



УДК 539.3

## РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В.А. Лохов, Ю.И. Няшин, В.С. Туктамышев

Пермский государственный технический университет,  
кафедра теоретической механики  
E-mail: nyashin@pstu.ru

В статье представлен метод ортогональных проекций для решения краевых задач теории упругости с собственными деформациями. Основная особенность метода заключается в том, что ортогональное разложение производится в функциональном пространстве собственных деформаций, а не напряжений, как ранее. В результате показана возможность решения задач о создании в системе заданного поля напряжений посредством собственных деформаций, сохраняя при этом деформацию системы, и, наоборот, создания в системе заданных деформаций (заданной формы), не меняя напряжений в системе. Разработанный подход применен для управления остаточными напряжениями в задаче термопластического деформирования.

**Ключевые слова:** независимое управление напряжениями, горячая прокатка.

### ВВЕДЕНИЕ

Идея использования декомпозиции гильбертова пространства для решения краевых задач принадлежит польскому математику Зарембе [1]. Позже этот метод был назван методом ортогональных проекций [2]. Применительно к задачам МДТТ метод был развит в работах С.Г. Михлина [3], где гильбертово пространство являлось пространством напряжений. В настоящей работе гильбертово пространство строится с помощью тензоров собственной деформации. Это понятие для геометрически линейных задач ввел Рейсснер [4] как разность тензоров полной и упругой деформации, определяемой по закону Гука. В роли собственной деформации могут быть температурные, пластические деформации, деформации ползучести, деформации при фазовых превращениях, различные деформации в живых тканях и т.д. Такой подход позволяет выявить важные свойства решений краевых задач МДТТ, не зависящие от природы собственных деформаций. В данной работе доказана теорема о том, что собственная деформация, существующая в теле, может быть однозначно разложена на две ортогональные (в смысле введенного гильбертова пространства) составляющие: собственную деформацию, не вызывающую напряжений, и собственную деформацию, не вызывающую полной деформации в любой точке тела. Применение указанной методики позволяет полностью разделить задачи управления напряжениями и деформациями (или перемещениями) с помощью собственных деформаций.

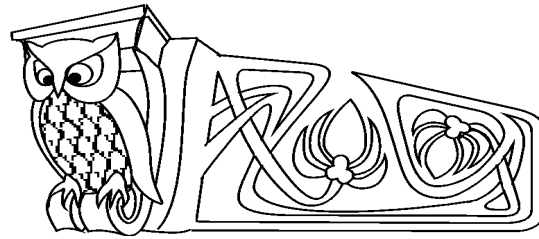
### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим твердое тело, занимающее область  $\Omega$  в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$ . Замыкание области обозначим как  $\bar{\Omega}$ , а границу (которая предполагается достаточно гладкой) — как  $\Gamma$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ). Граница области  $\Gamma$  разделена на две непересекающиеся части  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ . На границе  $\Gamma_u$  заданы кинематические граничные условия, а граница  $\Gamma_\sigma$  свободна от напряжений:

$$\vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u, \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma. \quad (2)$$

Деформации системы считаются малыми и аддитивными. Следовательно, тензор полной деформации  $\vec{\varepsilon}$  может быть представлен как сумма тензора упругой деформации  $\vec{\varepsilon}^e$  и тензора собственной деформации  $\vec{\varepsilon}^*$ ,



### Development of the Decomposition Method in Mechanics of Solids

V.A. Lokhov, Yu.I. Nyashin, V.S. Tuktamyshev

Perm State Technical University,  
Chair of Theoretical Mechanics  
E-mail: nyashin@pstu.ru

The orthogonal projection method for solution of boundary value problem of theory of elasticity with eigenstrain is presented. The main feature of the method is that the orthogonal decomposition is performed in the Hilbert function space of eigenstrains instead of function space of stresses, which is commonly accepted. As a result, the opportunities to create the desired stress field by eigenstrain keeping strain unchanged (strain-free stress control) and vice versa to create the desired strain distribution keeping stress unchanged (stress-free shape control) are shown. The developed approach is applied to control of residual stress in thermoplasticity.

**Key words:** independent stress control, hot rolling.



$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^*. \quad (3)$$

Под собственной деформацией здесь понимается неупругая деформация любой природы: температурная деформация, пластическая деформация, деформация фазовых переходов, деформации роста и перестройки живых тканей и т.д.

Далее тело, деформация которого представлена формулой (3) и собственная деформация  $\tilde{\varepsilon}^*$  считается заданной, будем называть упругим телом с собственной деформацией.

Напряжения в системе определяются обобщенным законом Гука,

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot \cdot (\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) - \tilde{\varepsilon}^*), \quad (4)$$

где  $\vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$ ,  $\vec{u} = 0$ ,  $\vec{x} \in \Gamma_u$ , а также имеет место равенство,

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma} \cdot \cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w}) dV = 0, \quad (5)$$

$$\forall \vec{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \vec{w} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u.$$

Здесь  $W_2^1$  — пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную и интегрируемых в квадрате вместе с первыми производными. Деформации  $\tilde{\varepsilon}(\vec{u})$  и  $\tilde{\varepsilon}(\vec{w})$  определяются геометрическими соотношениями Коши,

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla} \right), \quad \vec{x} \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

где производные понимаются в обобщенном смысле. Значения перемещений  $\vec{u}$  and  $\vec{w}$  на границе вычисляются посредством оператора следа [5]. В обобщенной постановке задачи считается, что  $\tilde{\varepsilon}^* \in (L_2(\Omega))^6$ , компоненты  $C_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) являются кусочно-непрерывными функциями координат.

Обобщенное решение имеет аналогичный смысл с принципом возможных перемещений и не требует вычисления производных по пространственным координатам. Можно показать, что дифференциальное решение аналогичной краевой задачи удовлетворяет обобщенной постановке (1)–(6), а при достаточной гладкости напряжений обобщенное решение удовлетворяет дифференциальным уравнениям краевой задачи.

Краевую задачу (1)–(6) будем называть задачей теории упругости с собственной деформацией. В данной задаче собственная деформация  $\tilde{\varepsilon}^*$  считается известной. При добавлении, например, уравнения теплопроводности и определяющих соотношений теории пластичности, необходимых для вычисления собственной деформации, краевая задача будет называться задачей термоупругопластичности. Однако постановка краевой задачи в виде уравнений (1)–(6) с заданной собственной деформацией позволит определить свойства решения задачи, которые не зависят от природы собственной деформации.

Под управлением напряжениями и деформациями понимается задача отыскания собственной деформации, создающей в теле заданные напряжения и (или) заданные деформации.

## 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Более детальное исследование свойств собственных деформаций проведено посредством аппарата функционального анализа, то есть введения функционального пространства собственных деформаций.

Рассмотрим множество  $H$  симметричных тензоров второго ранга. Компоненты тензоров являются вещественными функциями пространственных координат и принадлежат функциональному пространству  $L_2$ . Совокупность компонент тензора  $\tilde{A}$  принадлежит пространству  $(L_2)^6$ :  $\tilde{A} \in (L_2)^6$ .

Скалярное произведение в пространстве, удовлетворяющее условиям симметрии, линейности и положительной определенности, описывается в пространстве  $H$  следующим выражением

$$(\tilde{A}, \tilde{B})_H = \int_{\Omega} A_{ij} C_{ijkl} B_{kl} dV. \quad (7)$$



Норма в пространстве  $H$  определяется через скалярное произведение (7),

$$\|\tilde{A}\|_H = \sqrt{(\tilde{A}, \tilde{A})_H}. \quad (8)$$

Подпространство  $H_u$  введено посредством следующего определения: некоторый симметричный тензор  $\tilde{f} \in H$  принадлежит подпространству  $H_u$  если для него существует вектор перемещений:  $\exists \vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$ , удовлетворяющий условию  $\vec{u} = 0, \vec{x} \in \Gamma_u$ , и

$$\tilde{f} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla}). \quad (9)$$

Производные в уравнении (9) понимаются в обобщенном смысле, а значение функции  $\vec{u}$  на границе  $\Gamma_u$  определяется посредством оператора следа.

Физический смысл подпространства  $H_u$  заключается в том, что это пространство есть множество совместных деформаций, где соответствующие им перемещения  $\vec{u}$  обращаются в нуль на неподвижных опорах. Можно показать, что подпространство  $H_u$  является линейным, так как операции суммирования и умножения на число в результате дают элемент подпространства  $H_u$ . В дальнейшем тензоры, принадлежащие указанному подпространству, будут называться совместными.

Далее считается, что элементами функционального подпространства являются тензоры собственных деформаций.

В этом случае из постановки задачи (1)–(6) можно показать, что принадлежность собственной деформации подпространству  $H_u$  является необходимым и достаточным условием для того, чтобы собственная деформация не вызывала напряжений в системе [6], т.е. была свободной от напряжений.

Подпространство  $H_\sigma$  содержит собственные деформации, которые не вызывают полной деформации системы:

$$\tilde{\varepsilon}^* = -\tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{\sigma}, \quad \vec{x} \in \bar{\Omega}, \quad (10)$$

где  $\tilde{\sigma}$  — статически допустимые напряжения (уравновешенные напряжения),

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}^* \cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w}) dV = 0, \quad \forall \vec{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \vec{w} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u. \quad (11)$$

Множество собственных деформаций, удовлетворяющих условиям (10), (11), образуют линейное подпространство  $H_\sigma$ .

Условие  $\tilde{\varepsilon}^* \in H_\sigma$  (то есть условия (10) и (11) выполнены) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы собственная деформация  $\tilde{\varepsilon}^*$  не вызывала деформации системы [6], т.е. была свободной от деформаций.

### 3. ТЕОРЕМА О ДЕКОМПОЗИЦИИ СОБСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Эта теорема отражает фундаментальное свойство собственной деформации.

Любая существующая в теле собственная деформация  $\tilde{\varepsilon} \in H$  может быть единственным образом разложена на две составляющие [6]

$$\tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}_u^* + \tilde{\varepsilon}_\sigma^*, \quad (12)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_u^* \in H_u$  и  $\tilde{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma$  ( $H_u$  — подпространство совместных собственных деформаций,  $H_\sigma$  — подпространство собственных деформаций, не создающих полной деформации системы).

Другими словами, подпространства  $H_u$  и  $H_\sigma$  взаимно ортогональны ( $H = H_u \oplus H_\sigma$ ), и любой элемент  $\tilde{\varepsilon}^* \in H$  может быть представлен в виде (12) единственным образом. Иллюстрация декомпозиции показана на рис. 1.

Доказанная теорема утверждает, что любая собственная деформация, имеющаяся в теле, может быть единственным образом разложена на свободную от напряжений и свободную от деформаций части.

Разложение собственных деформаций открывает практически значимую возможность для полного разделения задач управления напряжениями и деформациями.

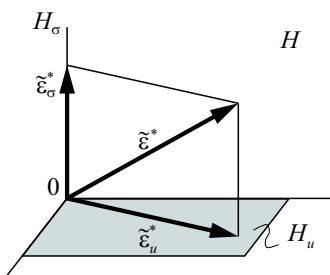


Рис. 1



Таким образом, теорема показывает, что за счет одной функции  $\tilde{\varepsilon}^*$  в задаче (1)–(6) можно независимо управлять двумя функциями: напряжениями и деформациями.

#### 4. ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ОТ ТРЕБУЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Задача заключается в определении функционала, характеризующего отклонение напряжений от заданных величин. Необходимо представить это отклонение через управляющие величины, т.е. через собственные деформации. Особенностью построения оценки является то, что не требуется знание решения задачи теории упругости с собственными деформациями.

(i) Пусть необходимо создать в теле напряжения  $\tilde{\sigma}^{(0)}$  (статически допустимое напряжение) при условии, что деформации не меняются. Тогда заданные напряжения  $\tilde{\sigma}^{(0)}$  должны удовлетворять условию (11). Отметим, что только такие напряжения могут быть созданы в системе посредством собственных деформаций. Тогда согласно формуле (10) точное решение поставленной задачи имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}_\sigma^{(0)} = -\tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{\sigma}^{(0)}, \quad (13)$$

в то время как истинные напряжения вычисляются через часть  $\tilde{\varepsilon}_\sigma^*$  существующей собственной деформации:

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}_\sigma^*. \quad (14)$$

Тогда оценка напряжений может быть введена как расстояние между деформациями  $\varepsilon_\sigma^*$  и  $\varepsilon_\sigma^{(0)}$  в пространстве  $H$ . Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\Phi = \left\| \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^{(0)} \right\|_\Omega^2 = \int_\Omega \left( \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^{(0)} \right) \cdot \tilde{C}^{-1} \cdot \left( \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^{(0)} \right) dV \rightarrow \inf(\tilde{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma). \quad (15)$$

С учетом уравнений (13) и (14) оценку (15) можно записать в виде

$$\Phi = \left\| \tilde{\varepsilon}_\sigma^{(0)} - \tilde{\varepsilon}_\sigma^* \right\|_H^2 \rightarrow \inf(\tilde{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma). \quad (16)$$

(ii) Рассмотрим задачу, где необходимо создать заданные совместные деформации  $\tilde{\varepsilon}^{(0)}$ , при условии, что напряжения в системе не изменятся (задача независимого управления деформациями). Целевая функция для такой задачи водится аналогично:

$$\Psi = \left\| \tilde{\varepsilon}_u^* - \tilde{\varepsilon}^{(0)} \right\|_H \rightarrow \inf(\tilde{\varepsilon}_u^* \in H_u) \iff \tilde{\varepsilon}(\vec{r}) \rightarrow \tilde{\varepsilon}^{(0)}(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \bar{\Omega}. \quad (17)$$

Скалярное произведение в оценках (16) и (17) вычисляется согласно формуле (8).

#### 5. УПРАВЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ В ГОРЯЧЕКАТАНЫХ ДВУТАВРОВЫХ БАЛКАХ

Предлагаемый подход был использован для получения заданного распределения остаточных напряжений в горячекатаных двутавровых балках. В качестве параметра управления рассматривался режим принудительного охлаждения поверхности балки после прокатки, характеризуемый коэффициентом теплоотдачи  $\alpha(\vec{r}, t)$ .

При решении задачи была принята гипотеза о том, что напряжения и деформации в момент окончания прокатки равны нулю, в то время как температура в точках поперечного сечения существенно отличается. Разность температур может достигать 150–200 К [7]. Поскольку температурные деформации, возникающие при охлаждении балки от температуры прокатки до температуры окружающей среды, определены (они зависят только от режима прокатки), то заданное распределение остаточных напряжений может быть достигнуто путем создания в балке пластических деформаций. В этом случае собственная деформация  $\tilde{\varepsilon}^*$  является суммой температурной деформации  $\tilde{\varepsilon}^T$ , пластической деформации  $\tilde{\varepsilon}^P$  и деформации фазовых переходов  $\tilde{\varepsilon}^{Ph}$ . Остаточные напряжения, формирующиеся в процессе естественного охлаждения балки, носят, как правило, отрицательный характер [7]. Продольные остаточные напряжения могут достигать 75% от предела текучести и существенно снижать предел выпучивания балки (примерно на 1/3) при использовании её в качестве колонны. Однако можно найти



такое распределение остаточных напряжений, которое позволит увеличить предел устойчивости. Методика построения такого поля остаточных напряжений изложена в работе [8]. Целью данной работы является создание в балке поля остаточных напряжений, близкого к заданному полю, посредством собственных деформаций.

Целевая функция (16) для случая одноосных остаточных напряжений в балке принимает вид

$$\Phi = l \int_S E \Delta f^2 ds \rightarrow \inf(\varepsilon^*), \quad (18)$$

где

$$f = \varepsilon^* + \frac{\sigma_0}{E}, \quad \Delta f = f - \left( \int_S E f ds \right) / \left( \int_S E ds \right),$$

и  $l$  — длина двутавровой балки. При решении задачи об управлении остаточными напряжениями процесс термоупругого деформирования был разделен на малые шаги. На каждом шаге находилась параметр  $\alpha(\vec{r}, t)$  путем минимизации функционала (18). Соответствующие пластические деформации

вычислялись путем использования теории неизотермического пластического течения:

$$d\sigma_x = Ad\varepsilon_x + BdT(\alpha).$$

Более подробно алгоритм решения описан в работе [7].

Результаты решения представлены на рис. 2. На рис. 2, а, з, показаны распределения остаточных напряжений в двутавровой балке с размерами  $H \times B \times d \times t = 340 \times 160 \times 5,5 \times 9$  мм, на рис. 2, б, показана зависимость коэффициента теплоотдачи принудительного охлаждения в зависимости от времени. Кривая 1 обозначает распределение желаемых остаточных напряжений, кривая 2 — распределение остаточных напряжений, полученных при естественном охлаждении, кривая 3 — распределение остаточных напряжений после принудительного охлаждения. Видно, что принудительное охлаждение позволяет приблизиться к оптимальному распределению остаточных напряжений, что, в свою очередь, увеличивает предел устойчивости балки по сравнению с балкой, произведенной по традиционной технологии.

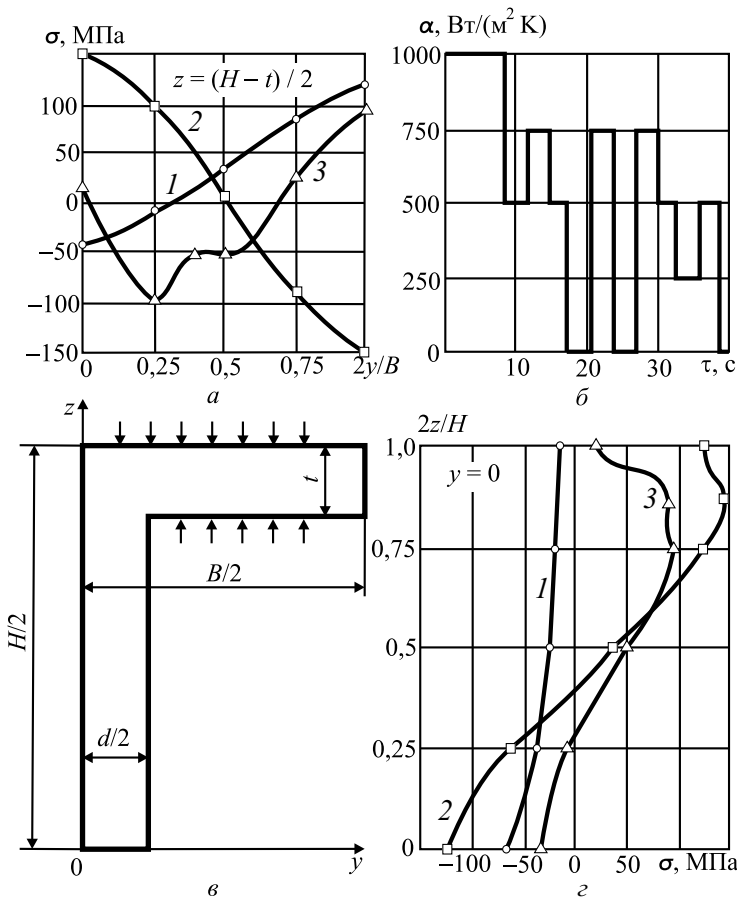


Рис. 2. Результаты расчетов: а, з — распределение остаточных напряжений в балке (кривые: 1 — распределение желаемых остаточных напряжений, 2 — распределение остаточных напряжений, полученных при естественном охлаждении, 3 — распределение остаточных напряжений после принудительного охлаждения); б — зависимость коэффициента теплоотдачи принудительного охлаждения от времени; в — четверть поперечного сечения балки

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-96061-Урал, 07-01-92168-НЦНИ).



## Библиографический список

1. Zaremba, S. Sur le principe de minimum / S. Zaremba // Bull. intern. l'Acad. d. sciences de Cracovie. Cl. des sciences math. et natur. – 1909. – № 7. – P. 197–264.
2. Weil, H. The method of orthogonal projections in potential theory / H. Weil // Duke Math. J. – 1940. – V. 7. – P. 411–444.
3. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. Reissner, H. Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen / H. Reissner // Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – V. 11, № 1. – P. 1–8.
5. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 543 с.
6. Nyashin, Y. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain / Y. Nyashin, V. Lokhov, F. Ziegler // Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – V. 85. – P. 557–570.
7. Поздеев, А.А. Остаточные напряжения: теория и приложения / А.А. Поздеев, Ю.И. Няшин, П.В. Трусов. – М.: Наука, 1982. – 112 с.
8. Tall, L. Residual stress and column instability under axial loads / L. Tall, A. Huber, Beedle // XII Annual Assembly, Liege, June 13–19, 1960. – Liege: Intern. Institute of Welding, 1960. – P. 381–396.

УДК 539.3

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

П.Ф. Недорезов<sup>1</sup>, О.М. Ромакина<sup>2</sup>, Р.А. Сафонов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет, кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: p1934n@yandex.ru, safonovra@gmail.com

<sup>2</sup>Саратовский государственный университет, кафедра компьютерной алгебры и теории чисел,  
E-mail: romakinaom@hotmail.ru,

В статье изложена методика численного решения задач о поиске критических частот вязкоупругих пластинок при изгибных установившихся колебаниях. Решение основано на понижении размерности задачи с помощью модифицированного метода сплайн-коллокации и численном решении получившейся краевой задачи методом дискретной ортогонализации. Подробно описано применение этого подхода при различных вариантах граничных условий.

**Ключевые слова:** пластинка, изгиб, численное решение, сплайны, дискретная ортогонализация.

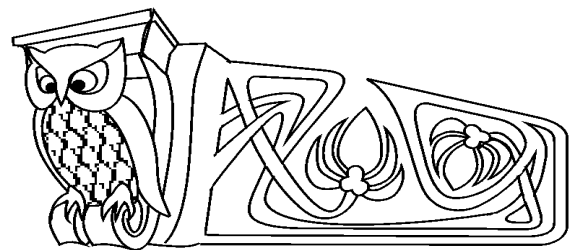
### ВВЕДЕНИЕ

Задача об установившихся поперечных колебаниях тонкой прямоугольной полимерной пластинки в рамках классической теории Кирхгофа при различных частных способах закрепления двух противоположных сторон рассматривалась ранее в работах [1–5]. В настоящей работе приводится методика численного решения задачи об установившихся колебаниях такой пластинки при произвольных граничных условиях на боковой поверхности.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Тонкая пластинка с размерами в плане  $a$ ,  $b$  и толщиной  $h$  совершает установившиеся колебания под действием распределенной по поверхности  $z = -h/2$  нагрузки интенсивности

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \cos \omega t. \quad (1)$$



**Modified Spline Collocation Method in the Problems of Thin Rectangular Viscoelastic Plate Vibrations**

**P.F. Nedorezov<sup>1</sup>, O.M. Romakina<sup>2</sup>, R.A. Safonov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Saratov State University,  
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
E-mail: p1934n@yandex.ru, safonovra@gmail.com

<sup>2</sup>Saratov State University,  
Chair of Computer's Algebra and Theory of Numbers  
E-mail: romakinaom@hotmail.ru

Numerical method for evaluation of critical frequencies during steady-state bending vibrations of viscoelastic plate is presented. The solution is based on applying modified spline collocation method for lowering the problem's dimension and numerical solving of the obtained problem via discrete orthogonalization method. The application of this approach with different boundary conditions is examined in detail.

**Key words:** plate, bending, numerical solution, spline, discrete orthogonalization.