



Библиографический список

1. Газовая динамика. Сер. Аэродинамика больших скоростей / Под ред. Эммонса. М.: Физматлит, 1957.
2. Гуськов О.Н., Копченков В.И., Липатов И.И. и др. Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах. М.: Физматлит. 2008.
3. Липатов И.И., Нейланд В.Я. К теории нестационарного отрыва и взаимодействия ламинарного пограничного слоя // Учен. записки ЦАГИ. 1987. Т. 18, № 1. С. 36–49.
4. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 4. С. 53–57.
5. Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. A. 1969. V. 312, № 1509. P. 181–206.
6. Chapman D.R., Kuehn D., Larson H. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition // NASA Rep. 1958. № 1356. 40 p.
7. Гогин Л.В., Нейланд В.Я., Степанов Г.Ю. Теория двумерных отрывных течений // Итоги науки. Гидромеханика. 1975. Т. 8. С.5–73.
8. Рыжов О.С., Терентьев Е.Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41, вып. 6.
9. Smith F.T., Sykes R.I., Brighton P.W.M. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt. 1. P.163–176
10. Липатов И.И. Пространственное обтекание малой неровности в режиме слабого гиперзвукового взаимодействия // Учен. записки ЦАГИ. 1980. Т. 11, № 2.
11. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз. 1959.
12. Smith F.T. Upstream interactions in channel flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. Pt. 4. P. 631–655.
13. Николаева Е.М., Тригуб В.Н. О самоиндуцированном взаимодействии пограничных слоёв в плоском канале // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 4. С. 131–141.
14. Дубинский С.В., Липатов И.И. О распространении возмущений в пограничных слоях во внутренних течениях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 2. С. 65–74.

УДК 539.376

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ НАПОЛНЕННЫХ ЭЛАСТОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е.В. Ломакин, Т.А. Белякова, Ю.П. Зезин*

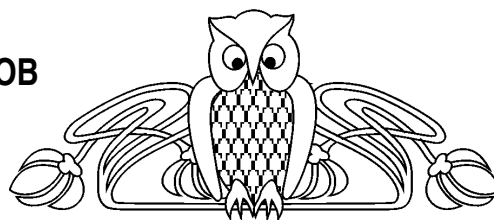
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет
кафедра теории пластичности,

*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: lomakin@mech.math.msu.su

Проведены экспериментальные исследования процесса релаксации напряжений для резины плотностью 1200 кг/м^3 , включающие испытания на релаксацию при нормальной температуре в условиях одноосного растяжения и сжатия при различном уровне деформаций. Для описания вязкогиперупругого деформирования наполненных эластомерных материалов используются определяющие соотношения, являющиеся обобщением нелинейной теории упругости и линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра. Разработан метод определения параметров взаимосвязанных гиперупругих и реологических характеристик деформирования. На основании экспериментальных данных отмечена зависимость релаксационных свойств исследуемых эластомеров от уровня деформации и предложен подход к описанию этой зависимости, основанный на применении определяющих соотношений нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов. Наблюдается вполне удовлетворительное соответствие теоретических и экспериментальных зависимостей.

ВВЕДЕНИЕ

Возрастающее использование резиноподобных материалов во многих областях современной техники приводит к необходимости описания с высокой точностью кратковременных и длительных характеристик деформирования и разрушения эластомерных элементов конструкций. Повсеместное использование эластомеров в нефтегазовой промышленности, машиностроении, гражданском строительстве,



Non-Linear Viscoelastic Behavior of Filled Elastomers

E.V. Lomakin, T.A. Belyakova, Yu.P. Zezin

The analysis of the results of experimental studies of relaxation properties of rubber at room temperature under the conditions of tension and compression at different strain levels is carried out. For the description of viscohyperelastic deformation of filled elastomers, the constitutive relations are used that are the generalization of non-linear elasticity and linear viscoelasticity Boltzmann – Volterra. The method for the determination of interrelated hyperelastic and reological characteristics of deformation is proposed. On the base of experimental data, the dependence of relaxation properties of elastomer on the strain level is discovered and the approach to the description of this dependence based on the constitutive relations of non-linear endochronic theory of aging viscoelastic materials is proposed. The finite element numerical simulation of an experiment under conditions of the confined compression of flat cylindrical specimen and subsequent relaxation is performed. Sufficient correspondence between the calculated values of axial load and the results of experimental study is demonstrated.



кораблестроении, авиационной и аэрокосмической технике ставит широкий круг исследовательских задач. В него, прежде всего, входит проведение всестороннего комплекса экспериментальных исследований. Первостепенное значение имеет формулировка математической модели, позволяющей описать напряженно-деформированное состояние наполненных полимерных материалов с учетом физической и геометрической нелинейности, накопления повреждений и разрушения, а также разработка экспериментальных методов определения материальных функций и функционалов, входящих в определяющие соотношения. Наконец, возникает необходимость в уточнении существующих алгоритмов численных расчетов для анализа поведения конструкций из физически нелинейных эластомерных материалов при различных условиях нагружения и деформирования.

В условиях больших деформаций линейное приближение для описания упругих свойств эластомеров не может быть использовано, и необходимо считать материал гиперупругим с соответствующим представлением упругого потенциала как функции инвариантов тензора конечных деформаций. Кроме того, вязкие свойства многих эластомеров зависят от характеристик процесса деформирования, в том числе от уровня деформаций, и являются нелинейными. При этом гиперупругие и реологические свойства материалов взаимосвязаны, и необходима разработка соответствующих методов их определения.

В данной работе приведены результаты экспериментальных исследований на релаксацию в условиях растяжения и сжатия при нормальной температуре образцов резины. Для описания данных экспериментов использованы интегральные определяющие соотношения, позволяющие одновременно учесть как гиперупругие, так и вязкоупругие свойства, что является необходимым условием при моделировании реального поведения эластомерных материалов и конструкций. Разработан метод определения параметров взаимосвязанных гиперупругих и реологических характеристик деформирования. На основании экспериментальных данных отмечена зависимость релаксационных свойств исследуемых эластомеров от уровня деформации и предложен подход к описанию этой зависимости.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проведены экспериментальные исследования процесса релаксации напряжений в образцах из резины плотностью 1200 кг/м^3 в условиях одноосного растяжения и сжатия при различном уровне деформаций и нормальной температуре. В испытаниях на релаксацию использовались цилиндрические образцы, начальный диаметр и начальная высота H_0 которых составляли соответственно 10 и 12 мм. В табл. 1–4 представлены результаты экспериментов на релаксацию в условиях одноосного сжатия при уровнях деформаций соответственно $\varepsilon_{11} = -0.185, -0.284, -0.305, -0.421$ ($E_{11} = -0.1679, -0.2437, -0.2585, -0.3324$), где $\varepsilon_{11} = \lambda_1 - 1$ — относительная осевая деформация, которая часто называется инженерной деформацией, $E_{11} = (\lambda_1^2 - 1)/2$ — осевая деформация Грина – Лагранжа, $\lambda_1 = H/H_0$, H — текущая высота образца. Скорость деформирования на этапе нагружения составляла $0.0082\text{--}0.01 \text{ с}^{-1}$. В таблицах приведены в зависимости от времени t [с] значения инженерного напряжения $\sigma_{11} = F/S_0$ [МПа], F — действующая осевая нагрузка, S_0 — начальная площадь сечения образца, а также значения соответствующей компоненты тензора напряжений Коши $\Sigma_{11} = (1 + \varepsilon_{11})\sigma_{11}$ [МПа], в предположении, что изменение объема образца отсутствует.

Таблица 1

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = -0.185$

t	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
1	2	3
21	1.3895	1.1325
26	1.3510	1.1010
36	1.2725	1.0371
46	1.2484	1.0175
56	1.2356	1.0070

Таблица 2

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = -0.284$

t	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
1	2	3
34	2.3708	1.6975
36	2.2765	1.6300
38	2.2340	1.5996
40	2.2058	1.5793
44	2.1703	1.5540



Окончание табл. 1

1	2	3
66	1.2292	1.0018
86	1.2132	0.9887
106	1.1988	0.9770
156	1.1811	0.9626
206	1.1715	0.9548
256	1.1651	0.9496
306	1.1587	0.9444
356	1.1507	0.9378
410	1.1491	0.9365
1010	1.1234	0.9156
1610	1.1106	0.9052
2810	1.1026	0.8986
4610	1.0849	0.8842
5810	1.0834	0.8829
7610	1.0801	0.8803
9410	1.0545	0.8594
13610	1.0417	0.8490
19370	1.0337	0.8425

Окончание табл. 2

1	2	3
50	2.1349	1.5286
60	2.0878	1.4949
70	2.0641	1.4779
80	2.0430	1.4628
90	2.0288	1.4526
111	2.0052	1.4357
186	1.9462	1.3935
261	1.9203	1.3749
411	1.8801	1.3462
561	1.8519	1.3259
711	1.8377	1.3158
895	1.8259	1.3073
2695	1.7528	1.2550
4495	1.7174	1.2297
6295	1.6891	1.2094
8095	1.6820	1.2043
11695	1.6584	1.1874
15620	1.6395	1.1739

Таблица 3

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\epsilon_{11} = -0.305$

t	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
37	2.6949	1.8729
42	2.5271	1.7563
47	2.4680	1.7153
52	2.4283	1.6877
57	2.4054	1.6717
67	2.3692	1.6466
77	2.3363	1.6237
87	2.3099	1.6052
107	2.2770	1.5825
147	2.2441	1.5597
367	2.1454	1.4911
547	2.1125	1.4682
727	2.0960	1.4567
1087	2.0632	1.4339
1987	2.0204	1.4042
2887	1.9973	1.3881
3787	1.9808	1.3767
4687	1.9611	1.3630
6487	1.9348	1.3447
8287	1.9216	1.3356
10087	1.9117	1.3287
11887	1.8986	1.3195
13687	1.8854	1.3104

Таблица 4

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\epsilon_{11} = -0.421$

t	$-\epsilon_{11}$	$-E_{11}$	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
10	0.1028	0.0975	1.0746	0.9641
20	0.2055	0.1844	2.0511	1.6296
30	0.3083	0.2608	2.9628	2.0494
41	0.421	0.3324	4.0374	2.3377
51	0.421	0.3324	3.6792	2.1303
61	0.421	0.3324	3.5615	2.0621
81	0.421	0.3324	3.4643	2.0058
101	0.421	0.3324	3.4182	1.9791
201	0.421	0.3324	3.2749	1.8962
301	0.421	0.3324	3.2170	1.8626
500	0.421	0.3324	3.1453	1.8212
1000	0.421	0.3324	3.0668	1.7757
2400	0.421	0.3324	2.9628	1.7155
8280	0.421	0.3324	2.8647	1.6586
70980	0.421	0.3324	2.7027	1.5649
94680	0.421	0.3324	2.7027	1.5649
154980	0.421	0.3324	2.6497	1.5342
166260	0.421	0.3324	2.6497	1.5342

Табл. 5–9 содержат результаты экспериментов на релаксацию в условиях одноосного растяжения при уровнях деформации соответственно $\epsilon_{11} = 0.105, 0.185, 0.269, 0.507, 0.56$ ($E_{11} = 0.1105, 0.2021, 0.3052, 0.6355, 0.7168$). Скорость деформирования на этапе нагружения составляла $0.00345-0.0035 \text{ с}^{-1}$.



Таблица 5

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации

$$\varepsilon_{11} = 0.105$$

t	σ_{11}	Σ_{11}
30	0.8309	0.9182
45	0.7819	0.8640
90	0.7328	0.8097
210	0.7027	0.7765
510	0.6582	0.7273
1362	0.6438	0.7114
6132	0.6340	0.7005
68382	0.5352	0.5913
273630	0.5214	0.5762

Таблица 7

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации

$$\varepsilon_{11} = 0.269$$

t	σ_{11}	Σ_{11}
78	1.4730	1.8692
93	1.3409	1.7016
108	1.3178	1.6723
163	1.2612	1.6004
213	1.2381	1.5712
273	1.2050	1.5292
393	1.1907	1.5110
573	1.1627	1.4754
933	1.1440	1.4517
1353	1.1159	1.4161
9603	1.0736	1.3624
79803	0.9091	1.1536
171603	0.8266	1.0490
438903	0.8877	1.1264
686403	0.8266	1.0490

Таблица 9

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации

$$\varepsilon_{11} = 0.56$$

t	σ_{11}	Σ_{11}
162	1.7606	2.7466
177	1.6654	2.5980
192	1.6118	2.5144
252	1.5226	2.3753
312	1.4870	2.3197
402	1.4572	2.2732
702	1.3977	2.1804
1002	1.3621	2.1248

Таблица 6

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации

$$\varepsilon_{11} = 0.185$$

t	σ_{11}	Σ_{11}
53	1.1158	1.3223
77	1.0706	1.2687
107	1.0349	1.2263
227	0.9944	1.1784
587	0.9546	1.1312
1787	0.9320	1.1044
4187	0.9142	1.0833
6917	0.8963	1.0621
8807	0.8827	1.0460
12407	0.8696	1.0305
16367	0.8607	1.0199
82967	0.7577	0.8979
441114	0.6287	0.7450

Таблица 8

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации

$$\varepsilon_{11} = 0.507$$

t	σ_{11}	Σ_{11}
147	1.6677	2.5132
171	1.4474	2.1812
231	1.3883	2.0921
351	1.2883	1.9414
651	1.2701	1.9141
1551	1.2569	1.8941
3081	1.2250	1.8460
8805	1.1888	1.7915
63612	1.0859	1.6365
234612	0.9701	1.4619
252612	0.9615	1.4489

Окончание табл. 9

t	σ_{11}	Σ_{11}
1302	1.3502	2.1063
3102	1.2966	2.0227
4602	1.2669	1.9763
8946	1.2311	1.9206
17546	1.1717	1.8278
80550	1.0980	1.7115
177150	1.0659	1.6628
260550	1.0665	1.6637
778950	1.0369	1.6176



2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВЯЗКОГИПЕРУПРУГОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ

Пусть $\overset{\circ}{x}_i$ и x_i , $i = 1, 2, 3$ соответственно начальные и актуальные координаты материальной точки. В качестве меры конечных деформаций могут быть использованы тензоры деформаций Коши – Лагранжа $\overset{\circ}{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ и Коши – Эйлера $\mathbf{C} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$, где $F_{ij} = \partial x_i / \partial \overset{\circ}{x}_j$ – градиент движения. Тензор $\overset{\circ}{\mathbf{C}}$ выражается через тензор кратностей удлинений $\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}$ в виде $\overset{\circ}{\mathbf{C}} = \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}^2$, чьи главные значения представляют собой удлинения материальных волокон по главным направлениям тензора, $\lambda_i = ds_i / \overset{\circ}{ds}_i$, $i = 1, 2, 3$. Связь тензора деформаций Коши – Лагранжа с тензором деформаций Грина – Лагранжа \mathbf{E} задается соотношением $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$ [1].

Инварианты тензора деформаций Коши – Лагранжа $\overset{\circ}{\mathbf{C}}$ имеют вид $I_1 = \text{tr}(\overset{\circ}{\mathbf{C}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\overset{\circ}{\mathbf{C}}^2)) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$, $I_3 = \det(\overset{\circ}{\mathbf{C}})$. В предположении несжимаемости эластомерных материалов справедливо $I_3 = 1$.

Для описания вязкогиперупругого деформирования эластомеров предлагается использовать определяющие соотношения, полученные путем обобщения нелинейной теории упругости и линейной вязкоупругой модели Больцмана – Вольтерра. Результирующее напряжение представляет собой сумму гиперупругой и вязкоупругой компонент [2, 3]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^h + \sigma_{ij}^v. \quad (1)$$

Гиперупругая составляющая тензора напряжений для изотропного несжимаемого материала может быть получена дифференцированием по соответствующим компонентам тензора деформаций упругого потенциала $W(I_1, I_2)$, представленного в виде полинома по инвариантам тензора конечных деформаций $(I_1 - 3)$ и $(I_2 - 3)$ [4]. Так, пятиконстантный полиномиальный гиперупругий потенциал будет иметь вид:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2. \quad (2)$$

При этом гиперупругая составляющая напряжения σ_{11}^h при одноосном напряженном состоянии представляется соотношением

$$\Sigma_{11}^h = (1 + \varepsilon_{11})\sigma_{11}^h = -p^h + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1},$$

где Σ_{11}^h – гиперупругая составляющая осевой компоненты тензора напряжений Коши, ε_{11} – относительная осевая деформация. Гидростатическое давление p^h определяется из условия равенства нулю напряжения в поперечном направлении $\Sigma_{22}^h = -p^h + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0$, откуда

$$p^h = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \quad \Sigma_{11}^h = (1 + \varepsilon_{11}) \sigma_{11}^h = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}.$$

В простейшем случае вязкоупругая составляющая напряжений σ_{ij}^v может быть представлена соотношениями линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра, и в случае одноосного деформирования несжимаемого материала записывается в виде

$$\sigma_{11}^v(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon_{11}(\tau). \quad (3)$$

Определяющие соотношения (3) применимы только при малых деформациях в геометрически линейной постановке и могут рассматриваться как первоначальная оценка соответствующих характеристик деформирования. При переходе к конечным деформациям аналогом соотношения (3) служит зависимость

$$\Sigma^v(t) = -p^v \mathbf{I} + \mathbf{F}(t) \int_0^t G(t - \tau) d\mathbf{E}(\tau) \mathbf{F}^T(t), \quad (4)$$



переходящая в формулу (3) при малых деформациях, когда осевая деформация Грина – Лагранжа совпадает с инженерной, $E_{11} \cong \varepsilon_{11}$.

Функция релаксации $R(t)$ может аппроксимироваться суммой экспоненциальных функций:

$$R(t) = \sum_{i=1}^N E_i e^{-\alpha_i t}. \tag{5}$$

На основании соотношений (1), (3), (5) в случае одноосного нагружения с постоянной скоростью деформаций $\dot{\varepsilon}_{11}$ в течение времени t_0 до деформации $\varepsilon_{11}^0 = \dot{\varepsilon}_{11} t_0$ и последующей релаксации напряжение в образце представляется в виде

$$\sigma_{11}(t) = \begin{cases} \sigma_{11}^h(\varepsilon_{11}(t)) + \dot{\varepsilon}_{11} \sum_{i=1}^N E_i \frac{1 - e^{-\alpha_i t}}{\alpha_i}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \sigma_{11}^h(\varepsilon_{11}(t)) + \dot{\varepsilon}_{11} \sum_{i=1}^N E_i \frac{e^{\alpha_i t_0} - 1}{\alpha_i} e^{-\alpha_i t}, & t \geq t_0. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, предполагается, что при описании напряженно-деформированного состояния эластомерных материалов можно выделить квазистатическую гиперупругую составляющую напряжений и вязкоупругую составляющую, описывающую зависимость деформационных свойств материала от истории деформирования. При медленном нагружении напряжение стремится к гиперупругой составляющей при данной деформации. В работе [2], где ставится задача описания деформирования резиноподобных материалов при высоких скоростях нагружения порядка 10^3 с^{-1} (ударных нагрузках), предлагается определять коэффициенты для гиперупругой составляющей напряжений σ_{ij}^h в определяющих соотношениях, исходя из экспериментов при малых по сравнению с предполагаемыми скоростях нагружения (0.001 с^{-1}). Таким образом, считается, что влиянием зависимости деформационных свойств материала от скорости нагружения можно пренебречь, если предполагаемые скорости деформирования на несколько порядков превышают скорости деформирования в эксперименте, описывающем гиперупругую составляющую напряжений.

В случае, когда исследуемые скорости деформирования сопоставимы с экспериментальными, для определения коэффициентов в соотношении (2) для гиперупругой составляющей напряжений σ_{ij}^h предлагается использовать метод, основанный на определении асимптотических значений напряжений в процессе релаксации при различных уровнях деформаций. В табл. 10 приведены определенные на основании проведенных экспериментов (табл. 1–9) значения напряжений [МПа] при времени релаксации, стремящемся к бесконечности. Эти данные, представляющие собой зависимость $\sigma_{11}^h(\varepsilon_{11})$, аппроксимируются при помощи потенциала (2), при этом константы материала равны $C_{10} = 0.5879$, $C_{01} = 0.1354$, $C_{20} = 0.6988$, $C_{11} = -1.7884$, $C_{02} = 0.7736$ (рис. 1).

При известной гиперупругой составляющей напряжений из соотношения (6) и испытаний на релаксацию можно определить коэффициенты E_i и α_i в вязкоупругих соотношениях. Для описания напряженно-деформированного состояния материала в условиях действия сжимающих нагрузок примем за основу данные эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия до деформации $\varepsilon_{11} = -0.421$. Соответствующие коэффициенты E_i [МПа] и α_i , полученные аппроксимацией данных табл. 4, приведены в табл. 11.

Теперь, когда известны и гиперупругие, и вязкоупругие константы материала, можно рассчитать теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии. Полученные зависимости показаны на рис. 2 (а, б) для разных масштабов времени. Экспериментальные значения отмечены на графиках звездочками; цифрами 1–4 обозначены теоретические кривые релаксации при уровнях деформации $\varepsilon_{11} = -0.185, -0.284, -0.305, -0.421$ соответственно. Анализ определенных таким образом теоретических кривых позволяет отметить зависимость функции релаксации от уровня

Таблица 10

Асимптотические значения релаксационных характеристик (гиперупругая составляющая напряжений)

ε_{11}	σ_{11}^h
-0.421	-2.3767
-0.305	-1.5950
-0.284	-1.3974
-0.185	-0.8877
0.105	0.4830
0.185	0.6072
0.269	0.7935
0.507	0.9522
0.56	1.0005



Таблица 11

Материальные константы ядра
релаксации по данным эксперимента при
значении инженерной деформации
 $\varepsilon_{11} = -0.421$

i	E_i	α_i
1	0.6921	$2.338 \cdot 10^{-6}$
2	0.3861	$9.723 \cdot 10^{-5}$
3	0.4613	$1.129 \cdot 10^{-3}$
4	0.6259	$8.527 \cdot 10^{-3}$
5	3.6803	0.106

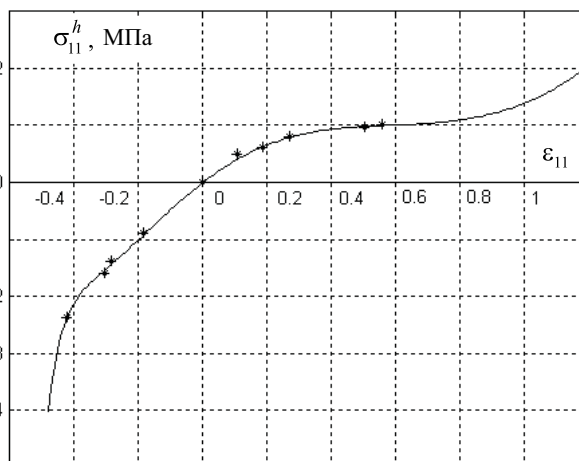
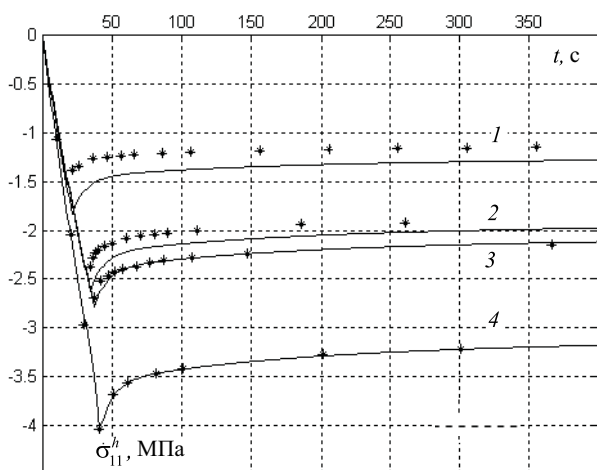
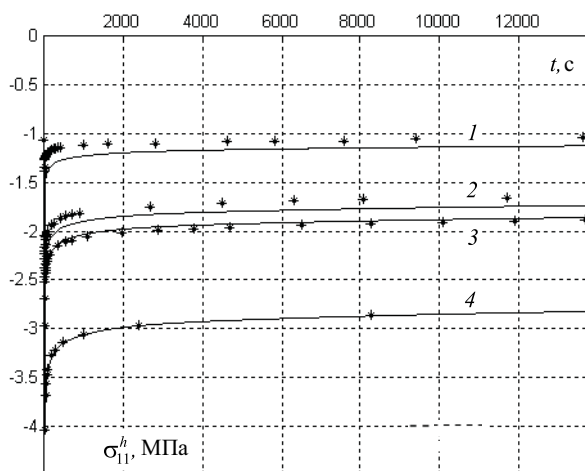


Рис. 1. Аппроксимация гиперупругой составляющей напряжений по данным экспериментов на релаксацию



a



b

Рис. 2. Теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии на основании соотношений линейной теории вязкоупругости

деформаций, которая не может быть описана при помощи соотношений (3) линейной теории вязкоупругости.

Оставаясь в рамках геометрически линейного подхода к описанию деформирования, можно учесть физически нелинейное сопротивление наполненных полимерных материалов при помощи нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов. Определяющие соотношения эндохронной теории в общем случае трехосного напряженного состояния имеют вид

$$S_{ij}^{\nu}(t) = \varphi_1(t) \int_0^t R_1(t_1(t) - t_1(\tau)) d\mathcal{E}_{ij}(\tau),$$

$$\sigma^{\nu}(t) = \varphi_2(t) \int_0^t R_2(t_2(t) - t_2(\tau)) d[\vartheta(\tau) - 3\alpha\Delta T(\tau)], \quad (7)$$

$$t_1 = \int_0^t \frac{\varphi_1(\xi) d\xi}{f_1(\xi)}, \quad t_2 = \int_0^t \frac{\varphi_2(\xi) d\xi}{f_2(\xi)}.$$



Здесь $R_1(t)$ — функция релаксации при сдвиге, $R_2(t)$ — функция релаксации при объемном деформировании, S'_{ij} и \mathcal{E}_{ij} — девиатор вязкоупругой составляющей тензора условных напряжений и девиатор тензора инженерных деформаций соответственно, $\sigma^{\nu}(t)$ — гидростатическая компонента вязкоупругой составляющей тензора напряжений, $\vartheta(t)$ — объемная деформация, ΔT — разность температур, α — коэффициент линейного теплового расширения, $t_i(t)$ ($i = 1, 2$) — приведенные времена. Функции $f_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$) могут представлять собой функции времени, инвариантов тензора напряжений и тензора деформаций, температуры, поврежденности материала и других физических и химических параметров.

Для описания наблюдающейся зависимости релаксационных характеристик от уровня деформации в случае несжимаемого материала в исследуемом ограниченном диапазоне деформаций можно ввести функцию $\varphi_1(\varepsilon_{11}(t)) = A_1 - A_2 e^{p(\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_0)}$, $\varepsilon_0 = -0.421$, $p = 1.4534$, $A_1 = 1.953$, $A_2 = 0.953$, $f_1(\varepsilon_{11}(t)) = \varphi_1(\varepsilon_{11}(t))$, $t_1 = t$. Теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии, полученные на основе модифицированных соотношений (7), представлены на рис. 3 (а, б) для разных масштабов времени (обозначения теоретических кривых и экспериментальных точек на графиках те же, что и на рис. 2 (а, б)). При этом предполагалось, что зависимость вязкоупругих свойств материала от уровня деформации начинает проявляться заметным образом, когда абсолютное значение деформации превышает некоторую критическую величину ε_s , т. е. при $\varepsilon < -\varepsilon_s$ в случае сжатия. В качестве ε_s в данной работе использовалось минимальное по величине значение деформации при сжатии в исследуемом диапазоне: $\varepsilon_s = -0.185$. Приведенные на рис. 3 кривые демонстрируют хорошее соответствие экспериментальных и теоретических зависимостей, рассчитанных по формулам (7). Незначительное отклонение наблюдается только для деформации $\varepsilon_{11} = -0.305$ в силу выбранной монотонной зависимости функции релаксации от уровня деформаций.

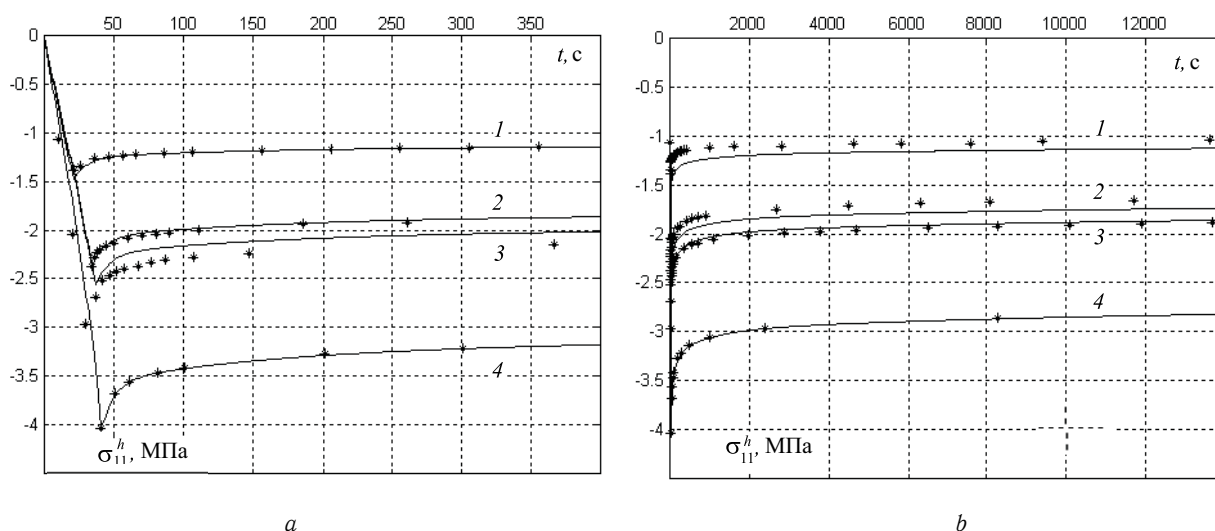


Рис. 3. Теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии на основании соотношений нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов

Для обоснования справедливости предложенного варианта определяющих соотношений и методики экспериментального определения входящих в них параметров был проведен также ряд независимых экспериментов на стесненное сжатие в обойме и последующую релаксацию плоских цилиндрических образцов, начальные диаметр и высота которых составляли соответственно 28.8 и 11.2 мм. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 4, а. Образец помещен в цилиндрическую обойму и сжимается в результате вертикального перемещения верхнего пуансона; нижний пуансон неподвижен. В экспериментах задавалось перемещение верхнего пуансона с постоянной скоростью 0.077 мм/сек до величины деформации сжатия 41.3%. Средняя скорость деформации сжатия была 0.007 сек⁻¹. В табл. 12 приведены полученные в эксперименте значения осевой силы F_{exp} [Н] в зависимости от времени t [с].

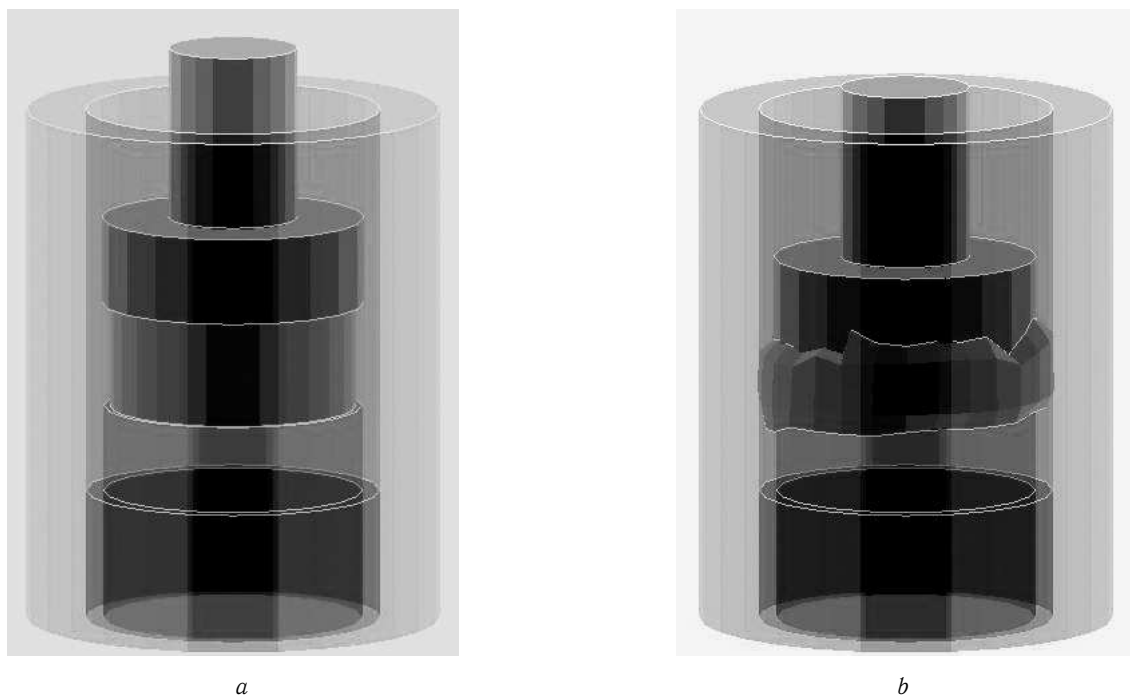


Рис. 4, *a* — схема экспериментальной установки, в которой реализуется стесненное сжатие в обойме и последующая релаксация плоского цилиндрического образца; *b* — деформированный вид образца в конце нагружения при времени $t = 60$ с

Проведено численное моделирование данного эксперимента при помощи метода конечных элементов в пакете LS-DYNA с использованием определенных выше значений гиперупругих и вязкоупругих констант материала. Деформированный вид образца в конце нагружения при времени $t = 60$ с показан на рис. 4, *b*. Полученная при расчете зависимость действующей в осевом направлении силы F от времени t приведена на рис. 5; соответствующие значения F также представлены в табл. 12. Точками на графике отмечены экспериментальные значения осевой нагрузки.

Таблица 12

Результаты эксперимента на стесненное сжатие в обойме и последующую релаксацию плоского цилиндрического образца

t	$-F_{exp}$	$-F$
10.002	637.0	439.0
19.998	1116.9	798.6
30	1587.0	1531.0
40.002	2155.4	2484.7
49.998	3331.1	4745.0
60	6609.4	7204.1
90	5766.0	6322.4
180	5442.4	6199.2
300	5295.3	6105.4
600	5148.2	6057.3

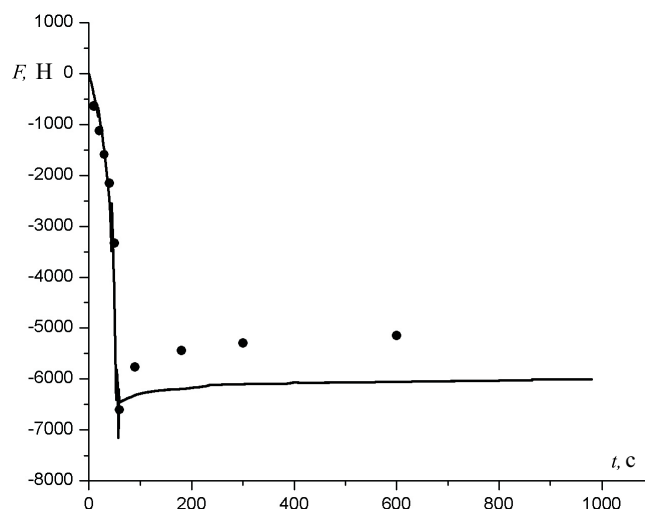


Рис. 5. Зависимость действующей в осевом направлении силы F от времени t по результатам численного моделирования при помощи метода конечных элементов в пакете LS-DYNA

Анализ результатов численного моделирования позволяет отметить, что, даже исходя только из экспериментов на одноосное напряженное состояние при определении констант в соотношениях (1)–



(5), в случае трехосного напряженного состояния можно получить расчетные значения деформационных характеристик, достаточно хорошо согласующихся с экспериментальными. На начальном этапе нагружения сопротивление материала определяется, в основном, гиперупругими свойствами и, как видно из рис. 5, экспериментальная и расчетная диаграммы зависимости сжимающей силы от времени на начальном участке сжатия практически совпадают, но имеется различие в максимальных значениях силы, которое составляет 18%. Это различие перенеслось и на расчетные и экспериментальные значения осевой нагрузки в процессе релаксации, которое также не превышает 18%. Следует отметить, что при проведении испытаний в условиях стесненного сжатия большое влияние оказывает трение на ограничивающих поверхностях, и здесь возможно определенное расхождение между расчетными и экспериментальными значениями напряжений. В экспериментах коэффициент трения между исследованным эластомером и поверхностями экспериментальной установки (рис. 4, *a, b*) не определялся, и в расчетах было использовано некоторое среднее значение, равное 0.3, которое часто принимается при проведении расчетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных экспериментальных исследований релаксационных характеристик резины в условиях одноосного растяжения и сжатия при нормальной температуре предложен вариант описания механических свойств наполненных эластомерных материалов при помощи определяющих соотношений гипервязкоупругости, которые представляют собой обобщение нелинейной теории упругости и линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра. Разработан метод определения взаимосвязанных гиперупругих и реологических свойств эластомеров. Представление зависимостей между вязкоупругой составляющей напряжений и деформациями в виде нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов позволяет учесть, оставаясь в рамках геометрически линейного подхода, зависимость ядра релаксации от уровня деформаций, что приводит к удовлетворительному соответствию между теоретическими и экспериментальными зависимостями. Более точное описание поведения экспериментальных кривых может быть достигнуто введением приведенного времени. Следует отметить, что достаточно высокий уровень деформаций в исследованном диапазоне приводит к необходимости учета конечных деформаций с использованием соотношений (4) или их модификаций для вязкоупругой составляющей напряжений.

Проведено численное моделирование эксперимента на стесненное сжатие в обойме и последующую релаксацию плоских цилиндрических образцов при помощи метода конечных элементов в пакете LS-DYNA с использованием определенных значений гиперупругих и вязкоупругих констант материала. Отмечено, что даже исходя из экспериментов на одноосное напряженное состояние при определении констант в определяющих соотношениях, можно получить расчетные значения осевой нагрузки, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментальными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-08034, 06-08-00422).

Библиографический список

1. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 256 с.
2. Yang L.M., Shim V.P.W., Lim C.T. A visco-hyperelastic approach to modelling the constitutive behaviour of rubber // Intern. J. of Impact Engineering. 2000. V. 24. P. 545–560.
3. LS-DYNA Theoretical Manual. May 1998. Livermore Software Technology Corporation.
4. Rivlin R.S. Proceedings of First Symposium on Naval Structural Mechanics. 1960. P. 169–198.
5. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 63–76.