



УДК 539.3,519.6

## ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, s.bauer@spbu.ru

Воронкова Ева Бороуховна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования энергетических систем, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, e.voronkova@spbu.ru

В работе рассматривается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных пологих сферических оболочек и кольцевых пластин, нагруженных нормальным давлением. Внешний край оболочки или пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении. Внутренний край кольцевой пластины может свободно смещаться в направлении оси пластины, но не поворачиваться. Предлагается, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер и численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой появляются волны в окружном направлении. Исследовано влияние пологости оболочки, отверстия в центре пластины и степени неоднородности материала на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости.

*Ключевые слова:* пологая сферическая оболочка, кольцевая пластина, потеря устойчивости, неоднородность.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

### ВВЕДЕНИЕ

При исследовании больших прогибов пологих оболочек и пластин, нагруженных симметричной нагрузкой, приходится сталкиваться с образованием складок, вызванных потерей устойчивости осесимметричной формы равновесия. Для пластины, нагруженной нормальным давлением, решение, соответствующее несимметричным формам равновесия, полученное методом Галеркина, предложено Д. Ю. Пановым и В. И. Феодосьевым в [1]. Позже было показано, что при определении больших осесимметричных деформаций круглых пластин недостаточно при применении процедуры Галеркина использовать приближение, зависящее только от одного параметра [2]. Строгое доказательство существования несимметричного решения для симметрично нагруженной пластины провел Н. Ф. Морозов в [3], а единственность такого решения доказана W. O. Pieschocki в [4].

Значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной, для пологой сферической панели под действием внешнего давления найдены численно в [5], а для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения численно определены в [6].

В настоящей работе рассматривается задача о потере устойчивости осесимметричной формы равновесия неоднородной пологой сферической оболочкой и кольцевой



пластины, модуль упругости которых изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Такая пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины диска зрительного нерва человека [7]. Исследуется влияние пологости оболочки и неоднородности материала пластины на величину критической нагрузки.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пологую сферическую оболочку, нагруженную равномерно распределенным внутренним давлением (рис. 1). Материал сферической панели полагается изотропным, модуль упругости меняется при удалении от центра панели к ее краю.

Система уравнений деформации полой сферической панели в безразмерном виде имеет вид, аналогичный [8]

$$\begin{aligned} g_1(r)\Delta\Delta w + g_1'(r)L_1^+(w) + g_1''(r)L_2^+(w) &= \\ &= p + L(w, F) - A\Delta F, \\ g_2(r)\Delta\Delta F + g_2'(r)L_1^-(F) + g_2''(r)L_2^-(F) &= \\ &= -L(w, w)/2 + A\Delta w, \\ ( )' &= \partial( )/\partial r, \quad ( \dot{ } ) = \partial( )/\partial \theta, \quad A = \beta a^2/Rh. \end{aligned} \quad (1)$$

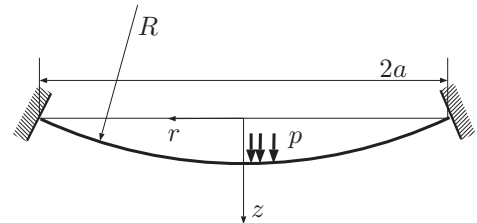


Рис. 1. Сферическая полая оболочка  
Fig. 1. Spherical shallow shell

Здесь  $w(r, \theta)$ ,  $F(r, \theta)$  — неизвестные безразмерные нормальный прогиб и функция усилий;  $a$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $\nu$  — радиус панели в плане, радиус кривизны срединной поверхности, толщина и коэффициент Пуассона материала пластины;  $\beta^2 = 12(1 - \nu^2)$ ;  $r$ ,  $\theta$  — введенные полярные координаты  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $g_1(r)$  — достаточно гладкая функция, определяющая закон изменения модуля упругости панели;  $g_2(r) = 1/g_1(r)$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $L$ ,  $L_i^\pm$ , ( $i = 1, 2$ ) — дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L(x, y) &= x''(y'/r + \ddot{y}/r^2) + y''(x'/r + \ddot{x}/r^2) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)', \\ L_1^\pm(y) &= 2y''' + (2 \pm \nu)y''/r + 2(\dot{y})'/r^2 - y'/r^2 - 3\ddot{y}/r^3, \\ L_2^\pm(y) &= y'' \pm \nu(y'/r + \ddot{y}/r^2). \end{aligned}$$

Система (1) описывает деформацию круглой неоднородной пластины, нагруженной нормальным давлением, если параметр  $A$ , характеризующий пологость панели, положить равным нулю ( $A = 0$ ) [8]. При замене в (1) знаков перед слагаемыми, содержащими параметр  $A$ , на противоположные система будет описывать деформацию панели под действием внешнего давления.

Безразмерные величины связаны с размерными соотношениями:

$$r = \frac{r^*}{a}, \quad w = \beta \frac{w^*}{h}, \quad p = \beta^3 \frac{p^* a^4}{E_{av} h^4}, \quad F = \beta^2 \frac{F^*}{E_{av} h^3},$$

где  $E_{av}$  — среднее значение модуля упругости, вычисленное как

$$E_{av} = \frac{1}{2\pi RH} \int_0^{2\pi} \int_0^a E(r)r dr d\theta, \quad E(r) = E_0 f(r),$$

$H = R - \sqrt{R^2 - a^2}$  — стрела подъема оболочки,  $f(r)$  — достаточно гладкая, положительная на отрезке  $[0, R]$  функция, и  $g_1(r) = E_0 f(r)/E_{av}$ .



Положим, что внешний край панели закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении, то есть полагаем, что растягивающее и сдвигающие усилия равны нулю при  $r = 1$ :

$$w = w' = F'/r + \ddot{F}/r^2 = - \left( \dot{F}/r \right)' = 0. \quad (2)$$

Учитывая ограниченность искомым решений, считаем, что  $w' = F' = 0$  в центре панели (при  $r = 0$ ).

Для круглой пластины (при  $A = 0$ ) граничные условия (2) сохраняются. Для кольцевой пластины одним из возможных вариантов закрепления внутреннего края ( $r = \delta$ ) может быть свободное перемещение точек края в радиальном и окружном направлении при ограничении поворотов. Тогда необходимо положить равным нулю поперечное реактивное усилие, складывающееся из поперечной силы и производной от крутящего момента. В терминах нормального перемещения  $w$  и функции усилий  $F$  граничные условия запишутся с следующим виде:

$$\begin{aligned} r = \delta, \quad w' = - \left( \dot{F}/r \right)' = 0, \\ g_1(r) \left( (\Delta w)' + \frac{1-\nu}{r} (\ddot{w}/r)' \right) + g_1'(r) L_2^+(w) = 0, \\ g_2(r) \left( (\Delta F)' + \Delta F/r - \frac{1+\nu}{r^2} (\ddot{F} + F)' \right) + g_2'(r) L_2^-(F) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Бифуркация сферической панели в неосесимметричное состояние возможна при возрастании нагрузки до критического значения  $p = p_{cr}$  [3]. При меньших значениях давления  $p$  система (1)–(2) имеет только симметричное решение.

Аналогично [5, 6] представим решение в виде

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r) \cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r) \cos n\theta, \quad (4)$$

где функции  $w_s$ ,  $F_s$  описывают докритическое симметричное решение, а функции  $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos n\theta$ ,  $F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos n\theta$  — закритическое состояние пластины (здесь  $n$  — число волн в окружном направлении, образовавшихся после потери устойчивости).

После разделения переменных (4) исходная система (1)–(2) распадается на две: нелинейную для нахождения симметричного решения  $w_s(r)$ ,  $F_s(r)$  и линейную систему уравнений относительно  $w_n(r)$ ,  $F_n(r)$ , так как функции  $w_{ns}$ ,  $F_{ns}$  полагаются малыми сразу после перехода пластины в неосесимметричное состояние. Для каждого числа волн в окружном направлении  $n$  будем искать такие значения нагрузки  $p_n$ , при которых существуют отличные от нуля функции  $w_n(r)$ ,  $F_n(r)$ . Критической нагрузкой выберем  $p_{cr} = \min_n p_n$ .

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Были проведены серии расчетов для неоднородной пологой сферической панели при изменении модуля упругости пластины по экспоненциальному закону  $E = E_0 e^{-qr}$ . Параметры  $E_0$  и  $q$  выбирались так, чтобы среднее значения модуля упругости панели  $E_{av}$  оставалось постоянным.



Существование сжимающих напряжений в окрестности контура пологой оболочки создает предпосылки для перехода панели в неосесимметричное состояние [3]. На рис. 2 для пологой неоднородной сферической оболочки ( $A = 2.5$ ,  $E = E_0 e^{-0.5r}$ ) показано, как меняется интенсивность сжимающих напряжений, а также ширина зоны, в которой они возникают при возрастании нагрузки.

Эти данные согласуются с результатами [8] для неоднородной круглой пластины. В табл. 1 для однородной пологой сферической панели приведены найденные наименьшее значение нагрузки  $p_{cr}$  и соответствующие им волновые числа  $n$ . Значения критической нагрузки для однородной круглой пластины ( $A = 0$ ) приведены по [8].

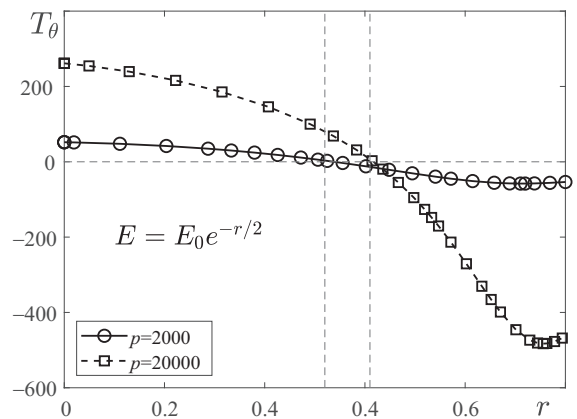


Рис. 2. Безразмерное окружное усилие для неоднородной панели, загруженной внутренним давлением ( $A = 2.5$ ,  $E = E_0 e^{-0.5r}$ )  
 Fig. 2. Dimensionless circumferential stress resultant for a heterogeneous panel loaded with internal pressure ( $A = 2.5$ ,  $E = E_0 e^{-0.5r}$ )

Таблица 1 / Table 1

Критическая нагрузка для однородной пологой сферической панели ( $A = 0$  соответствует круглой пластине)  
 Critical load for a homogeneous shallow spherical panel ( $A = 0$  corresponds to a circular plate)

$A$	0	0.5	1	2	3	4
$p_{cr}$	64522	65763	67394	70361	73633	77110
$n$	14	14	14	15	16	16

Бифуркация сферической панели в неосесимметричное состояние происходит при большей нагрузке, чем для круглой пластины. При этом с ростом параметра  $A$  увеличивается волновое число  $n$ , соответствующее критической нагрузке.

С ростом неоднородности критическая нагрузка, при которой осесимметричная форма равновесия теряет устойчивость, может снижаться в 6 раз (рис. 3), а число образовавшихся при переходе в неосесимметричное состояние волн в окружном направлении увеличивается по сравнению с однородной оболочкой.

Заметим, что для кольцевых пластин при увеличении радиуса центрального отверстия потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходит с образованием меньшего числа складок в окружном направлении (см. табл. 2).

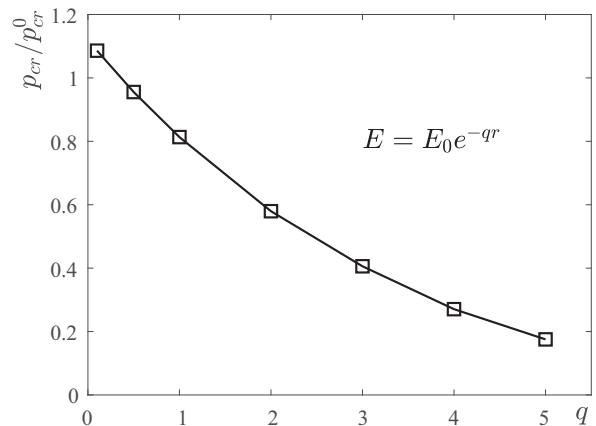


Рис. 3. Изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности панели  $q$ .  $A = 2.5$ ,  $p_0$  — критическая нагрузка для однородной круглой пластины

Fig. 3. The change of the critical load when the degree of heterogeneity of the panel  $q$  changes.  $A = 2.5$ ,  $p_0$  — critical load for a uniform circular plate



Таблица 2 / Table 2

Критическая нагрузка для однородной кольцевой пластины ( $\delta = 0$  соответствует сплошной пластине)

Critical load for a homogeneous annular plate ( $\delta = 0$  corresponds to a circular plate)

$\delta$	0	0.05	0.1	0.15
$p_{cr}/p_{cr}^0$	1	1.03	1.08	1.15
$n$	14	13	12	12

Как показано в [2, 5, 6], потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия локализована вблизи внешнего края полошой оболочки и связана с появлением в окрестности внешнего края сжимающих окружных усилий. Этим объясняется влияние на критическую нагрузку свойств пластины в окрестности внешнего края.

Пологая оболочка, нагруженная внутренним давлением, может быть простейшей моделью решетчатой пластины (РП)

диска зрительного нерва человека [2]. РП является неоднородной: за счет строения ее жесткость существенно снижается к краю. Учитывая связь размерных и безразмерных, находим, что критическое давление  $p_{cr} = 72166$  для панели с радиусом основания  $a = 1$  мм, радиусом кривизны панели  $R = 12$  мм, толщиной  $h = 0.1$  мм,  $E_{av} = 0.3$  МПа,  $\nu = 0.49$  ( $A = 2.5$ ), при котором возможна бифуркация в неосесимметричное состояние, соответствует 78,6 КПа, или 590 мм рт. ст. С учетом неоднородных свойств образование складок по краю оболочки возможно уже при 90 мм рт. ст. ( $q = 5$ ).

В ряде работ отмечается возможность кратковременного подъема внутриглазного давления до 100 мм рт. ст. [10]. Таким образом, появление отеков и складок по краю РП [9] может быть объяснено потерей устойчивости осесимметричных форм равновесия.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе численным методом исследована потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия неоднородных пологих сферических оболочек и кольцевых пластин. Найдено критическое давление, при котором возможна бифуркация панели/пластины в неосесимметричное состояние. Показано, что при уменьшении жесткости оболочки к краю переход в неосесимметричное состояние происходит при существенно меньшей нагрузке, чем для оболочки постоянной жесткости, но с образованием большего числа волн.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.Z50.31.0046).

## Библиографический список

1. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. 1948. Т. 12, вып. 4. С. 389–406.
2. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // ПММ. 1963. Т. 27, № 2. С. 265–274.
3. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой // Изв. вузов. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
4. Piechocki W. J. On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech. 1969. № 21. P. 81–101.
5. Nai-Chien Huang. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // J. Appl. Mech. 1964. № 31. P. 447–457. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629662>



6. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetrical wrinkling of circular plates // *Quart. Appl. Math.* 1971. № 31. P. 75–91. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
7. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2014. Т. 1(59), вып. 3. С. 438–458.
8. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2012. Вып. 1. С. 80–85.
9. *Coleman D. J., Trokel S.* Direct-recorded intraocular pressure variations in a human subject // *Arch Ophthalmol.* 1969. Vol. 82, № 5. P. 637–640. DOI: <https://doi.org/10.1001/archophth.1969.00990020633011>
10. *Нестеров А. П.* Основные принципы диагностики первичной открытоугольной глаукомы // *Вестн. офтальмологии.* 1998. № 2. С. 3–6.

---

**Образец для цитирования:**

*Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия пологих сферических оболочек под действием внутреннего давления // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2018. Т. 18, вып. 4. С. 390–396. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

---

## On the Unsymmetrical Buckling of Shallow Spherical Shells under Internal Pressure

S. M. Bauer, E. B. Voronkova

Svetlana M. Bauer, <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>, St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia, s.bauer@spbu.ru

Eva B. Voronkova, <https://orcid.org/0000-0002-3065-4473>, St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia, e.voronkova@spbu.ru

This work is devoted to the numerical study of unsymmetrical buckling of shallow spherical shells and annular plates with varying mechanical characteristics subjected to internal pressure. We suppose that the edge of the shell is clamped but moving freely in the shell's plane. For the annular plate a roller support is considered for the inner edge of the plate, i.e. the edge that can slide along the figure axes without changing the slope. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinate. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. The effect of material inhomogeneity on the buckling load is examined. It is shown that if the elasticity modulus decreases away from the center of a plate, the critical pressure for unsymmetric buckling is sufficiently lower than for a plate with constant mechanical properties.

*Key words:* shallow spherical shell, annular plate, unsymmetrical buckling, inhomogeneity.

**Acknowledgements:** This research was supported by the Government of Russia (project no. 14.Z50.31.0046).

### References

1. Panov D. Yu., Feodos'ev V. I. On the equilibrium and stability loss of shallow shells under large deflection. *Prikl. Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 1948, vol. 12, iss. 4, pp. 389–406 (in Russian).



2. Feodos'ev V. I. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, iss. 2, pp. 392–404. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90008-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90008-X)
3. Morozov N. F. On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1961, no. 2, pp. 126–129 (in Russian).
4. Piechocki W. J. On the non-linear theory of thin elastic spherical shells. *Arch. Mech.*, 1969, no. 21, pp. 81–101.
5. Nai-Chien Huang. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. *J. Appl. Mech.*, 1964, no. 31, pp. 447–457. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629662>
6. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetrical wrinkling of circular plates. *Quart. Appl. Math.*, 1971, no. 31, pp. 75–91. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
7. Bauer S. M., Voronkova E. B. Models of shells and plates in the problems of ophthalmology. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2014, vol. 47, iss. 3, pp. 123–139. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1063454114030029>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On unsymmetrical buckling of circular plates under normal pressure. *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1.*, 2012, iss. 1, pp. 80–85 (in Russian).
9. Coleman D. J., Trokel S. Direct-recorded intraocular pressure variations in a human subject. *Arch Ophthalmol*, 1969, vol. 82, no. 5, pp. 637–640. DOI: <https://doi.org/10.1001/archopht.1969.00990020633011>
10. Nesterov A. P. Basic principles of open angle glaucoma diagnostic. *Vestnik of ophthalmology*, 1998, no. 2, pp. 3–6 (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Bauer S. M., Voronkova E. B. On the Unsymmetrical Buckling of Shallow Spherical Shells under Internal Pressure. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 390–396 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

---