



5. Shestakov A. A. *Obobshchennyi pryamoy metod Lyapunova dlya sistem s raspredelennymi parametrami*. Moscow, Nauka, 2007. (in Russian).
6. Kirichenko V. F., Samarkin P. A. Kachestvennyy analys evolucionnih uravneniy v neklassicheskoy teorii obolochek s nachalnymi nepravilnostyami [Qualitative analysis of the evolution equations in nonclassical theory of shallow shells with initial irregularities]. *Vestnik Saratov. gos. tekhn. univ.*, 2011, no. 3 (57). iss. 1, pp. 33–40 (in Russian).
7. Kirichenko V. F., Samarkin P. A. Ispolzovanie norm iz fazovogo prostranstva pri issledovanii dinamicheskoy ustoychivosti pologih obolochek [Application of the phase space norms in the analysis of dynamic buckling of shallow shells]. *Vestnik Saratov. gos. tekhn. univ.*, 2011, no. 4 (60), iss. 2, pp. 70–76 (in Russian).
8. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some methods for solving nonlinear boundary value problems, in French]. Paris, Dunod, 1969.
9. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences, 1985.
10. Rektoris K. *Variacionnye metody v matematicheskoy fizike i tehnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]. Moscow, Mir, 1985 (in Russian).
11. Ciarlet P. G., Rabier P. *Les Equations de von Kàrmàn* [Von Kàrmàn equations]. Springer, 1980 (in French).
12. Vorovich I. I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologih obolochek* [Mathematical problems of nonlinear theory of Shallow Shells]. Moscow, Nauka, 1989 (in Russian).

УДК 531.38, 681.5

ДУАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ НА ПРИМЕРЕ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА. I

Е. И. Ломовцева¹, Ю. Н. Челноков²

¹Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LomovtsevaEI@yandex.ru

²Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, chelnokovyun@info.sgu.ru

На примере стэнфордского манипулятора рассматривается методология решения прямой задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием винтовых методов механики (матриц дуальных направляющих косинусов, бикватернионов Клиффорда), выводятся кинематические уравнения движения манипулятора, необходимые для решения обратной задачи кинематики манипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления.

Ключевые слова: робот-манипулятор, прямая задача кинематики, матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион, кватернион, кинематические уравнения.

1. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Стэнфордский манипулятор [1] представляет собой манипулятор с шестью степенями свободы: пятью вращательными и одной поступательной. В качестве обобщенных координат выступают углы φ_i ($i = 1, 2, 4, 5, 6$) поворота i -го звена относительно $(i - 1)$ -го и величина d_3 — линейное поступательное перемещение 3 звена относительно 2. Схема манипулятора и вводимые системы координат приведены на рис. 1. На нем $X_0Y_0Z_0$ — система координат, связанная с основанием манипулятора, $X_iY_iZ_i$ — система координат, связанная с i -м звеном манипулятора, ось z_i направлена вдоль оси i -го сочленения; ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и направлена от нее; ось y_i дополняет оси x_i, z_i до правой декартовой системы координат.

Относительное положение звеньев стэнфордского манипулятора может быть описано с помощью трех соответствующих каждому звену конструктивных геометрических параметров Θ_i, α_i, d_i , приведенных в таблице.

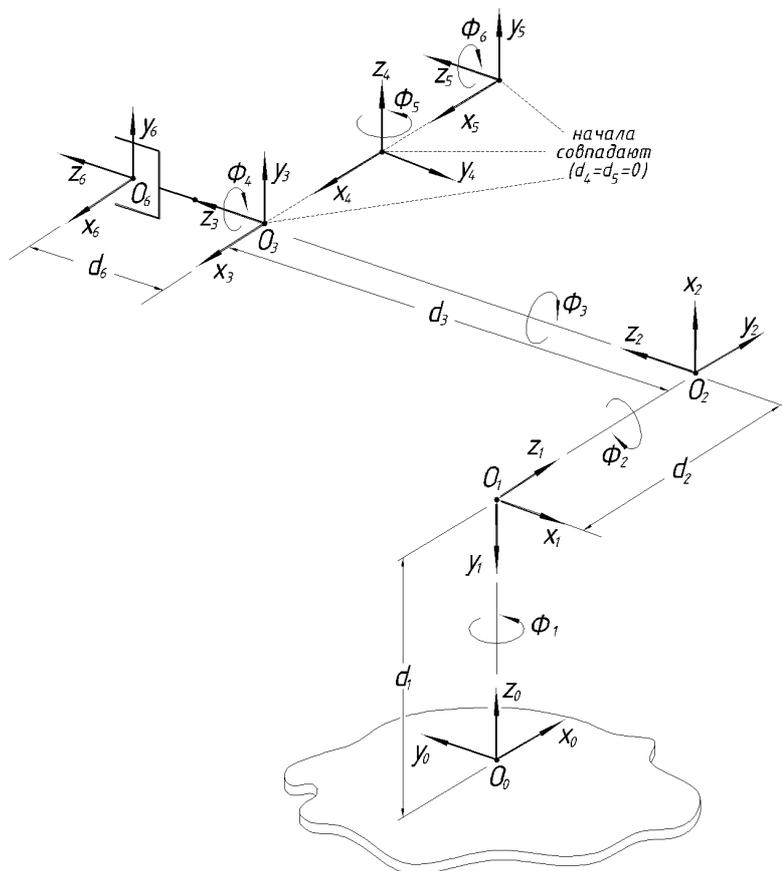


Рис. 1. Схема стэнфордского манипулятора

В таблице Θ_i — присоединенный угол (угол, на который надо повернуть ось x_{i-1} вокруг оси z_{i-1} , чтобы она стала сонаправлена с осью x_i); d_i — расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом $(i-1)$ -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси z_{i-1} ; d_1, d_2, d_6 — постоянные величины, d_3 — переменная величина; α_i — угловое смещение (угол, на который надо повернуть ось z_{i-1} вокруг оси x_i , чтобы она стала сонаправлена с осью z_i).

Обобщенная координата φ_i — угол поворота i -го звена относительно $(i-1)$ -го звена вокруг оси z_{i-1} , обобщенная координата d_3 — поступательное перемещение 3 звена относительно 2 вдоль оси $z_2(z_3)$. Отметим, что обобщенные координаты φ_i отсчитываются вокруг тех же осей, что и конструктивные параметры Θ_i . На рис. 1 $\Phi_i = \Theta_i + \varphi_i$.

Параметры систем координат звеньев стэнфордского манипулятора

| Сочленение i | Θ_i | α_i | d_i |
|----------------|-------------|-------------|-------|
| 1 | -90° | -90° | d_1 |
| 2 | -90° | 90° | d_2 |
| 3 | -90° | 0° | d_3 |
| 4 | 0° | -90° | 0 |
| 5 | 0° | 90° | 0 |
| 6 | 0° | 0° | d_6 |

2. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦ ДУАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ И БИКВАТЕРНИОНОВ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Прямая задача кинематики состоит в определении линейного положения и ориентации схвата манипулятора относительно абсолютной системы координат $X_0Y_0Z_0$ по известному вектору обобщенных координат $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_6(t)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), d_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t))$ и заданным геометрическим параметрам звеньев.

Для решения прямой задачи кинематики используется следующая схема конечных перемещений звеньев манипулятора:

$$X_0Y_0Z_0 \xrightarrow{C_1, \Lambda_1} X_1Y_1Z_1 \xrightarrow{C_2, \Lambda_2} X_2Y_2Z_2 \xrightarrow{C_3, \Lambda_3} X_3Y_3Z_3 \xrightarrow{C_4, \Lambda_4} X_4Y_4Z_4 \xrightarrow{C_5, \Lambda_5} X_5Y_5Z_5 \xrightarrow{C_6, \Lambda_6} X_6Y_6Z_6,$$

$$X_0Y_0Z_0 \xrightarrow{C, \Lambda} X_6Y_6Z_6.$$

Здесь C_i и Λ_i — матрица дуальных направляющих косинусов и бикватернион конечного перемещения i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го, C и Λ — матрица дуальных направляющих косинусов и бикватернион конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно основания.

Нахождение матрицы C и бикватерниона Λ в виде функций обобщенных координат манипулятора с помощью формул сложения конечных перемещений [2, 3] и составляет предмет решения прямой задачи кинематики. Уравнения для нахождения матрицы C и бикватерниона Λ в случае стэнфордского манипулятора имеют вид

$$C = c + sc^0 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} c_{11}^0 & c_{12}^0 & c_{13}^0 \\ c_{21}^0 & c_{22}^0 & c_{23}^0 \\ c_{31}^0 & c_{32}^0 & c_{33}^0 \end{pmatrix} =$$

$$= C_6 C_5 C_4 C_3 C_2 C_1, \quad C_i = c_i + sc_i^0, \quad (1)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda + s\lambda^0 = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 + s(\lambda_0^0 + \lambda_1^0 \mathbf{i}_1 + \lambda_2^0 \mathbf{i}_2 + \lambda_3^0 \mathbf{i}_3) =$$

$$= (\lambda_0 + s\lambda_0^0) + (\lambda_1 + s\lambda_1^0) \mathbf{i}_1 + (\lambda_2 + s\lambda_2^0) \mathbf{i}_2 + (\lambda_3 + s\lambda_3^0) \mathbf{i}_3 =$$

$$= \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_5 \circ \Lambda_6, \quad \Lambda_i = \lambda_i + s\lambda_i^0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; s — символ (комплексность) Клиффорда, обладающая свойством $s^2 = 0$; \circ — символ кватернионного умножения; C_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) и Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — дуальные направляющие косинусы и дуальные параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), характеризующие угловое и линейное положение схвата манипулятора в основной системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; c_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) и λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — вещественные направляющие косинусы и вещественные параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), характеризующие ориентацию схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$ (главные части дуальных величин C_{ik} и Λ_j), c_{ik}^0 и λ_j^0 — моментные части дуальных величин C_{ik} и Λ_j , характеризующие линейное положение схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; c и λ — вещественная матрица направляющих косинусов и кватернион поворота, описывающие ориентацию схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; c^0 и λ^0 — вещественная матрица и кватернион, описывающие поступательное перемещение схвата в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$; $c_i(\lambda_i)$ и $c_i^0(\lambda_i^0)$ — главная и моментная части матрицы дуальных направляющих косинусов C_i (бикватерниона Λ_i), характеризующие угловое и линейное положение i -го звена (системы координат $X_i Y_i Z_i$) в системе координат $X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$, связанной с $(i-1)$ -м звеном.

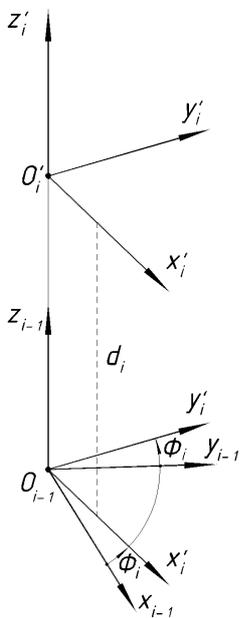


Рис. 2. Схема первого перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го

Конечное перемещение i -го звена относительно $(i-1)$ -го, описываемое матрицей C_i или бикватернионом Λ_i , представляет собой композицию двух перемещений: перемещения на дуальный угол $\Phi_i + sd_i = (\Theta_i + \varphi_i) + sd_i$ вокруг оси z_{i-1} (рис. 2) и поворота на угол α_i вокруг оси x'_i , полученной из оси x_{i-1} в результате первого перемещения (рис. 3).

Схема конечных перемещений имеет следующий вид:

$$X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1} \xrightarrow{C_i^1, \Lambda_i^1} X_i^1 Y_i^1 Z_i^1 \xrightarrow{C_i^2, \Lambda_i^2} X_i Y_i Z_i.$$

Матрица дуальных направляющих косинусов C_i^1 и бикватернион Λ_i^1 первого перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го имеют вид

$$C_i^1 = \begin{pmatrix} \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & 0 \\ -\sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_i^1 = \cos\left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s\frac{d_i}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s\frac{d_i}{2}\right) \mathbf{i}_3.$$

Второе конструктивное перемещение i -го звена относительно $(i-1)$ -го представляет собой поворот на угол α_i вокруг оси x'_i (см. рис. 3). За счет отсутствия линейного перемещения дуальные углы обра-



щаются в обычные. Матрица направляющих косинусов C_i^2 и кватернион Λ_i^2 второго конструктивного перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го в соответствии с рис. 3 имеют вид

$$C_i^2 = c_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_i^2 = \lambda_i^2 = \cos \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \mathbf{i}_1.$$

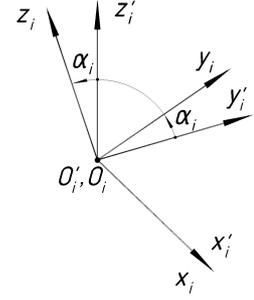


Рис. 3. Схема второго перемещения i -го звена относительно $(i-1)$ -го

Матрица дуальных направляющих косинусов и бикватернион конечного перемещения i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го находятся с использованием формул сложения конечных перемещений [2, 3]:

$$C_i = C_i^2 C_i^1 = \begin{pmatrix} \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \cos \alpha_i \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & -\sin \alpha_i \cos((\Theta_i + \varphi_i) + sd_i) & \cos \alpha_i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\Lambda_i = \Lambda_1^1 \circ \Lambda_1^2 = \cos \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \cos \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \cos \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_1 +$$

$$+ \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \sin \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_2 + \cos \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \sin \left(\frac{\Theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2} \right) \mathbf{i}_3. \quad (4)$$

При подстановке в уравнения (3), (4) геометрических параметров манипулятора, приведенных в таблице, получаем следующие матрицы дуальных направляющих косинусов и бикватернионы относительных конечных перемещений звеньев манипулятора:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 + sd_1 \cos \varphi_1 & -\cos \varphi_1 + sd_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \cos \varphi_1 - sd_1 \sin \varphi_1 & \sin \varphi_1 + sd_1 \cos \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \left(p_1 + s \frac{d_1}{2} q_1 \right) - \frac{1}{2} \left(p_1 + s \frac{d_1}{2} q_1 \right) \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} \left(q_1 - s \frac{d_1}{2} p_1 \right) \mathbf{i}_2 + \frac{1}{2} \left(-q_1 + s \frac{d_1}{2} p_1 \right) \mathbf{i}_3,$$

$$p_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad q_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad (6)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 + sd_2 \cos \varphi_2 & -\cos \varphi_2 + sd_2 \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos \varphi_2 + sd_2 \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_2 - sd_2 \cos \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \left(p_2 + s \frac{d_2}{2} q_2 \right) + \frac{1}{2} \left(p_2 + s \frac{d_2}{2} q_2 \right) \mathbf{i}_1 + \frac{1}{2} \left(-q_2 + s \frac{d_2}{2} p_2 \right) \mathbf{i}_2 + \frac{1}{2} \left(-q_2 + s \frac{d_2}{2} p_2 \right) \mathbf{i}_3,$$

$$p_2 = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad q_2 = \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad (8)$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} sd_3 & -1 & 0 \\ 1 & sd_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + s \frac{d_3}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-1 + s \frac{d_3}{2} \right) \mathbf{i}_3, \quad (10)$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_4 & \sin \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \varphi_4 & \cos \varphi_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_4}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_4}{2} \mathbf{i}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_4}{2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_4}{2} \mathbf{i}_3, \quad (12)$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_5 & \sin \varphi_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \varphi_5 & -\cos \varphi_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\Lambda_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_5}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi_5}{2} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_5}{2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\varphi_5}{2} \mathbf{i}_3, \quad (14)$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_6 - sd_6 \sin \varphi_6 & \sin \varphi_6 + sd_6 \cos \varphi_6 & 0 \\ -\sin \varphi_6 - sd_6 \cos \varphi_6 & \cos \varphi_6 - sd_6 \sin \varphi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\Lambda_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi_6}{2} + s \frac{d_6}{2} \sin \frac{\varphi_6}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\varphi_6}{2} + s \frac{d_6}{2} \cos \frac{\varphi_6}{2} \right) \mathbf{i}_3. \quad (16)$$

Матрица дуальных направляющих косинусов C и бикватернион конечного перемещения Λ выходного звена манипулятора относительно неподвижного основания находятся через приведенные матрицы и бикватернионы по формулам (1), (2):

$$C = C_6 C_5 C_4 C_3 C_2 C_1, \quad (17)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_5 \circ \Lambda_6. \quad (18)$$

Подстановка выражений (3)–(16) в (17), (18) дает выражение матрицы дуальных направляющих косинусов и бикватерниона конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно неподвижного основания через обобщенные координаты $(\varphi_1, \varphi_2, d_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$ в явном виде. Формулы (17), (18) и (3)–(16) являются алгоритмами решения прямой задачи кинематики стэнфордского манипулятора в дуальных матрицах направляющих косинусов и в бикватернионах конечных перемещений.

3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Кинематические уравнения движения манипулятора получаются из векторных выражений для линейной и угловой скоростей движения выходного звена путем проектирования их на оси системы координат $X_6 Y_6 Z_6$, связанной с выходным звеном манипулятора.

В соответствии с кинематической схемой (см. рис. 1) вектор ω угловой скорости выходного звена манипулятора будет иметь вид

$$\omega = \dot{\varphi}_1 \mathbf{k}_0 + \dot{\varphi}_2 \mathbf{k}_1 + \dot{\varphi}_4 \bar{\mathbf{k}}_3 + \dot{\varphi}_5 \mathbf{k}_4 + \dot{\varphi}_6 \mathbf{k}_5, \quad (19)$$

Здесь \mathbf{k}_i — орт оси z_i системы координат, связанной с i -м звеном манипулятора, φ_i — обобщенные координаты манипулятора, верхняя точка обозначает производную по времени.

Радиус-вектор \mathbf{r} начала O_6 системы координат, связанной с выходным звеном, в соответствии с кинематической схемой (см. рис. 1) определяется соотношением

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_5} + \overrightarrow{O_5O_6}, \quad (20)$$

где O — начало системы координат, связанной с основанием манипулятора, O_i — начало i -й системы координат.

Дифференцирование уравнения (20) по времени и подстановка в него заданных геометрических параметров манипулятора дает выражение для вектора линейной скорости начала системы координат $X_6 Y_6 Z_6$, связанной с выходным звеном, относительно неподвижного основания:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{d}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{d}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{d}_3}{dt} + \frac{d\mathbf{d}_6}{dt}; \quad \mathbf{d}_i = d_i \mathbf{k}_i.$$

Векторы $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_6$ постоянны по модулю, поэтому использование формулы Эйлера для постоянного по модулю вектора и дифференцирование переменного вектора \mathbf{d}_3 дает следующее выражение:

$$\mathbf{v} = \omega_1 \times \mathbf{d}_1 + (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{d}_2 + \dot{d}_3 \mathbf{k}_2 + (\omega_1 + \omega_2) \times (d_3 \mathbf{k}_2) + (\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6) \times \mathbf{d}_6, \quad (21)$$

где \times — символ векторного произведения, ω_i — относительные угловые скорости звеньев, которые выражаются через обобщенные координаты и орты осей z_i следующим образом:

$$\omega_i = \dot{\varphi}_i \mathbf{k}_{i-1} \quad (i = 1, 2, 4, 5, 6).$$



Для получения кинематических уравнений необходимо спроектировать векторные выражения (19) и (21) на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$, связанной с выходным звеном манипулятора. Необходимые для проектирования вещественные матрицы направляющих косинусов обозначим следующим образом:

$$c = c_6c_5c_4c_3c_2c_1, \quad c_{61} = c_6c_5c_4c_3c_2, \quad c_{62} = c_6c_5c_4c_3, \quad c_{63} = c_6c_5c_4, \quad c_{64} = c_6c_5, \quad c_{65} = c_6.$$

Здесь c_i — вещественная матрица направляющих косинусов поворота i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го.

Тогда переход от одной системы координат к другой, учитывающий лишь повороты систем координат, осуществляется в соответствии со схемой поворотов:

$$\begin{aligned} X_0Y_0Z_0 &\xrightarrow{c} X_6Y_6Z_6, & X_1Y_1Z_1 &\xrightarrow{c_{61}} X_6Y_6Z_6, & X_2Y_2Z_2 &\xrightarrow{c_{62}} X_6Y_6Z_6, \\ X_3Y_3Z_3 &\xrightarrow{c_{63}} X_6Y_6Z_6, & X_4Y_4Z_4 &\xrightarrow{c_{64}} X_6Y_6Z_6, & X_5Y_5Z_5 &\xrightarrow{c_{65}} X_6Y_6Z_6. \end{aligned}$$

Найдем проекции единичных векторов \mathbf{k}_i на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$, связанной с выходным звеном. Обозначим через c^{ij} и c_{6k}^{ij} ($i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4, 5$) элементы матриц c и c_{6k} , а через $\mathbf{i}_6, \mathbf{j}_6, \mathbf{k}_6$ — орты системы координат $X_6Y_6Z_6$. Тогда будем иметь:

$$\mathbf{k}_0 = c^{13}\mathbf{i}_6 + c^{23}\mathbf{j}_6 + c^{33}\mathbf{k}_6, \quad \mathbf{k}_i = c_{6i}^{13}\mathbf{i}_6 + c_{6i}^{23}\mathbf{j}_6 + c_{6i}^{33}\mathbf{k}_6 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (22)$$

Запишем векторное уравнение (19) в матричном виде, учитывая соотношения (22) и обозначая через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$. Получим:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 c^{13} + \dot{\varphi}_2 c_{61}^{13} + \dot{\varphi}_4 c_{63}^{13} + \dot{\varphi}_5 c_{64}^{13} + \dot{\varphi}_6 c_{65}^{13} \\ \dot{\varphi}_1 c^{23} + \dot{\varphi}_2 c_{61}^{23} + \dot{\varphi}_4 c_{63}^{23} + \dot{\varphi}_5 c_{64}^{23} + \dot{\varphi}_6 c_{65}^{23} \\ \dot{\varphi}_1 c^{33} + \dot{\varphi}_2 c_{61}^{33} + \dot{\varphi}_4 c_{63}^{33} + \dot{\varphi}_5 c_{64}^{33} + \dot{\varphi}_6 c_{65}^{33} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Найдем проекции векторов \mathbf{d}_i на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$, связанной с выходным звеном. Имеем:

$$\mathbf{d}_1 = d_1 c^{13}\mathbf{i}_6 + d_1 c^{23}\mathbf{j}_6 + d_1 c^{33}\mathbf{k}_6, \quad \mathbf{d}_i = d_i c_{6i-1}^{13}\mathbf{i}_6 + d_i c_{6i-1}^{23}\mathbf{j}_6 + d_i c_{6i-1}^{33}\mathbf{k}_6 \quad (i = 2, 3, 6). \quad (24)$$

Запишем в координатной форме векторные произведения в уравнении (21):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}_1 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как векторы коллинеарны,} \\ \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}_2 &= \mathbf{i}_6(d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{61}^{33} - c^{33} c_{61}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{61}^{33} - c^{33} c_{61}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{61}^{23} - c^{23} c_{61}^{13})), \\ \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{d}_2 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как векторы коллинеарны,} \\ d_3 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{k}_2 &= \mathbf{i}_6(d_3 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{62}^{33} - c^{33} c_{62}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_3 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{62}^{33} - c^{33} c_{62}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_3 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{62}^{23} - c^{23} c_{62}^{13})), \\ d_3 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{k}_2 &= \mathbf{i}_6(d_3 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{23} c_{62}^{33} - c_{61}^{33} c_{62}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_3 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{62}^{33} - c_{61}^{33} c_{62}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_3 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{62}^{23} - c_{61}^{23} c_{62}^{13})), \\ \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{65}^{33} - c^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{65}^{33} - c^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_1 (c^{13} c_{65}^{23} - c^{23} c_{65}^{13})), \\ \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{23} c_{65}^{33} - c_{61}^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{65}^{33} - c_{61}^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_2 (c_{61}^{13} c_{65}^{23} - c_{61}^{23} c_{65}^{13})), \\ \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как } \boldsymbol{\omega}_3 = \bar{\mathbf{0}}, \\ \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_4 (c_{63}^{23} c_{65}^{33} - c_{63}^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_4 (c_{63}^{13} c_{65}^{33} - c_{63}^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_4 (c_{63}^{13} c_{65}^{23} - c_{63}^{23} c_{65}^{13})), \\ \boldsymbol{\omega}_5 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{i}_6(d_6 \dot{\varphi}_5 (c_{64}^{23} c_{65}^{33} - c_{64}^{33} c_{65}^{23})) - \mathbf{j}_6(d_6 \dot{\varphi}_5 (c_{64}^{13} c_{65}^{33} - c_{64}^{33} c_{65}^{13})) + \mathbf{k}_6(d_6 \dot{\varphi}_5 (c_{64}^{13} c_{65}^{23} - c_{64}^{23} c_{65}^{13})), \\ \boldsymbol{\omega}_6 \times \mathbf{d}_6 &= \mathbf{0}, \quad \text{так как векторы коллинеарны.} \end{aligned}$$

Проектирование векторного уравнения (21) на оси системы координат $X_6Y_6Z_6$ с учетом приведенных выше соотношений для векторных произведений дает 3 скалярных уравнения для компонент v_i вектора \mathbf{v} линейной скорости выходного звена манипулятора относительно основания в системе координат $X_0Y_0Z_0$, имеющих вид

$$v_1 = d_2 \dot{\varphi}_1 (c^{23} c_{61}^{33} - c^{33} c_{61}^{23}) + d_3 c_{62}^{13} +$$



$$\begin{aligned}
 &+d_3\dot{\varphi}_1(c^{23}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{23}) + d_3\dot{\varphi}_2(c_{61}^{23}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{23}) + d_6\dot{\varphi}_1(c^{23}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{23}) + \\
 &+d_6\dot{\varphi}_2(c_{61}^{23}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{23}) + d_6\dot{\varphi}_4(c_{63}^{23}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{23}) + d_6\dot{\varphi}_5(c_{64}^{23}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{23}), \\
 &v_2 = -(d_2\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{13})) + \dot{d}_3c_{62}^{23} + \\
 &+d_3\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{13}) + d_3\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{13}) + \\
 &+d_6\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_4(c_{63}^{13}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_5(c_{64}^{13}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{13}), \\
 &v_3 = d_2\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{61}^{23} - c^{23}c_{61}^{13}) + \dot{d}_3c_{62}^{33} + \\
 &+d_3\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{62}^{23} - c^{23}c_{62}^{13}) + d_3\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{62}^{23} - c_{61}^{23}c_{62}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_1(c^{13}c_{65}^{23} - c^{23}c_{65}^{13}) + \\
 &+d_6\dot{\varphi}_2(c_{61}^{13}c_{65}^{23} - c_{61}^{23}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_4(c_{63}^{13}c_{65}^{23} - c_{63}^{23}c_{65}^{13}) + d_6\dot{\varphi}_5(c_{64}^{13}c_{65}^{23} - c_{64}^{23}c_{65}^{13}).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Объединяя соотношения (23) и (25), получим выражения для проекций угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора на связанные с ним координатные оси:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} c^{13} \\ c^{23} \\ c^{33} \\ d_2(c^{23}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{23}) + d_3(c^{23}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c^{23}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_2(c^{13}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{13}) - d_3(c^{13}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c^{13}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{13}) \\ d_2(c^{13}c_{61}^{23} - c^{23}c_{61}^{13}) + d_3(c^{13}c_{62}^{23} - c^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c^{13}c_{65}^{23} - c^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \\
 &+ \dot{\varphi}_2 \begin{pmatrix} c_{61}^{13} \\ c_{61}^{23} \\ c_{61}^{33} \\ d_3(c_{61}^{23}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c_{61}^{23}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{13}) \\ d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{23} - c_{61}^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{23} - c_{61}^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \dot{d}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{62}^{13} \\ c_{62}^{23} \\ c_{62}^{33} \end{pmatrix} + \\
 &+ \dot{\varphi}_4 \begin{pmatrix} c_{63}^{13} \\ c_{63}^{23} \\ c_{63}^{33} \\ d_6(c_{63}^{23}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_6(c_{63}^{13}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{13}) \\ d_6(c_{63}^{13}c_{65}^{23} - c_{63}^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_5 \begin{pmatrix} c_{64}^{13} \\ c_{64}^{23} \\ c_{64}^{33} \\ d_6(c_{64}^{23}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{23}) \\ -d_6(c_{64}^{13}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{13}) \\ d_6(c_{64}^{13}c_{65}^{23} - c_{64}^{23}c_{65}^{13}) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_6 \begin{pmatrix} c_{65}^{13} \\ c_{65}^{23} \\ c_{65}^{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{26}
 \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$A = \|a_{ij}\|, \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= c^{13}, & a_{12} &= c_{61}^{13}, & a_{13} &= 0, & a_{14} &= c_{63}^{13}, & a_{15} &= c_{64}^{13}, & a_{16} &= c_{65}^{13}; \\
 a_{21} &= c^{23}, & a_{22} &= c_{61}^{23}, & a_{23} &= 0, & a_{24} &= c_{63}^{23}, & a_{25} &= c_{64}^{23}, & a_{26} &= c_{65}^{23}; \\
 a_{31} &= c^{33}, & a_{32} &= c_{61}^{33}, & a_{33} &= 0, & a_{34} &= c_{63}^{33}, & a_{35} &= c_{64}^{33}, & a_{36} &= c_{65}^{33}; \\
 a_{41} &= d_2(c^{23}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{23}) + d_3(c^{23}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c^{23}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{23}), \\
 a_{42} &= d_3(c_{61}^{23}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{23}) + d_6(c_{61}^{23}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{23}), & a_{43} &= c_{62}^{13}, \\
 a_{44} &= d_6(c_{63}^{23}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{23}), & a_{45} &= d_6(c_{64}^{23}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{23}), & a_{46} &= 0; \\
 a_{51} &= -d_2(c^{13}c_{61}^{33} - c^{33}c_{61}^{13}) - d_3(c^{13}c_{62}^{33} - c^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c^{13}c_{65}^{33} - c^{33}c_{65}^{13}), \\
 a_{52} &= -d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{33} - c_{61}^{33}c_{62}^{13}) - d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{33} - c_{61}^{33}c_{65}^{13}), & a_{53} &= c_{62}^{23}, \\
 a_{54} &= -d_6(c_{63}^{13}c_{65}^{33} - c_{63}^{33}c_{65}^{13}), & a_{55} &= -d_6(c_{64}^{13}c_{65}^{33} - c_{64}^{33}c_{65}^{13}), & a_{56} &= 0; \\
 a_{61} &= d_2(c^{13}c_{61}^{23} - c^{23}c_{61}^{13}) + d_3(c^{13}c_{62}^{23} - c^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c^{13}c_{65}^{23} - c^{23}c_{65}^{13}), \\
 a_{62} &= d_3(c_{61}^{13}c_{62}^{23} - c_{61}^{23}c_{62}^{13}) + d_6(c_{61}^{13}c_{65}^{23} - c_{61}^{23}c_{65}^{13}), & a_{63} &= c_{62}^{33},
 \end{aligned}$$



$$a_{64} = d_6 (c_{63}^{13} c_{65}^{23} - c_{63}^{23} c_{65}^{13}), \quad a_{65} = d_6 (c_{64}^{13} c_{65}^{23} - c_{64}^{23} c_{65}^{13}), \quad a_{66} = 0.$$

Разрешая уравнение (26) относительно обобщенных скоростей с учетом обозначения (27), получим матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dot{d}_3 & \dot{\varphi}_4 & \dot{\varphi}_5 & \dot{\varphi}_6 \end{pmatrix}^T = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T, \quad (28)$$

где T — символ транспонирования.

Полученные уравнения (28), (27) — кинематические уравнения движения стэнфордского робота-манипулятора. Они представляют собой систему 6 нелинейных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $\varphi_1, \varphi_2, d_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$, являющихся обобщенными координатами манипулятора. Эти уравнения и полученные в п. 2 бикватернионные соотношения будут использованы для решения обратной задачи кинематики с использованием бикватернионной теории кинематического управления [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00165).

Библиографический список

1. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М. : Мир, 1989. 621 с.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия движения. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. 236 с.
3. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 512 с.
4. Челноков Ю. Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 38–58.

Dual Matrix and Biquaternion Methods of Solving Direct and Inverse Kinematics Problems of Manipulators, for Example Stanford Robot Arm. I

E. I. Lomovtseva, Yu. N. Chelnokov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, LomovtsevaEI@yandex.ru, chelnokovyun@info.sgu.ru

The methodology of solving the direct kinematics problem of manipulators by using screw mechanics methods (dual direction cosine matrices, Clifford biquaternions) is shown on the example of Stanford robot arm. Kinematic equations of motion of the manipulator are found. These equations will be used for solving the inverse kinematics problem with the help of biquaternion theory of kinematic control.

Key words: robot-manipulator, direct kinematics problem, dual direction cosine matrix, biquaternion, quaternion, kinematic equations.

References

1. Fu K. S., Gonzalez R. C., Lee C. S. G. *Robotics : Control, Sensing, Vision and Intelligence*. McGraw-Hill, Inc, 1987, 580 p.
2. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozhenija. Geometrija dvizhenija* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry of Motion]. Saratov, Izd-vo Saratov. Univ., 2006, 236 p. (in Russian).
3. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozhenija. Geometrija i kinematika dvizhenija* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry and Kinematics of Motion] Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).
4. Chelnokov Yu. N. Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics. *Mechanics of Solids* [Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela], 2013, vol. 48, no. 1. pp. 31–46.