



## ВЫВОДЫ

Предложенная процедура расчета может быть использована при моделировании задач продольного удара в стержневых системах.

Точность вычислений тем выше, чем большее количество элементов представляют стержень. В практических вычислениях можно ограничиться количеством элементов для стержня  $n \in (20, \dots, 30)$ .

Преобразование уравнений движения к виду, когда в структуре уравнений представлен параметр — скорость звука в материале стержня, позволяет естественным образом при необходимости сопоставлять результаты с волновой моделью продольного удара.

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК № П 1122).*

## Библиографический список

1. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука, 1985.
2. Манжосов В.К. Продольный удар. Ульяновск, 2007.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977.

УДК 517.984

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

М.В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, Баку,  
кафедра сопротивления материалов  
E-mail: a-mirsalimov@mail.ru

Рассматривается задача механики разрушения для полосы (стержня), ослабленной прямолинейной трещиной с концевыми зонами, находящегося под действием неравномерного температурного поля. Толщина полосы считается переменной. Получено условие предельного состояния полосы.

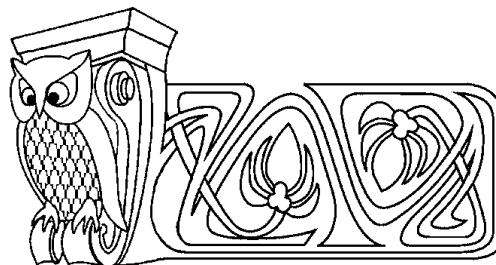
**Ключевые слова:** полоса переменной толщины, силы сцепления, трещина со связями между берегами в концевых зонах, неравномерный нагрев.

## ВВЕДЕНИЕ

Полосы (стержни) переменной толщины широко используются в технике и строительстве. Это вызвано, в частности, тем, что изделия требуемых свойств чаще всего можно получить с помощью варьирования их толщины. В реальных материалах всегда имеются различного рода дефекты типа трещин, развитие которых под действием нагрузки приводит к локальному или полному разрушению. Оценка несущей способности полос переменной толщины при наличии трещин не получила к настоящему времени своего решения. Достижение этой цели будет способствовать обоснованию путей повышения живучести конструкций.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругую однородную изотропную полосу (стержень) переменной толщины, ослабленную одной сквозной прямолинейной трещиной, направленной перпендикулярно к боковым граням полосы. Обозначим через  $2c$  и  $2h$  соответственно ширину и толщину полосы, а через  $2\ell$  — длину трещины с концевыми зонами. Пусть полоса с нецентрально расположенной трещиной подвергается



## The Intense State of the Band of Variable Thickness at Non-Uniform Heating

M.V. Mirsalimov

Azerbaijan Technical University, Baku,  
Chair of the Resistance of Materials  
E-mail: a-mirsalimov@mail.ru

The problem of mechanics of fracture for a band (core) weakened by a rectilinear crack with end zones, a non-uniform temperature field being under action is considered. Thickness of a band is considered a variable. The condition of a limiting condition of a band is received.

**Key words:** variable-thickness band, cohesive forces, crack with interfacial bonds, non-uniform heating.



неравномерному нагреву по ширине поперечного сечения. Будем считать, что температура является функцией  $x$  и не зависит от других координат.

При рассмотрении такой задачи будем использовать прямолинейную систему декартовых координат  $xOy$ , считая, что декартовы координаты  $x, y$  в срединной плоскости полосы являются плоскостью симметрии, и в плоскости  $xOy$  трещина расположена вдоль оси  $Ox$  при  $a \leq x \leq b$ , где  $a, b$  — абсциссы концов трещины (длина трещины  $2\ell = b - a$ ).

Рассматривается модель трещины со связями (силы сцепления), непрерывно распределенными в узкой концевой зоне трещины и имеющими заданную диаграмму деформирования. При этом силы сцепления (связи) сосредоточены в некоторой узкой концевой зоне, размер которой заранее неизвестен и должен быть определен из решения задачи. Принято, что процесс разрушения локализован в концевой зоне, которая рассматривается как часть трещины и сравнима с размером трещины.

Полоса переменной толщины с трещиной при неравномерном нагреве находится в обобщенном плосконапряженном состоянии. Выделим части трещины  $d_1$  и  $d_2$  (концевые зоны), в которых берега трещины взаимодействуют. Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется путем введения между берегами трещины связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры концевых зон зависят от вида материала.

Под действием неравномерного нагрева в связях, соединяющих берега трещин в концевых зонах, будут возникать нормальные  $q_y(x)$  и касательные  $q_{xy}(x)$  усилия. Величины этих усилий заранее неизвестны и подлежат определению. Так как концевые зоны трещины малы по сравнению с остальной частью упругой полосы, то их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Следовательно, к берегам трещины в концевых зонах будут приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные  $q_y(x)$  и  $q_{xy}(x)$  соответственно.

Полагаем, что толщина полосы  $2h(x, y)$  удовлетворяет условиям  $0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2$ , где  $h_1$  и  $h_2$  — наименьшее и наибольшее значение толщины полосы соответственно.

Функция толщины может быть представлена в виде [1]

$$h(x, y) = h_0(1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)),$$

где  $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ ,  $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$  — малый параметр,  $\bar{h}(x, y)$  — некоторая безразмерная непрерывная функция ( $-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$ ). При заданном законе изменения толщины  $\varepsilon$  будет постоянным.

Грани полосы, перпендикулярные плоскости  $xOy$ , приняты свободными от внешних напряжений. Берега трещины во вне концевых зонах свободны от внешних нагрузок.

Уравнения статического деформирования полосы переменной толщины имеют вид [1, 2]:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0,$$

– закон Гука

$$N_x = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1 + \nu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

где  $N_x, N_y, N_{xy}$  — нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины;  $u, v$  — компоненты вектора перемещений;  $E$  — модуль упругости Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала полосы.

Граничные условия задачи на берегах трещины с концевыми зонами имеют вид

$$\begin{aligned} N_y(x, 0) - iN_{xy}(x, 0) &= 0 && \text{— на берегах трещины,} \\ N_y(x, 0) - iN_{xy}(x, 0) &= q_y(x) - iq_{xy}(x) && \text{— на берегах концевых зон трещины.} \end{aligned}$$

Основные уравнения задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие трещины и усилия в связях, которые представим в виде [3, 4]

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = C(x, \sigma)(q_y(x) - iq_{xy}(x)). \quad (1)$$



Здесь функцию  $C(x, \sigma)$  можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения,  $(v^+ - v^-)$  и  $(u^+ - u^-)$  — соответственно нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов концевой зоны,  $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$  — модуль вектора усилий в связях,  $i = \sqrt{-1}$ .

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение системы уравнений статического деформирования полосы ищем в виде

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \dots, & N_y &= N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \dots, & N_{xy} &= N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, & a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, & b &= b_0 + \varepsilon b_1 + \dots, \\ q_y &= q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \dots, & q_{xy} &= q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Используем процедуру метода возмущений. В результате находим, что уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости с объемной силой

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}, \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \quad (2)$$

Аналогично определяются составляющие  $X_2, Y_2$  объемной силы для второго и последующих приближений.

Краевые условия задачи принимают вид

– для нулевого приближения

$$\begin{aligned} N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} &= 0 && \text{— вне концевых зон трещины,} \\ N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} &= q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} && \text{— на берегах концевых зон трещины;} \end{aligned} \quad (3)$$

– для первого приближения

$$\begin{aligned} N_y^* - iN_{xy}^* &= 0 && \text{— вне концевых зон трещины,} \\ N_y^* - iN_{xy}^* &= -\bar{h}(x, 0)(q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}) + q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)} && \text{— на берегах концевых зон трещины.} \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе уравнений первого приближения были приняты обозначения

$$\begin{aligned} N_x^* &= N_x^{(1)} - N_{x_0}^{(1)}, & N_{x_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}, & N_y^* &= N_y^{(1)} - N_{y_0}^{(1)}, & N_{y_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}, \\ N_{xy}^* &= N_{xy}^{(1)} - N_{xy_0}^{(1)}, & N_{xy_0}^{(1)} &= \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}. \end{aligned}$$

Применяя метод возмущений к дополнительному соотношению (1), получим:

– для нулевого приближения

$$(v_0^+ - v_0^-) - i(u_0^+ - u_0^-) = C(x, \sigma_0)(q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x)) \quad (5)$$

– для первого приближения

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = C(x, \sigma_1)(q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x)). \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_j = \sqrt{(q_y^{(j)})^2 + (q_{xy}^{(j)})^2}$  ( $j = 0, 1$ ).

Напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины определяем приближенно в том смысле [5], что будем удовлетворять граничным условиям задачи на контуре трещины (условиям (3)–(4)) и требовать, чтобы на значительном расстоянии от трещины напряженное состояние в полосе совпадало с термонапряженным состоянием, вызванным неравномерным нагревом для сплошной (бездефектной) полосы.

Рассмотрим решение для нулевого приближения. Представим напряженное состояние в нулевом приближении в виде

$$N_x^{(0)} = N_{xT}^{(0)} + N_{x1}^{(0)}, \quad N_y^{(0)} = N_{yT}^{(0)} + N_{y1}^{(0)}, \quad N_{xy}^{(0)} = N_{xyT}^{(0)} + N_{xy1}^{(0)}. \quad (7)$$



Здесь  $N_{x_T}^{(0)}$ ,  $N_{y_T}^{(0)}$ ,  $N_{xy_T}^{(0)}$  — соответственно нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины в сплошной полосе и вызванные неравномерным нагревом;  $N_{x_1}^{(0)}$ ,  $N_{y_1}^{(0)}$ ,  $N_{xy_1}^{(0)}$  — соответственно нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины, вызванные наличием трещины со связями между берегами в концевых зонах.

Для температурных усилий  $N_{x_T}^{(0)}$ ,  $N_{y_T}^{(0)}$ ,  $N_{xy_T}^{(0)}$  имеем

$$\frac{N_{y_T}^{(0)}}{2h_0} = -\alpha ET(x) + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \alpha ET(x) dx + \frac{3x}{2c^3} \int_{-c}^c \alpha ET(x)x dx, \quad N_{x_T}^{(0)} = 0, \quad N_{xy_T}^{(0)} = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения материала полосы;  $T(x)$  — температурная функция.

С учетом (7) и (8) граничные условия (3) примут вид

$$\begin{aligned} N_{y_1}^{(0)} &= -N_{y_T}^{(0)}, & N_{xy_1}^{(0)} &= 0 & \text{— на свободных берегах трещины,} \\ N_{y_1}^{(0)} &= q_y^{(0)} - N_{y_T}^{(0)}, & N_{xy_1}^{(0)} &= q_{xy}^{(0)} & \text{— на берегах концевых зон трещины.} \end{aligned}$$

Компоненты усилий  $N_{x_1}^{(0)}$ ,  $N_{y_1}^{(0)}$ ,  $N_{xy_1}^{(0)}$  в условиях плоской задачи теории упругости выражаются через две аналитические функции

$$\frac{N_{x_1}^{(0)} + N_{y_1}^{(0)}}{2h_0} = 2 \operatorname{Re}(\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}), \quad \frac{N_{y_1}^{(0)} - N_{x_1}^{(0)} + 2iN_{xy_1}^{(0)}}{2h_0} = 2(\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)). \quad (9)$$

Для определения комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  нулевого приближения получим граничную задачу:

$$\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\overline{\Phi_0'(x)} + \overline{\Psi_0(x)} = f(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0, \quad (10)$$

где  $f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{— на свободных берегах трещины,} \\ q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} + f_0(x) & \text{— на берегах концевых зон трещины,} \end{cases}$

$$f_0(x) = \alpha ET(x) - \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \alpha ET(x) dx - \frac{3x}{2c^3} \int_{-c}^c \alpha ET(x)x dx.$$

Решение краевой задачи (10) получим сведением к задаче линейного сопряжения [5]

$$\Phi_0(z) = \frac{\sqrt{(z-a_0)(z-b_0)}}{2\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a_0)(t-b_0)(t-z)}}, \quad (11)$$

$$\Psi_0(z) = -z\Phi_0'(z).$$

Здесь  $\sqrt{(z-a_0)(z-b_0)} = z + O(1/z)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу разреза.

Согласно поведению функции  $\Phi_0(z)$  условие разрешимости краевой задачи имеет вид

$$\int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(b_0-t)(t-a_0)}} = 0, \quad \int_{a_0}^{b_0} \frac{tf(t) dt}{\sqrt{(b_0-t)(t-a_0)}} = 0.$$

Эти соотношения служат для нахождения неизвестных параметров, определяющих размеры концевых зон трещины. Для окончательного определения потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  необходимо еще найти усилия в концевых зонах трещины.

Для определения функции  $q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x)$  рассмотрим формулу

$$2\mu \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + i \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = k_0 \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} - z\overline{\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0(z)} + \beta f(z),$$



где  $k_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $\beta = \alpha E/(1 + \nu)$ ,  $T = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $\mu$  — модуль сдвига материала, выражение  $2\mu(u_0^* + iv_0^*) = \beta \int f(z) dz$  представляет собой смещения точек полосы, вызванные неравномерным нагревом бездефектной полосы.

Рассмотрим также сопряженную ей формулу и, осуществляя предельный переход на контур трещины при  $y = \pm 0$ , получим после некоторых преобразований соотношение

$$2\mu i \frac{\partial}{\partial x} (v_0^+ - v_0^- - i(u_0^+ - u_0^-)) = (1 + k_0)(\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)), \quad (12)$$

где  $x$  — аффикс точек контура трещины.

Используя формулы Сохоцкого – Племеля [5] и учитывая соотношение (11), находим

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \sqrt{(x - a_0)(b_0 - x)} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t - a_0)(b_0 - t)(t - x)}} \right]. \quad (13)$$

Теперь выражение (13) подставим в уравнение (12) и учитывая, что на участках концевых зон трещины имеет место соотношение (5), получим для определения неизвестных усилий  $q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}$  комплексное нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение:

$$-\frac{1 + k_0}{2\mu\pi} \sqrt{(x - a_0)(b_0 - x)} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t - a_0)(b_0 - t)(t - x)}} = \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma_0)(q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x))]. \quad (14)$$

Так как  $T = T(x)$  в нулевом приближении имеем  $q_{xy}^{(0)}(x) = 0$ .

Для решения интегродифференциального уравнения (14) используем коллокационную схему с аппроксимацией неизвестных функций. Интеграл в (14) заменяется конечной суммой, а производные в правой части — конечно-разностными аппроксимациями. В результате интегродифференциальное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений относительно приближенных значений  $q_y^{(0)}(x)$  в узловых точках.

Из-за неизвестных размеров концевых зон трещины, даже в частном случае линейно-упругих связей, полученная система уравнений является нелинейной. Для ее решения в случае линейных связей использовали метод последовательных приближений. Для нахождения неизвестных усилий в концевых зонах трещины в случае нелинейного закона деформирования связей использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [6]. Расчет эффективной податливости связей проводился подобно нахождению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [7]. Принималось, что процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия в концевых зонах трещины, полученные на двух последовательных шагах, мало отличаются друг от друга. Алгебраическая система в каждом приближении решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента.

Перейдем теперь к решению задачи (4) первого приближения. По формулам (2) находим компоненты объемной силы в первом приближении. При наличии объемных сил решение представляется в виде суммы

$$N_x^* = N_{x_*}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{y_*}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy_*}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где  $N_{x_*}^{(1)}$ ,  $N_{y_*}^{(1)}$ ,  $N_{xy_*}^{(1)}$  — частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемной силы (2),  $N_{x_1}^{(1)}$ ,  $N_{y_1}^{(1)}$ ,  $N_{xy_1}^{(1)}$  — общее решение уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил.

Используя метод А.Г. Угодчикова [8] для усилий в первом приближении, имеем общие представления

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1(z) - \frac{1}{2(1 + k_0)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right],$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left[ \bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) + \frac{1}{2(1 + k_0)} \frac{\partial}{\partial z} (k_0 \bar{F}_1 - \bar{Q}_1) \right].$$

В эти представления входят две аналитические функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  и две функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$ , представляющие собой частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}, \quad F = X_1 + iY_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}).$$



Для определения комплексных потенциалов  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  первого приближения имеем следующую граничную задачу:

$$\Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + x\overline{\Phi_1'(x)} + \overline{\Psi_1(x)} = f_1(x), \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (15)$$

где  $f_1(x) = \begin{cases} f_0^*(x) & \text{— вне концевых зон трещины,} \\ -\bar{h}(q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}) + q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)} + f_0^*(x) & \text{— на берегах концевых зон трещины,} \end{cases}$

$$f_0^*(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

$$g_1(x) = \frac{1}{(1+k_0)} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+k_0)} \left( k_0 \frac{\partial \overline{F_1}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{Q_1}}{\partial z} \right) \quad \text{при } y=0, \quad (16)$$

$$g_2(x) = -\frac{2h_0}{F_0} \int_{-c}^c \alpha ET(x) \bar{h}(x) dx + \frac{2h_0 x}{I_z} \int_{-c}^c \alpha ET(x) \bar{h}(x) x dx,$$

$F_0$  — площадь поперечного сечения полосы (стержня),  $I_z$  — момент инерции сечения относительно оси  $Oz$ .

Функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$  можно формально записать в виде

$$F_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz. \quad (17)$$

Решение граничной задачи (15) может быть получено сведением к задаче линейного сопряжения:

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)(t-z)}}, \quad \Omega_1(z) = \Phi_1(z). \quad (18)$$

Размеры концевых зон в первом приближении определяются из условия разрешимости краевой задачи:

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}} = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} \frac{t f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-b_1)}} = 0.$$

В полученные соотношения входят неизвестные усилия  $q_y^{(1)}$  и  $q_{xy}^{(1)}$  в концевых зонах трещины в первом приближении. Для их определения используем дополнительное условие (6). Используя решение (18), находим раскрытие между берегами в концевых зонах в первом приближении. Для определения усилий  $q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)}$  в связях в первом приближении получаем комплексное нелинейное интегродифференциальное уравнение:

$$-\frac{1+k_0}{2\mu\pi} \sqrt{(x-a_1)(b_1-x)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a_1)(b_1-t)(t-x)}} = \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma_1)(q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x))].$$

После некоторых преобразований получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $q_y^{(1)}$  и  $q_{xy}^{(1)}$ :

$$-\frac{1+k_0}{2\pi\mu} \sqrt{(b_1-x)(x-a_1)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1^*(t) dt}{\sqrt{(b_1-t)(t-a_1)(t-x)}} = \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma_1)q_y^{(1)}(x)],$$

$$-\frac{1+k_0}{2\pi\mu} \sqrt{(b_1-x)(x-a_1)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1^{**}(t) dt}{\sqrt{(b_1-t)(t-a_1)(t-x)}} = \frac{\partial}{\partial x} [C(x, \sigma_1)q_{xy}^{(1)}(x)],$$

где  $f_1^*(t) = \operatorname{Re} f_1(t)$ ,  $f_1^{**}(t) = \operatorname{Im} f_1(t)$ .



Каждое из уравнений представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа Коши и может быть решено только численно.

Для определения распределения усилий и размеров концевых зон трещины задается закон изменения толщины в полосе. Функцию  $h(x, y)$  разложим в ряд Тейлора в начале координат и в этом разложении ограничимся, для простоты, двумя членами разложения:

$$h(x, y) = h_0(1 + \varepsilon(a_*x + b_*y)),$$

где  $2h_0$  — толщина полосы в начале координат,  $a_*$  и  $b_*$  — некоторые коэффициенты.

В этом случае выражения для составляющих объемной силы в первом приближении примут вид

$$X_1 = a_*N_x^{(0)} + b_*N_{xy}^{(0)}, \quad Y_1 = a_*N_{xy}^{(0)} + b_*N_y^{(0)}.$$

С помощью формул (9) находятся компоненты усилий  $N_x^{(0)}$ ,  $N_y^{(0)}$ ,  $N_{xy}^{(0)}$ . Затем по формулам (2) находим функцию  $F = X_1 + iY_1$ .

С помощью интегрирования уравнений (17) находим функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$ . По найденным функциям  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$  согласно (16) находим функцию  $g_1(x)$ . Затем по полученным формулам (18) находим решение краевой задачи в первом приближении. При этом алгебраизация интегродифференциальных уравнений проводилась аналогично нулевому приближению.

Для определения предельного состояния полосы, при котором начинает расти трещина, используем критерий критического раскрытия берегов трещины. Принимаем, что разрыв связей на краю концевой зоны ( $x_0 = \lambda_k$ ,  $d_1 = \lambda_1 - a$ ,  $d_2 = b - \lambda_2$ ) происходит при выполнении условия

$$\sqrt{(v^+(x_0, 0) - v^-(x_0, 0))^2 + (u^+(x_0, 0) - u^-(x_0, 0))^2} = \delta_c,$$

где  $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала развитию трещины.

Используя полученное решение и учитывая соотношение (1), предельное условие можно записать также в виде

$$C(x_0, \sigma(x_0))\sigma(x_0) = \delta_c,$$

где  $x_0 = \lambda_1$  — для левой концевой зоны и  $x_0 = \lambda_2$  — для правой концевой зоны,  $\sigma(x_0) = \sigma_0(x_0) + \varepsilon\sigma_1(x_0)$ . Совместное решение полученных уравнений дает возможность (при заданных характеристиках связей) найти критическую тепловую нагрузку, размеры концевых зон для предельно-равновесного состояния вершины трещины.

Анализ предельно-равновесного состояния полосы переменной толщины при наличии трещины со связями в концевых зонах и действии тепловой нагрузки сводится к параметрическому исследованию решения полученных алгебраических систем уравнений при различных законах деформирования связей, упругих и геометрических характеристиках полосы.

### Библиографический список

1. Мирсалимов М.В. Решение задачи механики разрушения для полосы переменной толщины // Известия ТУЛГУ. Сер. Актуальные вопросы механики. 2006. Т. 1, вып. 2. С. 241–247.
2. Мирсалимов М.В. Контактное взаимодействие берегов трещины при изгибе полосы переменной толщины // Механика машин, механизмов и материалов. 2007. № 1. С. 56–59.
3. Гаджиев В.Д., Мирсалимов М.В. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // Оптимальное проектирование механических систем. Баку: ЭЛМ, 1999. С. 50–63.
4. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
6. Ильюшин А.А. Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
7. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 113–119.
8. Угодчиков А.Г. К решению плоской задачи теории упругости при произвольных объемных силах // Прикладная механика. 1967. № 7. С. 123–132.