



Аналогично получаются оценки для остальных частных производных. Эти утверждения останутся справедливыми, если считать, что интерполяционное условие (2) задается в вершине любого по величине угла в треугольнике. Сравнивая результаты с утверждением теоремы 1, видно, что теорема 1 является следствием теоремы 2.

Замечание. Неравенства (3) являются точными по порядку в следующем смысле. Пусть $0 < x_0 < 1$, T — треугольник с вершинами $A_1(0, b)$, $A_2(x_0, 0)$, $A_3(0, a)$; $b < 0$, $d = a + |b|$, $0 < a \leq |b|$, Q — сплайн третьей степени для функции $f(x, y) = |y|^4$, удовлетворяющий интерполяционным условиям (1) и $\frac{\partial^2 Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ik}} = \frac{\partial^2 f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ik}} (i, j, k = \overline{1, 3}, i \neq j \neq k)$. Тогда для производных по направлениям сторон треугольника справедливы двусторонние оценки:

$$\frac{1}{96} M_4 d^{4-n} \leq \sup_{x \in T} \left| \frac{\partial^n (Q - f)}{\partial \mathbf{e}_{ij}^k \partial \mathbf{e}_{ik}^{n-k}} \right| \leq 2 M_4 d^{4-n}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность С.Ф. Лукомскому за постановку задачи и внимание к работе.

Библиографический список

1. Байдакова Н.В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type // Math. Comp. 1995. V. 64, № 211. P. 929–941.
3. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики. Тео-

- рия функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Вып. 11, № 2. С. 120–130.
4. Куприянова Ю.В. Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2006. Вып. 8. С. 59–61.
5. Куприянова Ю.В. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Совр. методы теории функций и смеж. проблемы: Материалы конф. Воронеж, 2007. С. 120–121.

УДК 519.872

АНАЛИЗ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

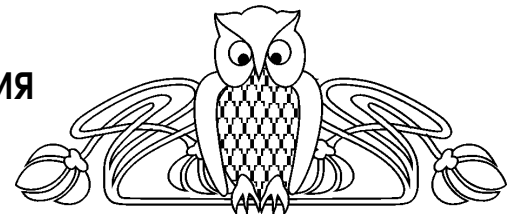
Ю.И. Митрофанов, Н.П. Фокина

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru

Предлагается метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с одним классом требований и централизованным динамическим управлением маршрутизацией, основанным на использовании в процессе функционирования сети в течение фиксированных интервалов времени различных маршрутных матриц. Метод анализа основан на описании процесса функционирования сети обслуживания модельными цепями Маркова. Приводится пример анализа сети рассматриваемого типа.

ВВЕДЕНИЕ

Применение методов динамического управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания (СеМО) позволяет значительно повысить качество их функционирования. Используемые в сетях методы управления маршрутизацией в существенной степени определяют содержание методов анализа сетей обслуживания этого типа. Достаточно полное представление о методах анализа можно получить из обзора [1]. Примерами работ, в которых рассматриваются задачи анализа сетей массового обслуживания с зависящей от состояния сетей маршрутизацией, являются [2–9]. В работе [2] исследуется замкнутая сеть с одним классом требований и интенсивностями переходов требований, зависящими от состояния сети. Определяются условия, которым должны удовлетворять интенсивности переходов, чтобы существовало стационарное распределение вероятностей состояний сети в мультипликативной



An Analysis of Queueing Networks with Dynamic Routing Control

Y.I. Mitrophanov, N.P. Fokina

A method for analysis of closed exponential queueing networks with one class of customers and central dynamic routing control is proposed. The method of control is based on a use of different routing matrices during fixed time intervals in the network operation process. The method for analysis is based on a description of the network operation process with model Markov chains. An example of analysis of this type network is given.



форме. Стационарное распределение для замкнутой сети с одним классом требований и маршрутными матрицами, зависящими от состояния сети и используемыми в течение определенных интервалов времени в процессе функционирования сети, получено в работах [3, 4], а для сети с несколькими классами требований и маршрутизацией, зависящей от времени, проведенного сетью в текущем состоянии, — в работе [5]. Работа [6] посвящена изучению характеристик выходных и маршрутных функций марковских СеМО с дискретным и непрерывным временем, групповыми переходами требований и зависящей от состояния сетей маршрутизацией. В работе [7] рассматриваются алгоритмы маршрутизации в реальном времени для открытых экспоненциальных СеМО с одним классом требований, последовательно-параллельной топологией и системами ограниченной емкости. В работе [8] предлагаются методы анализа замкнутых СеМО, в которых маршрутные вероятности для их подсетей являются рациональными функциями от числа требований, находящихся в принадлежащих подсетям системах. Аналогичная зависимость рассматривается в работе [9] для сетей с системами таких же типов, которые используются в СеМО типа ВСМР [10]. Актуальность и значимость работ по развитию методов управления маршрутизацией и методов анализа сетей с управлением маршрутизацией обусловлены эффективностью использования СеМО этого типа в качестве математических моделей больших сложных стохастических систем с сетевой структурой, функционирование которых обеспечивается развитыми подсистемами управления.

В данной работе предлагается метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией. В процессе функционирования сети система управления производит идентификацию состояния сети в заданные моменты времени и формирует зависящие от этого состояния управляющие воздействия на сеть. Целью управления является обеспечение достижения максимально возможного значения стационарной характеристики сети, являющейся основной при определении качества ее функционирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N — замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с L системами массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, типа $M/M/1$ с интенсивностями обслуживания μ_i , Q требованиями одного класса и динамическим управлением маршрутизацией. Топология сети определяется матрицей смежности $W = (w_{ij})$, $i, j = 1, \dots, L$, соответствующего ориентированного графа. Обозначим через $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_L^{(n)})$ состояние сети с номером n , где $s_i^{(n)}$ — число требований в системе S_i , через X — множество состояний сети мощности $c_X = |X|$. Длительность пребывания сети в состоянии $s^{(n)} \in X$ является случайной величиной с экспоненциальным распределением и математическим ожиданием (м.о.) $\beta_n = 1/\alpha_n$, где α_n — параметр ее функции распределения. Качество функционирования сети определяется значением ее стационарной характеристики, называемой ведущей. Предполагается, что состояние $s^{(n)}$ имеет характеристику $V^{(n)}$ — потенциал этого состояния (значение потенциала — неотрицательное вещественное число). Потенциал состояния определяет значимость пребывания сети в данном состоянии для достижения сетью максимального значения ведущей характеристики. При нумерации состояний предполагается, что если $V^{(m)} > V^{(n)}$, то $m < n$. В случае равенства потенциалов состоянию с меньшим м.о. длительности пребывания присваивается меньший номер. Состояние $s^{(1)}$ с максимальным потенциалом называется базовым. Соответственно значению потенциала состояния сети делятся на доминантные и ординарные. Обозначим через Y и Z множества доминантных и ординарных состояний, $X = Y \cup Z$, $c_Y = |Y|$, $c_Z = |Z|$, $c_X = c_Y + c_Z$. Доминантные состояния имеют большие потенциалы по сравнению с ординарными, поэтому $Y = \{s^{(1)}, \dots, s^{(c_Y)}\}$. Множества номеров всех состояний сети, номеров доминантных и ординарных состояний обозначим через $B = \{1, \dots, c_X\}$, $D = \{1, \dots, c_Y\}$, $U = \{c_Y + 1, \dots, c_Y + c_Z\}$ соответственно. В качестве ведущей характеристики сети N выбрана стационарная вероятность $\pi(Y)$ пребывания сети в множестве доминантных состояний Y . Поэтому повышение качества функционирования сети непосредственно связано с увеличением значения $\pi(Y)$.

Процесс эволюции сети N представляет собой последовательность фрагментов, называемых тактами. Различаются такты двух видов — нормальные \hat{x} и коррективные \tilde{x} . В момент окончания каждого такта производится идентификация состояния $s^{(g)}$ сети; если $s^{(g)} \in Y$, то очередной такт является нормальным, в противном случае — коррективным. В зависимости от состояния $s^{(g)} \in Z$ различаются c_Z типов коррективных тактов. В течение такта \hat{x} используется маршрутная матрица $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, L$, в течение коррективного такта \tilde{x}^J типа $J = g - c_Y$, $J \in \{1, \dots, c_Z\}$, — управляющая маршрутная матрица $\Theta^{J,\kappa} = (\theta_{ij}^{J,\kappa})$, зависящая от начального состояния $s^{(g)} \in Z$ и параметра управления $\kappa \in \{1, 2, \dots, L\}$. Целью использования управляющих маршрутных матриц в течение кор-



рективных тактов является возвращение сети в множество доминантных состояний Y из множества состояний Z . Нормальные такты имеют фиксированную длительность φ , длительность коррективных тактов $\eta_g^{J,\kappa}$ зависит от их типа. Параметры c_Y , φ и κ являются параметрами метода управления маршрутизацией, их значения задаются до начала функционирования сети и не изменяются в процессе ее функционирования. Целью данной работы является разработка метода управления маршрутизацией и метода анализа сетей обслуживания с данным методом управления.

2. МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ МАРШРУТНЫХ МАТРИЦ

Смежное по отношению к состоянию $s^{(n)}$ состояние $s^{(\cdot)}(n, i, j)$ называется состоянием, порожденным состоянием $s^{(n)}$ и переходом требования из S_i в S_j . Пусть

$$\Omega_i^{(n)} = \{s^{(\cdot)}(n, i, l) | l \in \{1, \dots, L\}, l \neq i, s_i^{(n)} > 0, w_{il} = 1\}, i \in \{1, \dots, L\}, n \in B.$$

Состояние $\bar{s}^{(\cdot)}(n, i, \cdot) \in \Omega_i^{(n)}$, имеющее наибольший потенциал $V^{(\cdot)}$ по сравнению с другими состояниями множества $\Omega_i^{(n)}$, называется остовным состоянием множества $\Omega_i^{(n)}$. Если в $\Omega_i^{(n)}$ имеется несколько состояний с одинаковыми наибольшими потенциалами, то в качестве остовного выбирается состояние с наименьшим номером. Поэтому предполагается, что в множестве $\Omega_i^{(n)}$ только одно состояние является остовным. Для каждого состояния $s^{(n)}$ определим называемую матрицей передач нуль-единичную матрицу $\mathcal{N}^{(n)} = (\nu_{ij}^{(n)})$, $i, j = 1, \dots, L$, обеспечивающую переход сети из состояния $s^{(n)}$ в одно из смежных остовных состояний [3]. Введем вспомогательную функцию

$$\varepsilon(s_i^{(n)}) = \begin{cases} 1, & s_i^{(n)} > 0, \\ 0, & s_i^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Тогда параметр $\alpha_n = \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(n)}) \mu_i$. Вероятность $\gamma_{i,n}$ того, что уход сети из состояния $s^{(n)}$ обусловлен завершением обслуживания требования в системе S_i , равна μ_i / α_n . Если в качестве маршрутной матрицы используется матрица $\mathcal{N}^{(n)}$, то вероятность перехода сети из $s^{(n)}$ в остовное состояние $\bar{s}^{(\cdot)}(n, i, j)$ за счет перехода требования из S_i в S_j равна $\gamma_{i,n}$, так как $\nu_{ij}^{(n)} = 1$.

Для каждого состояния $s^{(n)}$ определим матрицу $H^{(n)} = (h_{ij}^{(n)})$, $i, j = 1, \dots, L$, элементы которой

$$h_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & s_i^{(n)} = 0, \\ \gamma_{i,n} \nu_{ij}^{(n)}, & s_i^{(n)} > 0. \end{cases}$$

Матрица $H^{(n)}$ является матрицей вероятностей перехода из $s^{(n)}$ в остовные состояния множеств $\Omega_i^{(n)}$, $i \in \{1, \dots, L\}$, за счет перехода требований из S_i в S_j .

При построении управляющей маршрутной матрицы $\Theta^{J,\kappa}$, используемой в течение коррективного такта, начинающегося из состояния $s^{(n)}$, $n = J + c_Y$, последовательно просматриваются остовные состояния, расположенные на расстоянии $1, 2, \dots, \kappa - 1$ шагов от исходного состояния $s^{(n)}$. Считается, что равноудаленные от $s^{(n)}$ состояния находятся на одном уровне (состояние $s^{(n)}$ находится на уровне 0). Пусть G — ориентированный граф с множеством вершин B и множеством дуг, соответствующих упорядоченным парам смежных состояний. Алгоритм формирования маршрутной матрицы для начального состояния $s^{(n)} \in Z$ основывается на алгоритме поиска кратчайших путей между вершинами в графе G при начале из вершины n [11]. Для каждой просмотренной вершины $r \in B$, соответствующей остовному состоянию $s^{(r)} \in X$, строится матрица вероятностей переходов $H^{(r)}$. Управляющая маршрутная матрица $\Theta^{J,\kappa}$ полагается равной сумме матриц $H^{(r)}$ для вершин $r \in B$, расположенных на уровнях $0, 1, \dots, \kappa - 1$ от начальной вершины $n \in B$, $n = c_Y + J$. Допускается, что одна и та же вершина может быть просмотрена более одного раза. Выполнение алгоритма завершается после просмотра $\kappa - 1$ уровней.

3. МЕТОД АНАЛИЗА СЕТИ N

Обозначим через Ξ случайный процесс с множеством состояний B , описывающий эволюцию сети N . Процесс Ξ представляет собой последовательность фрагментов, соответствующих нормальным и коррективным тактам. Эволюция сети N в течение нормальных и коррективных тактов описывается соответственно цепями Маркова \hat{C} и \tilde{C}^J , $J = 1, \dots, c_Z$, с множеством состояний B и непрерывным



временем (все состояния являются устойчивыми, длительность пребывания в состоянии n является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром $0 < \alpha_n < \infty$); в обозначении \tilde{C}^J индекс J указывает, что начальным состоянием эволюции цепи является $c_Y + J$. Длительности реализаций цепей \hat{C} и \tilde{C}^J равны соответственно длительностям нормального и соответствующих коррективных тактов. Характеристики процесса Ξ определяются характеристиками цепей Маркова \hat{C} и \tilde{C}^J , $J = 1, \dots, c_Z$, и длительностями их реализаций.

Введем обозначения параметров и характеристик цепи \hat{C} : $\hat{A} = (\hat{a}_{mn})$, $m, n = 1, 2, \dots, c_X$, — инфинитезимальный оператор; $\hat{P} = (\hat{p}_{mn})$ — матрица вероятностей скачков марковской цепи скачков, связанной с цепью \hat{C} ; $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$ — матрица вероятностей перехода за время t , определяемая известным соотношением $\hat{P}^{(t)} = \exp(\hat{A}t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{a}_{mn} &= \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i\theta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \\ \hat{a}_{mm} &= -\sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i, \quad \alpha_m = -\hat{a}_{mm}, \quad m \in B, \\ \hat{p}_{mn} &= \frac{\hat{a}_{mn}}{\alpha_m}, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \quad \hat{p}_{mm} = 0, \quad m \in B. \end{aligned}$$

Для аналогичных параметров и характеристик цепей \tilde{C}^J , $J = 1, \dots, c_Z$, используются обозначения $\tilde{A}^J = (\tilde{a}_{mn}^J)$, $m, n \in B$, $\tilde{P}^J = (\tilde{p}_{mn}^J)$, $\tilde{P}^{(t), J} = (\tilde{p}_{mn}^{(t), J})$. Параметры и характеристики цепи \tilde{C}^J будут зависеть от соответствующей управляющей маршрутной матрицы $\Theta^{J, \kappa}$:

$$\tilde{a}_{mn}^J = \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i\theta_{ij}^{J, \kappa}, \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \quad \tilde{a}_{mm}^J = \hat{a}_{mm}.$$

Длительность $\eta_m^{J, \kappa}$ реализации цепи \tilde{C}^J полагается равной математическому ожиданию длительности интервала времени, за который цепь \tilde{C}^J совершит κ переходов, и определяется как сумма м.о. длительностей пребывания цепи на уровнях $0, 1, \dots, \kappa - 1$ от начального состояния m :

$$\eta_m^{J, \kappa} = \frac{1}{\alpha_m} + \sum_{i=1}^{\kappa-1} \sum_{l=1}^{c_X} \frac{\tilde{p}_{ml}^J(i)}{\alpha_l},$$

где $\tilde{p}_{ml}^J(i)$ — вероятность перехода из m в l за i шагов марковской цепи скачков, связанной с цепью \tilde{C}^J . Матрица $(\tilde{p}_{ml}^J(i))$, $m, l = 1, \dots, c_X$, равна матрице $((\tilde{p}_{ml}^J)^i)$.

Обозначим через $\hat{\pi}_n^*(m, \varphi)$ и $\tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa})$ средние вероятности пребывания в состоянии $n \in B$ соответственно цепи \hat{C} в течение интервала времени длительности φ при исходе из состояния $m \in D$ и цепи \tilde{C}^J в течение интервала времени длительности $\eta_m^{J, \kappa}$ при исходе из состояния $m \in U$. Так как вероятности пребывания этих цепей в момент времени t в состоянии n при исходном состоянии $m \in B$ равны вероятностям их перехода из m в n за время t ,

$$\hat{\pi}_n^*(m, \varphi) = \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \hat{p}_{mn}^{(t)} dt, \quad n \in B, \quad m \in D, \quad \tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa}) = \frac{1}{\eta_m^{J, \kappa}} \int_0^{\eta_m^{J, \kappa}} \tilde{p}_{mn}^{(t), J} dt, \quad n \in B, \quad m \in U.$$

Обозначим через δ_n такт сети N , начинающийся в состоянии $s^{(n)} \in X$, и рассмотрим случайный процесс Δ с множеством состояний $\{\delta_n\}$, $n = 1, \dots, c_X$. Положим длительности пребывания процесса Δ в состояниях $\delta_1, \dots, \delta_{c_Y}$ равными φ , а в состояниях δ_{c_Y+J} , $J = 1, \dots, c_Z$, — равными $\eta_n^{J, \kappa}$, $n = c_Y + J$. Вероятность перехода процесса Δ из состояния δ_n в состояние δ_m

$$q_{nm} = \begin{cases} \hat{p}_{nm}^{(\varphi)}, & n \in D, \quad m \in B, \\ \tilde{p}_{nm}^{(\eta_n^{J, \kappa}), J}, & n \in U, \quad m \in B. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение цепь Маркова \check{C} с множеством состояний $\{\delta_n\}$ и непрерывным временем, параметры экспоненциальной функции распределения длительности пребывания которой в состояниях $\delta_1, \dots, \delta_{c_Y}$ равны $\check{\alpha}_n = 1/\varphi$, $n = 1, \dots, c_Y$, а в состояниях δ_{c_Y+J} , $J = 1, \dots, c_Z$, — равны $\check{\alpha}_n = 1/\eta_n^{J, \kappa}$, $n = c_Y + J$. Элементы матрицы вероятностей скачков $\check{P} = (\check{p}_{nm})$, $n, m = 1, \dots, c_X$, и инфинитезимального оператора $\check{A} = (\check{a}_{nm})$ этой цепи определяются выражениями:

$$\check{p}_{nm} = \frac{1}{1 - q_{nn}} q_{nm}, \quad n \neq m, \quad n, m \in B, \quad \check{p}_{nn} = 0, \quad n \in B,$$



$$\check{a}_{nm} = \check{a}_n \check{p}_{nm}, \quad n \neq m, \quad n, m \in B, \quad \check{a}_{nn} = -\check{a}_n, \quad n \in B.$$

Пусть $\zeta = (\zeta_n)$, $n = 1, \dots, c_X$, и $\check{\zeta} = (\check{\zeta}_n)$ — стационарные распределения вероятностей состояний процессов Δ и \check{C} соответственно. Распределение $\check{\zeta} = (\check{\zeta}_n)$ является решением системы уравнений $\check{\zeta} \check{A} = 0$ с условием нормировки $\sum_{n \in B} \check{\zeta}_n = 1$. Из способа построения цепи \check{C} и значений ее параметров непосредственно следует, что $\zeta \approx \check{\zeta}$. Тогда стационарная вероятность состояния $s^{(n)} \in X$ $\pi_n \approx \pi_n^*$, средней вероятности пребывания процесса Ξ в состоянии $n \in B$, определяемой выражением

$$\pi_n^* = \sum_{m \in D} \zeta_m \hat{\pi}_n^*(m, \varphi) + \sum_{m \in U} \zeta_m \tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa}).$$

Математическое ожидание длительности очередного такта ψ^κ и интенсивность управления R^κ (математическое ожидание числа управляющих воздействий, формируемых в единицу времени) определяются выражениями

$$\psi^\kappa = \varphi \sum_{n \in D} \zeta_n + \sum_{n \in U} \eta_n^{J, \kappa} \zeta_n, \tag{1}$$

$$R^\kappa = 1/\psi^\kappa.$$

4. ПРИМЕР

Рассмотрим сеть N с $L = 4$, $Q = 4$, $\mu = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$, матрицей смежности $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

и используемой в течение нормальных тактов маршрутной матрицей

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество X состояний сети включает $c_X = 35$ состояний $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}, s_4^{(n)})$, $n = 1, \dots, 35$.

Пусть потенциалы состояний сети определяются выражением $V^{(\cdot)} = \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(\cdot)}) \mu_i$. Состояния нумеруются в порядке убывания значения их потенциалов. Базовым состоянием является $s^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$. Пусть множество доминантных состояний $Y = \{s^{(1)}, \dots, s^{(10)}\}$. Обозначим через N^0 сеть массового обслуживания с маршрутной матрицей Θ , отличающуюся от сети N только тем, что в ней отсутствует управление маршрутизацией. Стационарная вероятность пребывания сети N^0 в множестве Y $\pi^0(Y) = 0.22$.

Некоторые характеристики сети N при различных значениях φ и κ представлены в таблице, где $\eta^\kappa = \sum_{m \in U} \eta_m^{J, \kappa} \zeta_m / \sum_{n \in U} \zeta_n$ — м.о. длительности коррективного такта, если очередной такт в сети является коррективным. Для проверки точности предлагаемого метода анализа сетей было проведено имитационное моделирование функционирования сети N , результаты которого (вероятности $\tilde{\pi}(Y)$ пребывания сети N в множестве Y) также представлены в таблице.

Характеристики сети N

κ	Характеристики сети	Длительность нормального такта φ						
		0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0	50.0
1	$\pi(Y)$	0.35	0.39	0.39	0.34	0.29	0.26	0.24
	η^1	1.25	1.28	1.34	1.46	1.54	1.58	1.59
	ψ^1	1.05	1.17	1.69	3.89	8.29	17.83	47.52
	R^1	0.95	0.85	0.59	0.26	0.12	0.06	0.02
	$\tilde{\pi}(Y)$	0.37	0.36	0.34	0.30	0.26	0.24	0.22



Окончание таблицы

κ	Характеристики сети	Длительность нормального такта φ						
		0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0	50.0
2	$\pi(Y)$	0.27	0.30	0.31	0.30	0.28	0.25	0.23
	η^2	2.29	2.31	2.35	2.44	2.51	2.54	2.55
	ψ^2	2.06	2.04	2.24	3.72	7.39	16.23	45.26
	R^2	0.48	0.49	0.45	0.27	0.14	0.06	0.02
	$\tilde{\pi}(Y)$	0.31	0.30	0.29	0.27	0.26	0.24	0.22
3	$\pi(Y)$	0.23	0.25	0.26	0.26	0.26	0.24	0.23
	η^3	3.44	3.45	3.48	3.53	3.58	3.60	3.61
	ψ^3	3.23	3.15	3.18	4.06	6.87	14.64	42.42
	R^3	0.31	0.32	0.31	0.25	0.15	0.07	0.02
	$\tilde{\pi}(Y)$	0.25	0.26	0.26	0.25	0.25	0.22	0.21

Наибольшее отклонение $\tilde{\pi}(Y)$ от $\pi(Y)$ достигается при $\varphi = 2, \kappa = 1$ и составляет менее 15% от значения $\pi(Y)$, что говорит о достаточной точности метода анализа.

Анализ результатов экспериментов с моделями показывает, что при фиксированной длительности нормального такта φ и увеличении κ качество управления снижается, а также изменяется интенсивность управления R^κ . В основном R^κ снижается с ростом κ , но при некоторых значениях φ , например при $\varphi = 10$, наблюдается увеличение R^κ . Это объясняется тем, что при всех значениях κ вероятность наблюдения в процессе функционирования сети в произвольный момент времени нормального такта $\sum_{n \in D} \zeta_n \rightarrow 1$ при $\varphi \rightarrow \infty$, но скорость роста этой вероятности при разных κ различна. Например, при $\varphi = 10$ и $\kappa = 1$ вероятность равна $\sum_{n \in D} \zeta_n = 0.80$, а при $\kappa = 2 - \sum_{n \in D} \zeta_n = 0.65$.

Так как при $\varphi = 10$ длительности коррективных тактов при $\kappa = 1$ и $\kappa = 2$ значительно меньше φ ($0.83 \leq \eta_n^{J,1} \leq 3.33, 1.61 \leq \eta_n^{J,2} \leq 4.64$, для всех $n \in B$), то на значение ψ^κ существенное влияние оказывает значение первого слагаемого в (1), поэтому $\psi^1 > \psi^2$ и $R^1 < R^2$.

Рассматривая зависимости интенсивности управления R^κ при каждом фиксированном параметре κ от значения длительности нормального такта φ , из результатов проведенных исследований можно сделать следующий вывод. При некоторых значениях φ , меньших η^κ , в выражении (1) величина убывания второго слагаемого больше величины возрастания первого. Поэтому возможно незначительное уменьшение м.о. длительности такта ψ^κ и, как следствие, незначительное возрастание интенсивности управления R^κ , например, при $\kappa = 2$ и $\varphi = 1$.

При каждом фиксированном параметре κ существует оптимальное значение φ_0 , при котором достигаются максимально возможные значения ведущей характеристики $\pi(Y)$. При $\varphi \uparrow \varphi_0$ наблюдается рост характеристики, а при $\varphi \rightarrow \infty \pi(Y) \rightarrow \pi^0(Y)$. Для сети N при $\kappa = 1, \kappa = 2$ и $\kappa = 3$ ведущая характеристика $\pi(Y)$ при $\varphi_0 \approx 2$ возрастает соответственно на 80, 40 и 20% от значения $\pi^0(Y)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод анализа сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией обладает достаточной для практических приложений точностью. Данный метод может быть использован для решения задач определения близких к оптимальным как параметров сетей массового обслуживания, так и параметров их систем управления, а также для оценки эффективности используемых в сетях обслуживания методов управления. В частности, как следует из результатов анализа рассмотренной в примере гипотетической сети обслуживания, для оценки эффективности управления с учетом зависящих от интенсивности управления затрат на реализацию процесса управления и выбора близких к оптимальным значений параметров управления необходимо использование показателя эффективности, учитывающего значения ведущей характеристики и интенсивности управления сетью.

Библиографический список

1. Митрофанов Ю.И., Решетникова Н.П. Методы анализа сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией. Саратов, 2002. Деп. в ВИНТИ, № 973-B2002. 55 с.
2. Serfozo R.F. Markovian network processes: congestion-dependent routing and processing // Queueing Systems. 1989. № 5. P. 5-36.
3. Митрофанов Ю.И., Юдаева Н.В. Модели и анализ



сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией // *АиТ*. 2000. № 6. С. 104–113.

4. Митрофанов Ю.И. Метод управления маршрутизацией в замкнутых сетях массового обслуживания // *ТиСУ*. 2002. № 6. С. 86–92.

5. Rumsewicz M., Henderson W. Insensitivity with age-dependent routing // *Adv. Appl. Prob.* 1984. V. 21, № 2. P. 398–408.

6. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // *Queueing Networks*. 1997. № 25. P. 45–75.

7. Daskalaki S., Smith J.M. Real-time routing in finite queueing networks // *Queueing Network Blocking: Proc.*

1-st Int. Workshop, Raleigh, N.C., 1988. P. 313–324.

8. Towsley D. Queueing network models with state-dependent routing // *J. of ACM*. 1980. V. 27, № 2. P. 323–337.

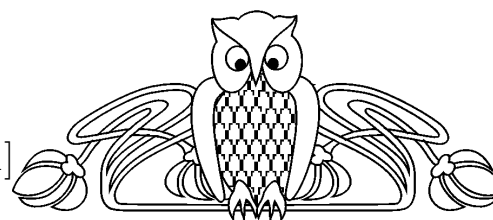
9. Krzesinski A.E. Multiclass queueing networks with state-dependent routing // *Performance Evaluations*. 1987. V. 7, № 2. P. 125–143.

10. Baskett F., Chandy K.M., Muntz R.R., Palacios F.G. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1975. V. 22. P. 248–260.

11. Лунский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.

УДК 517.518.85

ФОРМОСОХРАНЯЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ЕДИНИЧНЫХ ШАРОВ В $C[0, 1]$



С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

Shape-Preserving Linear n -width of Unit Balls in $C[0, 1]$

S.P. Sidorov

Пусть D^k , k — натуральное или ноль, означает оператор дифференцирования порядка k , определенный в $C^k(X)$, $X = [0, 1]$, и пусть C — конус в $C^k(X)$. Определим линейный относительный n -поперечник множества $A \subset C^k(X)$ в $C(X)$ для D^k с ограничением C следующим образом: $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$. В настоящей статье находятся оценки линейных относительных n -поперечников шаров в $C(X)$ для D^k с ограничением $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$.

Let D^k , k is a natural number or zero, be the k -th differential operator, defined in $C^k(X)$, $X = [0, 1]$, and let C be a cone in $C^k(X)$. Let us denote $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$ linear relative

n -width of set $A \subset C^k(X)$ in $C(X)$ for D^k with constraint C . In this paper we estimate linear relative n -width of some balls in $C(X)$ for D^k with constraint $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать некоторую функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.).

Интерес к данной проблематике впервые возник в конце 60-х годов, когда появились работы О. Шиша [1], Г.Г. Лоренца и К.Л. Целлера [2]. Они дали толчок работам Р. ДеВора по монотонному приближению и работам А. С. Шведова [3], Д. Ньюмана [4], Р. Битсона и Д. Левиатана [5] по комонотонной аппроксимации в 70 и 80-е годы.

Пусть F — линейное нормированное пространство, A и C есть непустые подмножества F . Тогда относительным n -поперечником по Колмогорову множества A в F с ограничением C называется величина $d_n(A, C)_F = \inf_{F_n} E(A, F_n \cap C) = \inf_{F_n} \sup_{f \in A} \inf_{g \in F_n \cap C} \|f - g\|_F$, где левый инфимум ищется среди всех n -мерных линейных многообразий F_n пространства F , таких, что $F_n \cap C \neq \emptyset$. Если $C = F$, то $d_n(A)_F = d_n(A, F)_F$ есть n -поперечник по Колмогорову множества A в F [6].

Впервые понятие относительного поперечника было введено В. Н. Коноваловым в 1984 году [7]. Оценки величин $d_n(A, C)_F$ получены для некоторых конкретных A , C и F в работе [8].

Пусть L есть некоторый линейный оператор, определенный в F , со значениями в F и C — некоторый конус в F , $C \neq \emptyset$. Будем говорить, что оператор обладает свойством формосохранения относительно конуса C , если $L(C) \subset C$.

Пусть F — линейное нормированное пространство и $A \subset F$, $C \subset F$. Линейный оператор L_n , отображающий F в линейное пространство конечной размерности n , называется оператором конечного ранга n .

Линейным относительным n -поперечником множества A в F с ограничением C назовем величину $\delta_n(A, C)_F = \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|f - L_n f\|_F$, где инфимум ищется среди всех непрерывных линейных