n-1}}(u_{n-2} - u_{n-1}) - \frac{c_{n-1}}{m_{n-1}}(u_{n-1} - u_n), \end{aligned}$$



$$\ddot{u}_n = \frac{c_{n-1}}{m_n}(u_{n-1} - u_n) - \frac{c_n}{m_n}u_n,$$

начальные условия  $u_j = u_{j,0}$ ,  $\dot{u}_j = \dot{u}_{j,0}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1, n$ .

В дифференциальных уравнениях движения отношение жесткости упругого элемента  $c_j$  к соответствующей массе  $m_j$  (полагая, что материал конечных элементов один и тот же) можно представить следующими равенствами:

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{\frac{EA_1}{l/n}}{\rho A_1 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho}, \quad \frac{c_1}{m_2} = \frac{\frac{EA_1}{l/n}}{\rho A_2 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho} \tilde{A}_1, \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2}, \quad \frac{c_2}{m_2} = \frac{\frac{EA_2}{l/n}}{\rho A_2 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho},$$

.....,

$$\frac{c_{j-1}}{m_j} = \frac{\frac{EA_{j-1}}{l/n}}{\rho A_j l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho} \tilde{A}_{j-1}, \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}, \quad \frac{c_j}{m_j} = \frac{\frac{EA_j}{l/n}}{\rho A_j l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho}.$$

В волновой механике отношение  $E/\rho = a^2$ , где  $a$  — скорость звука в материале стержня. Тогда величина

$$\frac{n^2 E}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a^2 \rho}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a}{l \cdot l/a} = \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}, \quad T_0 = \frac{l}{a},$$

где  $T_0$  — время распространения волны по стержню длиной  $l$ .

Учитывая в дифференциальных уравнениях равенство  $\frac{n^2 E}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}$ , получим

$$\ddot{u}_1 = -\frac{n^2 a}{l \cdot T_0}(u_1 - u_2),$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{n^2 a \tilde{A}_1}{l \cdot T_0}(u_1 - u_2) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}(u_2 - u_3), \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2},$$

.....,

$$\ddot{u}_{n-1} = \frac{n^2 a \tilde{A}_{n-2}}{l \cdot T_0}(u_{n-2} - u_{n-1}) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}(u_{n-1} - u_n), \quad \tilde{A}_{n-2} = \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}},$$

$$\ddot{u}_n = \frac{n^2 a \tilde{A}_{n-1}}{l \cdot T_0}(u_{n-1} - u_n) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}u_n, \quad \tilde{A}_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_n}.$$

## 2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Выделим дифференциальное уравнение движения  $j$ -й массы:

$$\ddot{u}_j = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0}(u_{j-1} - u_j) - \frac{n^2 a}{l T_0}(u_j - u_{j+1}), \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}.$$

Скорость и перемещение  $j$ -й массы определяются как

$$\dot{u}_j = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t \ddot{u}_j \cdot dt, \quad u_j = u_{j,0} + \int_{t_0}^t \dot{u}_j \cdot dt.$$

Первые приближения представим как

$$(\ddot{u}_j)_1 = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} [(u_{j-1})_0 - (u_j)_0] - \frac{n^2 a}{l T_0} [(u_j)_0 - (u_{j+1})_0],$$

$$(\dot{u}_j)_1 = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_1 \cdot dt, \quad (u_j)_1 = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_1 dt.$$

Дальнейшие приближения строятся по формулам

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} [(u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1}] - \frac{n^2 a}{l T_0} [(u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1}],$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_i \cdot dt, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $i$  — число приближений.



Число приближений ограничиваем некоторым числом  $s$ , когда последующие приближения отличаются от предыдущих на малые величины  $\Delta\tilde{u}_j$  и  $\Delta\tilde{\dot{u}}_j$ .

От интегральных выражений на малом интервале времени  $\Delta t$  можем перейти к алгебраическим:

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} \left[ (u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1} \right] - \frac{n^2 a}{l T_0} \left[ (u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1} \right],$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + (\ddot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + (\dot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Представленные алгебраические равенства преобразуем к универсальному виду, когда в структуре этих выражений используются обобщенные безразмерные параметры скоростей и перемещений. Представим равенство  $(u_j)_i = u_{j,0} + (\dot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t$  в виде

$$\frac{(u_j)_i}{l} = \frac{u_{j,0}}{l} + \frac{(\dot{u}_j)_{i-1}}{l} \cdot \Delta t \cdot \frac{v_0}{v_0}, \quad (\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $(\tilde{u}_j)_i = \frac{(u_j)_i}{l}$ ,  $\tilde{u}_{j,0} = \frac{u_{j,0}}{l}$ ,  $(\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} = \frac{(\dot{u}_j)_{i-1}}{v_0}$ ,  $v_0$  — предударная скорость.

Учитывая, что  $l = a \cdot T_0$ , получим выражение для расчета перемещения  $j$ -й массы в  $i$ -м приближении в безразмерных параметрах:

$$(\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{a \cdot T_0} = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \Delta \tilde{t} \cdot \frac{v_0}{a}, \quad \Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t}{T_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично приведем к безразмерному виду выражение для расчета скорости  $j$ -й массы в  $i$ -м приближении:

$$(\tilde{\dot{u}}_j)_i = \tilde{\dot{u}}_{j,0} + \frac{a}{v_0} \left[ n^2 \tilde{A}_{j-1} ((\tilde{u}_{j-1})_i - (\tilde{u}_j)_i) \right] \cdot \Delta \tilde{t} - \frac{a}{v_0} \left[ n^2 ((\tilde{u}_j)_i - (\tilde{u}_{j+1})_i) \right] \cdot \Delta \tilde{t},$$

где  $(\tilde{\dot{u}}_j)_i = \frac{(\dot{u}_j)_i}{v_0}$ ,  $\tilde{\dot{u}}_{j,0} = \frac{\dot{u}_{j,0}}{v_0}$ ,  $\Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t}{T_0}$ .

Сила  $P_{j,j+1}$  между  $j$ -й и  $(j+1)$ -й массами, возникающая при деформировании  $j$ -го упругого элемента, определяется как  $P_{j,j+1} = c_j(u_j - u_{j+1})$ . Учитывая, что  $c_j = \frac{EA_j}{l}n$ , получим

$$P_{j,j+1} = n \cdot EA_j(\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1}), \quad \tilde{u}_j = \frac{u_j}{l}, \quad \tilde{u}_{j+1} = \frac{u_{j+1}}{l}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n.$$

Представим значения сил в безразмерном виде. Для этого разделим обе части последнего равенства на значение силы  $P_0 = EA_0 v_0 / a$  [1, 2] (где  $v_0$  — скорость стержня перед нанесением удара), возникающей в ударном сечении однородного стержня такой же массы с площадью поперечного сечения  $A_0$  при столкновении с жесткой преградой.

Площадь поперечного сечения  $A_0$  однородного стержня определяется из условия равенства массе стержня неоднородной структуры, площадь поперечных сечений которого на участках равна соответственно  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :  $\rho \frac{l}{n} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \rho l A_0$ , откуда  $A_0 = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$ .

Представим значение силы  $\tilde{P}_{j,j+1}$  в безразмерном виде

$$\tilde{P}_{j,j+1} = \frac{P_{j,j+1}}{P_0} = \frac{n \cdot EA_j(\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1})}{EA_0 \cdot v_0 / a} = \frac{n \cdot \tilde{A}_{j,0}(\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1})}{v_0 / a}, \quad \tilde{A}_{j,0} = \frac{A_j}{A_0}.$$

Значение ударной силы  $\tilde{P}_n$  в безразмерном виде, учитывая, что перемещение жесткой преграды  $\tilde{u}_{n+1}$  в процессе удара равно нулю, определится как

$$\tilde{P}_n = \frac{n \cdot \tilde{A}_{n,0} \cdot \tilde{u}_n}{v_0 / a}, \quad \tilde{u}_n = \frac{u_n}{l}, \quad \tilde{A}_{n,0} = \frac{A_n}{A_0}.$$

Если стержень однородный и имеет постоянную площадь  $A$  поперечных сечений по длине, то

$$\tilde{A}_{j,0} = \frac{A_j}{A_0} = 1, \quad \tilde{A}_{n,0} = \frac{A_n}{A_0} = 1, \quad \tilde{P}_{j,j+1} = \frac{n \cdot (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1})}{v_0 / a}, \quad \tilde{P}_n = \frac{n \cdot \tilde{u}_n}{v_0 / a}.$$



### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

Осуществлено моделирование процесса продольного удара однородного стержня о жесткую преграду. В качестве тестового объекта рассматривался стержень с постоянной по длине площадью поперечных сечений с представлением его  $n$ -м количеством конечных элементов (рис. 3). Выбор тестового

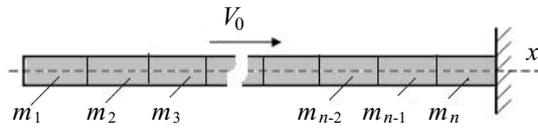


Рис. 3. Схема представления стержня  $n$ -м количеством конечных элементов

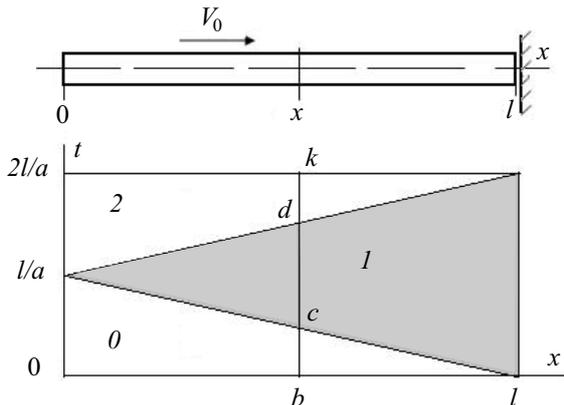


Рис. 4. Схема удара и диаграмма областей волновых состояний [2]

объекта определен тем, что для него известны точные решения о параметрах движения на основе волновой модели продольного удара [2, 3]. В частности, для схемы продольного удара стержня (рис. 4) в системе координатных осей « $x - t$ » определены [2] области волновых состояний. Область  $0$  — это область начального состояния, когда все поперечные сечения стержня движутся с одинаковой скоростью  $V_0$ , а деформации в поперечных сечениях отсутствуют. Область  $1$  — это область, когда скорость поперечных сечений равна нулю, а деформация в сечениях по абсолютной величине равна  $V_0/a$ . Область  $2$  — это область, когда скорость поперечных сечений равна  $(-V_0)$ , а деформации в поперечных сечениях равны нулю.

Если на диаграмме волновых состояний для произвольного сечения  $x$  провести параллельно оси  $t$  линию  $bk$ , то получим отрезки  $bc$ ,  $cd$  и  $dk$ . Отрезок  $bc = (l - x)/a$  на рис. 4 определяет промежуток времени, когда произвольное сечение  $x$  находится в области волнового состояния  $0$ . Отрезок  $cd = 2x/a$  определяет промежуток времени, когда произвольное сечение  $x$  находится в области волнового состояния  $1$ . Отрезок  $dk = (l - x)/a$  определяет промежуток времени, когда сечение  $x$  находится в области волнового состояния  $2$ .

Для произвольного сечения  $x$  можно записать следующие расчетные формулы для определения относительной скорости  $\tilde{u}$  поперечного сечения и относительной продольной силы  $\tilde{N}$  в поперечных сечениях:

$$\tilde{u}(x, t) = \dot{u}(x, t)/V_0, \quad \tilde{u}(x, t) = 1, \quad 0 \leq t \leq (l - x)/a, \quad (2)$$

$$\tilde{u}(x, t) = 0, \quad (l - x)/a \leq t \leq (l + x)/a, \quad \tilde{u}(x, t) = -1, \quad t \geq (l + x)/a, \quad (3)$$

$$\tilde{N}(x, t) = N(x, t)/EA \frac{V_0}{a}, \quad \tilde{N}(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq (l - x)/a, \quad (4)$$

$$\tilde{N}(x, t) = 1, \quad (l - x)/a \leq t \leq (l + x)/a, \quad (5)$$

$$\tilde{N}(x, t) = 0, \quad t \geq (l + x)/a. \quad (6)$$

Реализован алгоритм расчета параметров движения сосредоточенных масс (ускорений, относительных перемещений и скоростей масс) в зависимости от времени при различном количестве конечных элементов, моделирующих упругие и инерционные свойства стержня ( $n = 1, 2, 5, 10, 20, 30, 40$ ).

Приведены результаты расчета ударной силы в зависимости от количества конечных элементов, представляющих стержень (рис. 5).

На рис. 6,  $a-g$ , приведены диаграммы, характеризующие изменение ударной силы во времени при различном количестве конечных элементов, представляющих стержень (диаграмма 1 — расчет по формулам (5), (6), диаграмма 2 — результат моделирования).

Чем больше число конечных элементов, на которые разбивается стержень, тем ближе результаты моделирования элементной модели к результатам расчета ударной силы при продольном ударе однородного стержня о жесткую преграду на основе волновой модели (диаграммы 1).

Практически, при  $n > 10$  результаты уже мало отличаются друг от друга. Длительность удара приближается к величине  $T \rightarrow 2l/a$ ,  $\tilde{t} \rightarrow 2$ . Относительное значение ударной силы  $\tilde{P}_n \rightarrow 1$ .

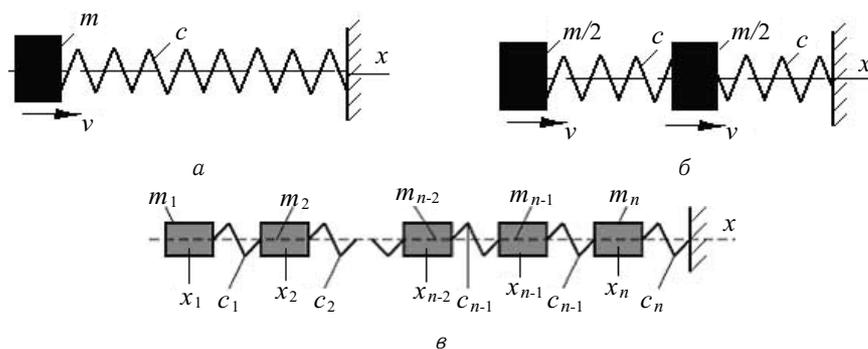


Рис. 5. Схемы удара, когда стержень представлен одним (а), двумя (б) и  $n$ -м (в) количеством конечных элементов

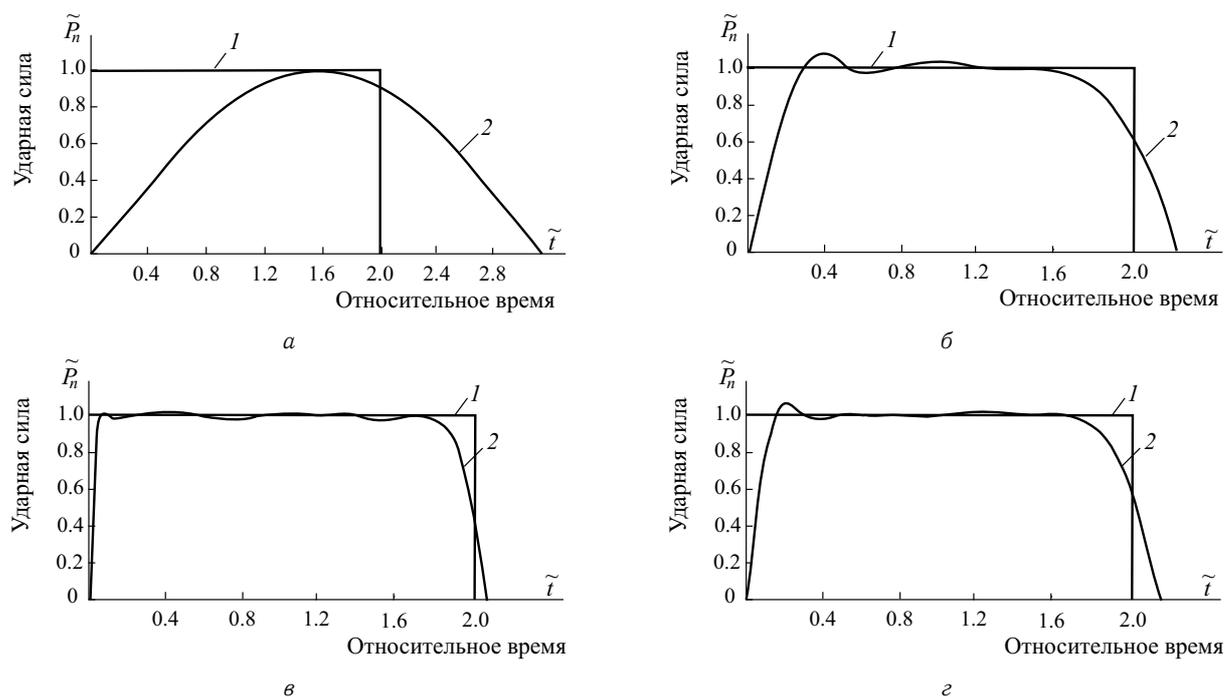


Рис. 6. Диаграммы относительного значения ударной силы  $\tilde{P}_n$ : а –  $n = 1$ , б –  $n = 5$ , в –  $n = 10$ , г –  $n = 30$

Результаты моделирования указывают и на волновой характер распространения деформаций. На рис. 7 представлены диаграммы изменения продольной силы (при  $n = 30$ ) в поперечном сечении стержня, расположенного на расстоянии  $0,5l$  от ударного сечения ( $\tilde{x} = x/l = 0,5$ ).

Заметим, что в момент нанесения удара ( $\tilde{t} = 0$ ) деформации в сечении  $\tilde{x} = 0,5$  стержня отсутствуют. Для волновой модели (диаграмма 1) деформации в сечении  $\tilde{x} = 0,5$  возникнут после прихода ударной волны через промежуток времени  $0,5l/a$  с момента нанесения удара. Элементная модель практически улавливает процесс распространения волны деформации по стержню (с учетом переходных процессов нарастания и спада).

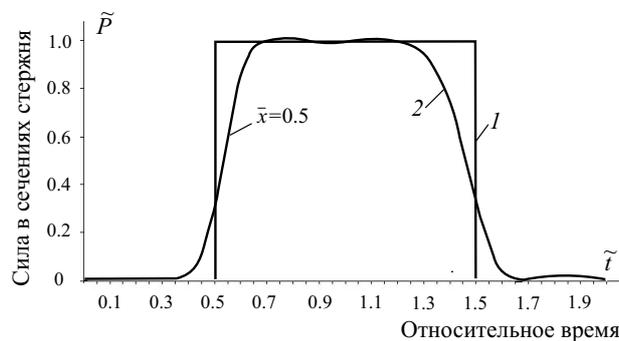


Рис. 7. Диаграммы изменения продольной силы в поперечном сечении стержня, расположенного на расстоянии  $0,5l$  от ударного сечения: 1 – расчет по формулам (4)–(6) при  $x = 0,5l$ ; 2 – результаты моделирования



## ВЫВОДЫ

Предложенная процедура расчета может быть использована при моделировании задач продольного удара в стержневых системах.

Точность вычислений тем выше, чем большее количество элементов представляют стержень. В практических вычислениях можно ограничиться количеством элементов для стержня  $n \in (20, \dots, 30)$ .

Преобразование уравнений движения к виду, когда в структуре уравнений представлен параметр — скорость звука в материале стержня, позволяет естественным образом при необходимости сопоставлять результаты с волновой моделью продольного удара.

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК № П 1122).*

## Библиографический список

1. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука, 1985.
2. Манжосов В.К. Продольный удар. Ульяновск, 2007.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977.

УДК 517.984

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

М.В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, Баку,  
кафедра сопротивления материалов  
E-mail: a-mirsalimov@mail.ru

Рассматривается задача механики разрушения для полосы (стержня), ослабленной прямолинейной трещиной с концевыми зонами, находящегося под действием неравномерного температурного поля. Толщина полосы считается переменной. Получено условие предельного состояния полосы.

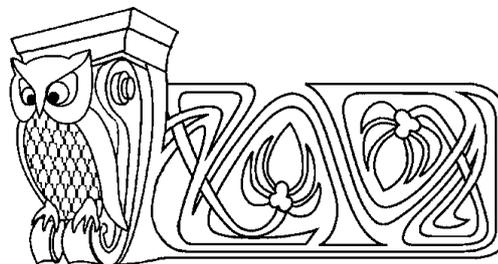
**Ключевые слова:** полоса переменной толщины, силы сцепления, трещина со связями между берегами в концевых зонах, неравномерный нагрев.

## ВВЕДЕНИЕ

Полосы (стержни) переменной толщины широко используются в технике и строительстве. Это вызвано, в частности, тем, что изделия требуемых свойств чаще всего можно получить с помощью варьирования их толщины. В реальных материалах всегда имеются различного рода дефекты типа трещин, развитие которых под действием нагрузки приводит к локальному или полному разрушению. Оценка несущей способности полос переменной толщины при наличии трещин не получила к настоящему времени своего решения. Достижение этой цели будет способствовать обоснованию путей повышения живучести конструкций.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругую однородную изотропную полосу (стержень) переменной толщины, ослабленную одной сквозной прямолинейной трещиной, направленной перпендикулярно к боковым граням полосы. Обозначим через  $2c$  и  $2h$  соответственно ширину и толщину полосы, а через  $2\ell$  — длину трещины с концевыми зонами. Пусть полоса с нецентрально расположенной трещиной подвергается



### The Intense State of the Band of Variable Thickness at Non-Uniform Heating

M.V. Mirsalimov

Azerbaijan Technical University, Baku,  
Chair of the Resistance of Materials  
E-mail: a-mirsalimov@mail.ru

The problem of mechanics of fracture for a band (core) weakened by a rectilinear crack with end zones, a non-uniform temperature field being under action is considered. Thickness of a band is considered a variable. The condition of a limiting condition of a band is received.

**Key words:** variable-thickness band, cohesive forces, crack with interfacial bonds, non-uniform heating.