



УДК 539.3+539.214

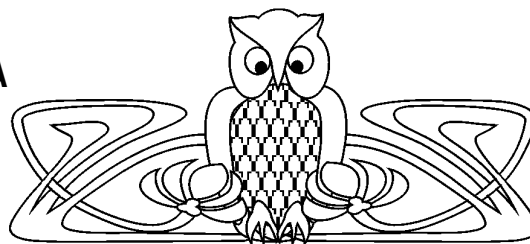
ОДНОМЕРНАЯ АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ ПО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

А.А. Манцыбора, К.Т. Семенов

Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток,
лаборатория механики деформируемого твердого тела
E-mail: manzubor@iacp.dvo.ru

Решена одномерная автомодельная задача ударного деформирования упругопластического полупространства жестким телом с плоской границей. Представлен случай, когда необратимые деформации накапливаются внутри простых волн Римана. Приведено решение с возможной волновой картиной, когда возмущение в среде распространяется посредством двух упругих ударных волн и одной пластической централизованной волны.

Ключевые слова: упругость, пластичность.



**One-Demential Automodel Problem about Impact of Rigid Body
with Elastoplastic Half-Space**

A.A. Mantsybora, K.T. Semenov

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok,
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics
E-mail: manzubor@iacp.dvo.ru

The one-demential automodel problem about impact of rigid body with elastoplastic half-space is considered. In the case of plastic deformation is accumulated inside Riman simple wave is presented. The solution with a possible wave picture, when perturbation in the environment propagate by means of two elastic waves and one plastic simple wave, is shown.

Key words: elastic, plastic.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов распространения упругопластических деформаций было начато еще в середине прошлого века. По-видимому, первой работой, посвященной теоретическому рассмотрению данной проблематики, была работа Х.А. Рахматулина [1]. В работах Хилла и Томаса [2, 3] для рассмотрения одномерных волн использовалась идея Адамара, рассмотрения волн, как поверхностей разрывов. Мандель [4] получил, что скорости распространения пластических волн не превышают скорости распространения упругих волн. В работах Блейха с соавторами [5, 6] рассмотрены автомодельные задачи, в условиях плоской деформации при условии пластичности Мизеса. Отражение сдвиговой волны в двумерной постановке изучалось в [7], рассмотренное далее для различных сред в [8]. В работе Г.И. Быковцева и Л.Д. Кретовой [9] при помощи дополнительной гипотезы о максимальной диссипации энергии на разрыве была получена система уравнений сильного разрыва для упругопластической среды, также были найдены скорости распространения упругопластических ударных волн при условии пластичности Мизеса и Треска – Сен-Венана. Дальнейшее изучение условий существования поверхностей разрывов необратимых деформаций было произведено в [10]. Наиболее близкие к теме данной работы вопросы плоского деформирования упругопластической среды под воздействием подвижных нагрузок рассматривались в [11].

В данной работе на примере одномерной автомодельной задачи о разгрузке упругопластического полупространства рассматриваются процессы распространения возмущений в упругопластической среде. Отличительной особенностью настоящей публикации является то, что материал считается пластически сжимаемым, это обеспечивается выбором поверхности нагружения в форме пирамиды Кулона – Мора, основанием которой в плоскости, параллельной девиаторной, является шестиугольник Ишлинского – Ивлева.

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Положим, что процесс упругопластического деформирования среды можно описать в рамках малых деформаций, т.е. полные деформации определяются следующими соотношениями:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j}) = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (1.1)$$



где e_{ij}^e и e_{ij}^p являются компонентами тензора упругих и пластических деформаций соответственно; u_i — компоненты вектора перемещений. Запятая после переменной означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате: $u_{i,j} = \partial u / \partial x_j$.

Напряжения связаны с упругими деформациями посредством закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad (1.2)$$

здесь и далее везде по повторяющимся индексам ведется суммирование; λ и μ — параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера.

Динамические изменения в среде в процессе деформирования описываются законом сохранения импульса, который в случае малых деформаций принимает следующий вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \chi_i = \rho v_i, \quad (1.3)$$

где ρ — плотность среды; χ_i — плотности распределения массовых сил (в данном случае полагаются равными нулю); v_i — компоненты скорости перемещений точек среды ($v_i = \dot{u}_i$). Точкой обозначается частная производная по времени ($\dot{u} = \partial u / \partial t$).

При достижении напряженными состояниями поверхности нагружения

$$f^{(s)}(\sigma_{ij}) = k, \quad k = \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

в деформируемой среде возможны три состояния: элемент может перейти в состояние пластического деформирования; элемент может перейти в состояние упругого деформирования; элемент может остаться в предельном упругом состоянии (нейтральное нагружение). Постоянная k — это предел текучести.

Принимая принцип максимума Мизеса (при этом соотношения (1.4) становятся пластическим потенциалом), для скорости пластического деформирования, согласно ассоциированному закону пластического течения, можем записать:

$$\varepsilon_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p = \sum_{s=1}^n \Psi_s \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.5)$$

где $\Psi_s > 0$ при $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$, $\Psi_s = 0$ при $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0$.

Дифференцируя соотношения (1.2) по времени и исключая из соотношений упругие деформации, получим:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda (v_{k,k} - \varepsilon_{kk}^p) \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) - 2\mu \varepsilon_{kk}^p. \quad (1.6)$$

Соотношения (1.3), (1.4)–(1.6) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую динамическое деформирование идеального упругопластического тела в областях, где напряжения и скорости перемещений непрерывны.

2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ОДНОМЕРНОГО АВТОМОДЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассматривая одномерную задачу, положим, что компоненты вектора перемещения зависят только от одной пространственной переменной x_1 и момента времени t имеют вид

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_1, t), \quad u_3 = 0. \quad (2.1)$$

Соотношения (1.1)–(2.1) определяют систему дифференциальных уравнений в частных производных. До настоящего времени не разработано приемов построения обобщенных аналитических решения для подобных систем в общем случае. Наиболее простыми решениями подобных систем уравнений являются автомодельные решения, которые строятся путем замены нескольких переменных (x_i, t)



одной автомодельной переменной. В данном одномерном случае введем автомодельную переменную следующего вида:

$$\xi = \frac{x_1}{c_1 t}, \quad (2.2)$$

где $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, и положим, что компоненты вектора перемещения выражаются зависимостями

$$u_1 = c_1 t w(\xi), \quad u_2 = c_1 t z(\xi), \quad u_3 = 0, \quad (2.3)$$

где w и z — компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве ξ .

Отметим, что согласно соотношениям (2.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= w', & v_1 &= \dot{u}_1 = c_1(w - w'\xi), \\ u_{2,1} &= z', & v_2 &= \dot{u}_2 = c_1(z - z'\xi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим плоскую деформацию упругопластической среды, тогда $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$. Это возможно, если σ_{33} является главным напряжением. Тогда для главных напряжений, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Примем в качестве условия пластичности пирамиду Ишлинского – Ивлева:

$$\max_i |\sigma_i - \sigma| + q\sigma = \frac{2}{3}k. \quad (2.6)$$

Приведем соотношения для случая, когда условие пластичности выполняется на одной из граней пирамиды

$$\frac{(q+2)}{2}\sigma_1 + \frac{(q-1)}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = k, \quad (2.7)$$

где $\sigma = \sigma_i/3$, q — константа, отвечающая за пластическую сжимаемость материала.

Соотношению (2.7) можно удовлетворить, положив

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2} r \cos(\theta) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \frac{r+p}{2q+1}, \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{2} r \cos(\theta) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \frac{r+p}{2q+1}, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2} r \sin(\theta), & \sigma_{33} &= \frac{3p}{2(q-1)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где r , p и θ являются функциями от ξ .

Используя выражения (2.7)–(2.8) в уравнениях (1.5), получим, что компоненты тензора скоростей пластических деформаций выражаются зависимостями

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^p &= \frac{1}{4} \Psi (2q+1 + 3\cos(\theta)), & \epsilon_{22}^p &= \frac{1}{4} \Psi (2q+1 - 3\cos(\theta)), \\ \epsilon_{33}^p &= \frac{q-1}{2} \Psi, & \epsilon_{12}^p &= \frac{3}{2} \Psi \sin(\theta). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.3), (2.8) и (2.9) в соотношения (1.3) и (1.6), окончательно получим значения для Ψ :

$$\Psi = \frac{x_1 (3p' - 2\lambda(q-1) w'')}{t^2 c_1 (3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu)} \quad (2.10)$$

и следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A_{i1} r' + A_{i2} p' + A_{i3} \theta' + A_{i4} w'' + A_{i5} z'' = 0, \quad (2.11)$$



где $i = 1..5$, а штрихом обозначается производная функции по ξ . Коэффициенты A_{ij} являются функциями от r , θ и констант материала.

Перепишем систему (2.11) в безразмерном виде, поделив для этого все уравнения системы на $(\lambda + 2\mu)$ и введя новые функции $r_n = r/(\lambda + 2\mu)$ и $p_n = p/(\lambda + 2\mu)$. При этом получим новую систему соотношений

$$B_{i1} r'_n + B_{i2} p'_n + B_{i3} \theta' + B_{i4} w'' + B_{i5} z'' = 0. \quad (2.12)$$

В (2.12) введены обозначения

$$\begin{aligned} B_{11} &= 1/2 \frac{(2 \cos(\theta) q - 3 + \cos(\theta)) \xi}{2q + 1}, & B_{12} &= -1/2 \xi \sin(\theta) r_n, \\ B_{13} &= -9/2 \frac{\xi (\mu + 2\mu q^2 + \mu \cos(\theta) + 3\lambda q^2 + 2\mu q \cos(\theta))}{(2q + 1) (3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu)}, \\ B_{14} &= -\frac{\mu \xi (6\lambda q + 4\mu q - 3\lambda - 4\mu - 3\lambda \cos(\theta))}{(\lambda + 2\mu) (3\lambda q + 2\mu q - 2\mu)}, & B_{15} &= 0, \\ B_{21} &= -1/2 \frac{(2 \cos(\theta) q + \cos(\theta) + 3) \xi}{2q + 1}, & B_{22} &= 1/2 \xi \sin(\theta) r_n, \\ B_{23} &= -9/2 \frac{\xi (\mu + 2\mu q^2 - \mu \cos(\theta) + 3\lambda q^2 - 2\mu q \cos(\theta))}{(2q + 1) (3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu)}, \\ B_{24} &= -3 \frac{\lambda \mu \xi (-1 + \cos(\theta))}{(\lambda + 2\mu) (3\lambda q + 2\mu q - 2\mu)}, & B_{25} &= 0, & B_{31} &= 1/2 \xi \sin(\theta), \\ B_{32} &= 1/2 \xi r_n \cos(\theta), & B_{33} &= -9 \frac{\xi \mu \sin(\theta)}{3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu}, \\ B_{34} &= 6 \frac{\lambda \mu \xi \sin(\theta)}{(\lambda + 2\mu) (3\lambda q + 2\mu q - 2\mu)}, & B_{35} &= -\frac{\xi \mu}{\lambda + 2\mu}, \\ B_{41} &= 1/2 \frac{2 \cos(\theta) q - 3 + \cos(\theta)}{2q + 1}, & B_{42} &= -1/2 r_n \sin(\theta), \\ B_{43} &= -3/2 (2q + 1)^{-1}, & B_{44} &= -\xi^2, & B_{45} &= 0, \\ B_{51} &= 1/2 \sin(\theta), & B_{52} &= 1/2 r_n \cos(\theta), & B_{53} &= 0, & B_{54} &= 0, & B_{55} &= -\xi^2. \end{aligned}$$

Система (2.12) является однородной, поэтому существование нетривиального решения возможно только при равенстве определителя этой системы нулю. Такое решение описывает слой пластического течения, в котором деформации, напряжения, скорости перемещений точек среды не являются постоянными.

Согласно проведенным численным расчетам, было получено, что возможно два решения, каждое из которых описывает слой пластического течения. Причем большая скорость распространения слоя находится между значениями скоростей безвихревой и эквиволлюмиальной упругими волнами, а меньшая — за скоростью эквиволлюмиальной упругой волны.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УДАРЕ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассмотрим задачу об ударе жестким телом по упругопластическому полупространству. Выберем систему координат таким образом, что ось x_2 будет направлена по границе полупространства, а ось x_1 направим в глубь тела по направлению нормали к границе (рис. 1). Среда предполагается изначально равномерно нагруженной при $x_1 > 0$ $\sigma_{ij} = \text{const}$. Далее происходит удар по границе $x_1 = 0$ соответственно на границе мгновен-

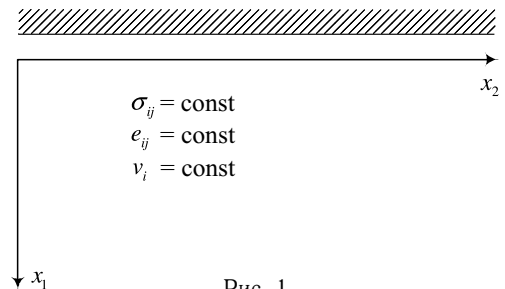


Рис. 1

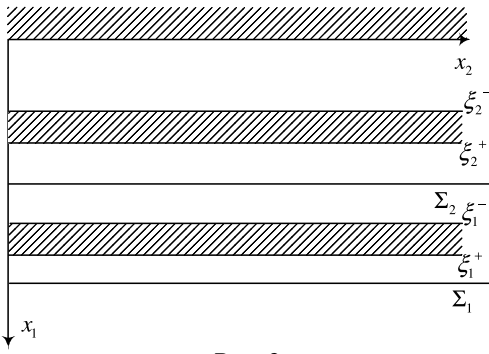


Рис. 2

здесь w — интенсивность безвихревой волны, n_i — компоненты вектора нормали к поверхности волны, G_1 — скорость распространения волны, $[\sigma_{ij}]$ и $[v_i]$ — скачки величин σ_{ij} и v_i соответственно.

Скорость движения другой волны совпадает со скоростью распространения эквиволумиальной волны, где выполняются следующие равенства:

$$G_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad [v_i]n_i = 0, \quad -G_2[\sigma_{ij}] = \mu([v_i]n_j + [v_j]n_i). \quad (3.2)$$

Изменение пластических деформаций будет осуществляться, как было показано ранее, посредством простых волн Римана, т.е. в некотором слое, на рис. 2 это области $(\xi_1^+; \xi_1^-)$ и $(\xi_2^+; \xi_2^-)$. Согласно полученным результатам, возможны две простые волны: одна из них располагается между безвихревой и эквиволумиальной ударными волнами $(\xi_1^+; \xi_1^-)$, а другая — между эквиволумиальной ударной волной и границей упругопластического полупространства $(\xi_2^+; \xi_2^-)$. В процессе решения конкретной краевой задачи возможны случаи, когда одновременно существует два слоя с пластическими деформациями или только один (в зависимости от выполнения условия пластичности в соответствующей области).

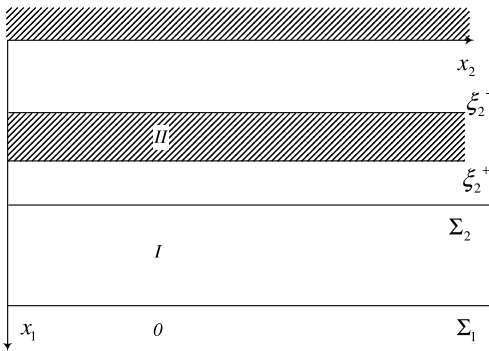


Рис. 3

Приведем пример, когда пластическое течение возникает в одном слое, расположенном между эквиволумиальной ударной волной и границей полупространства (рис. 3).

Данный случай реализован при следующих начальных и краевых условиях:

$$\lambda = 38.7 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \mu = 34.8 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad q = 0.05, \quad k = 0.774 \cdot 10^3 \text{ МПа}. \quad (3.3)$$

До начала ударного воздействия на границу предварительное деформированное состояние тела определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} e_{11}^{e(0)} &= 0, & e_{22}^{e(0)} &= -0.016004, & e_{12}^{e(0)} &= 0, \\ e_{33}^{e(0)} &= -0.027359, & e_{11}^{p(0)} &= -0.15152, & e_{12}^{p(0)} &= -0.17361. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь и далее по тексту цифра в скобках при деформациях обозначает область на волновой картине (например, см. рис. 3), к которой относятся данные деформации. При этом везде в силу соотношений (2.1) $e_{22}^e = -e_{22}^p$ и $e_{33}^e = -e_{33}^p$.

Положим, что в начальный момент времени граница тела ($x_1 = 0$) начинает подвергаться нагружению, вследствие чего деформации на границе начинают удовлетворять следующим равенствам:

$$\begin{aligned} e_{11}^e|_{x_1=0} &= -0.01, & e_{22}^e|_{x_1=0} &= -0.014, \\ e_{12}^e|_{x_1=0} &= 0.063984, & e_{33}^e|_{x_1=0} &= -0.02, \\ e_{11}^p|_{x_1=0} &= -0.141, & e_{12}^p|_{x_1=0} &= -0.155. \end{aligned} \quad (3.5)$$



В условиях (3.4) и (3.5) реализуется волновая картина упругопластического деформирования (см. рис. 3), состоящая из ударных волн Σ_1 , Σ_2 и простой волны (слой между ξ_2^- и ξ_2^+). На упругой волне Σ_1 скачком изменяются только e_{11}^e и соответственно $u_{1,1}$, остальные деформации остаются без изменения. При этом $e_{11}^{e+} = e_{11}^{e(0)}$, а $e_{11}^{e-} = -0.007331$. В области I напряжения не удовлетворяют условию пластичности, соответственно между ударными волнами Σ_1 и Σ_2 деформации и напряжения остаются постоянными. Далее на упругой волне Σ_2 неизменными остаются все упругие деформации, кроме e_{12}^e , при этом $e_{12}^{e+} = e_{12}^{e(0)}$, а $e_{12}^{e-} = 0.0009412$. При данных значениях в области II за ударной волной Σ_2 выполняется условие пластичности (2.6) на одной из граней призмы, а именно равенство (2.7). Это означает, что в данной области строится решение с пластическим слоем, границы которого находим, приравняв нулю определитель системы (2.12).

Ниже представлены графики изменения пластических деформаций на простой волне в области $\xi_2^- \dots \xi_2^+$, т.е. на интервале 0.19798...0.516.

Из графиков (рис. 4, 5) видно, что в пластическом слое $\xi_2^- \dots \xi_2^+$, расположенном за экволюционной ударной волной Σ_2 , пластические деформации e_{12}^p меняются в большей степени, чем e_{11}^p , т.е. данный пластический слой несет в среду в основном изменение формы.

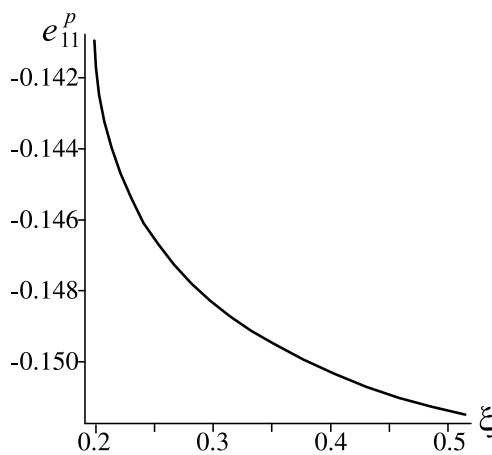


Рис. 4

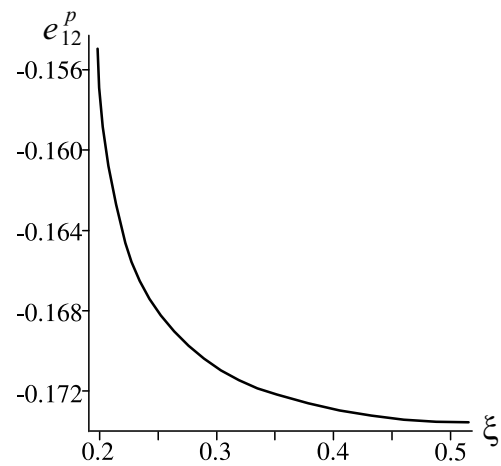


Рис. 5

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00001-а), программы отделения ЭММПУ РАН (проект 09-1-П12-01) и ДВО РАН (проект 09-III-B-03-080).

Библиографический список

1. Рахматулин Х.А. О распространении волны разгрузки // ПММ. 1945. Т. 9, № 1. С. 91–100.
2. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
3. Хилл Р. Соотношения на разрывах в механике деформируемых твердых тел // Механика: Сб. пер. 1963. № 3. С. 117–142.
4. Мандель Д. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика: Сб. пер. 1963. № 5(81). С. 151–179.
5. Блейх Г.Г., Мэтьюз А.Т. Движение со сверхсейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства // Механика: Сб. пер. 1968. № 1 (107). С. 123–155.
6. Блейх Г.Г., Нельсон Дж. Плоские волны в упругопластическом полупространстве, вызванные совмест-
7. Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д. Отражение сдвиговой волны граничной плоскостью, свободной от напряжений // IV Всесоюз. симпозиум по распространению упругих и упругопластических волн: Тез. докл. Кишинев, 1968. С. 18–19.
8. Баскаков В.А., Быковцев Г.И. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде // ПММ. 1971. Т. 35, №1. С. 71–72.
9. Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ППМ. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.
10. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Рычков В.А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо жи-



маемых сред // Проблемы механики сплошной среды (к 60-летию акад. В.П. Мясникова): Сб. науч. тр. Владивосток, 1996. С. 116–127.
11. Быковцев Г.И., Колокольчиков А.В., Сыгуров П.Н.

Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1984. № 6. С. 148–156.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

П.Ф. Недорезов

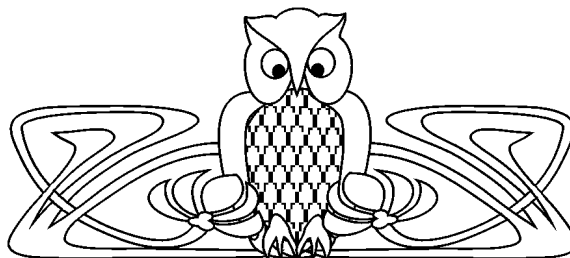
Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: p1934n@yandex.ru

В рамках гипотез Кирхгофа рассматривается задача статического поперечного изгиба тонкой прямоугольной пластинки из анизотропного материала, у которого в каждой точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости пластинки. Предполагается, что вид граничных условий вдоль каждой из сторон контура не меняется.

Двумерная краевая задача для определения прогиба модифицированным методом сплайн-коллокации сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно.

Приведены результаты числовых расчетов для двух вариантов закрепления граничного контура.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, изгиб пластинки, напряженно-деформированное состояние, модифицированный метод сплайн-коллокации.



Numerical Study of Stress-Strain State of a Thin Anisotropic Rectangular Plate

P.F. Nedorezov

Saratov State University,
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics
E-mail: p1934n@yandex.ru

Static bending of a thin rectangular anisotropic plate is considered in the framework of Kirchhoff hypotheses. At each point of the plate there is one plane of elastic symmetry parallel to the middle plane of the plate. It is assumed that the type of boundary conditions does not change along each of the straight sides.

By applying of a modified method of spline collocation the two-dimensional boundary value problem for the determination of deflection is reduced to a boundary value problem for the system of ordinary differential equations, which is solved numerically.

The results of numerical calculations for two variants of the boundary conditions on the contour of the plate are presented.

Key words: anisotropic plate, bending of plate, stress-strain state, modified method of spline collocation.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается статический изгиб прямоугольной пластинки с размерами в плане $a \times b$ и малой толщиной h (рис. 1) под действием поперечной нагрузки интенсивности $q(x, y)$. Пластинка изготовлена из анизотропного материала, у которого в каждой

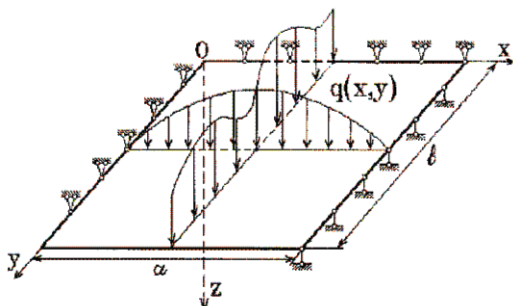


Рис. 1. Анизотропная пластинка

точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Деформации считаются малыми и подчиняются закону Гука.

Уравнение для определения прогиба w точек срединной плоскости такой пластинки в рамках классической теории Кирхгофа приводится в [1]. Это уравнение после перехода к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ и ряда преобразований для безразмерного прогиба $W(\xi, \eta) = w(x, y)/h$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\gamma_2 c \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(\gamma_1 + \gamma_4) c^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 2\gamma_3 c^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi \partial \eta^3} + \gamma_5 c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = q(\xi, \eta)/D_{11}^* \quad (1)$$