

УДК 517.984

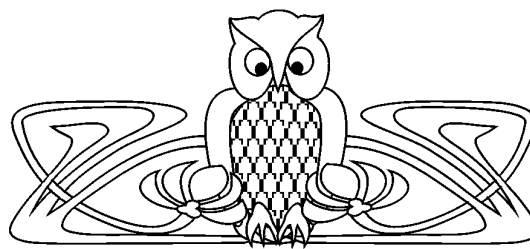
## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФFUЗИИ В СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

И.М. Набиев, А.Ш. Шукюров

Бакинский государственный университет,  
кафедра прикладной математики;  
\*Институт математики и механики НАН Азербайджана,  
отдел функционального анализа, Баку  
E-mail: nabievim@yahoo.com; ashshukurov@gmail.com

В работе доказывается единственность и приведены достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора диффузии по одному спектру.

**Ключевые слова:** обратная задача, оператор диффузии, спектр.



### Solution of Inverse Problem for the Diffusion Operator in a Symmetric Case

I.M. Nabiev, A.Sh. Shukurov

Baku State University, Chair of Applied Mathematics;  
\*Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, Baku  
E-mail: nabievim@yahoo.com; ashshukurov@gmail.com

In the paper uniqueness of reconstruction of the diffusion operator by a spectrum is proved and sufficient solvability conditions are provided.

**Key words:** inverse problem, diffusion operator, spectrum.

### ВВЕДЕНИЕ

Обратными задачами спектрального анализа называются задачи, в которых требуется восстановить операторы по каким-либо их спектральным данным. Такими данными могут быть спектры, спектральная функция, данные рассеяния, функция Вейля и др. В настоящей работе впервые рассматривается вопрос о восстановлении на отрезке оператора диффузии по одному спектру в случае, когда коэффициенты уравнения диффузии симметричны относительно середины отрезка. Доказывается единственность и приводятся достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора диффузии с граничными условиями Дирихле. Аналогичный вопрос для оператора Штурма – Лиувилля с разделенными и неразделенными граничными условиями ранее полностью изучены ([1–7]).

Обозначим через  $W_2^n[0, \pi]$  пространство функций  $f(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , таких, что функции  $f^{(m)}(x)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  абсолютно непрерывны и  $f^{(n)}(x) \in L_2[0, \pi]$ . Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке  $[0, \pi]$  дифференциальным уравнением диффузии

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0 \quad (1)$$

и граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где  $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$ ,  $q(x) \in W_2^0[0, \pi] = L_2[0, \pi]$  — вещественные функции. Эту задачу будем обозначать через  $L$ . Для уравнения (1) при различных граничных условиях ранее подробно исследованы некоторые варианты обратных задач, в которых в качестве основных спектральных данных используются два, три спектра, спектральная функция, спектр и нормировочные числа, функция Вейля (см. [8–12] и библиогр. список в них).

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию симметричности

$$p(\pi - x) = p(x), \quad q(\pi - x) = q(x). \quad (3)$$

Пусть  $\{\lambda_n\}$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — спектр задачи  $L$ . В данной работе решается обратная задача, которая ставится следующим образом: *по заданному спектру  $\{\lambda_n\}$  построить функции  $p(x)$  и  $q(x)$ .*

### 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В этом пункте приводятся некоторые вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основных результатов этой работы.

Обозначим через  $c(x, \lambda)$  и  $s(x, \lambda)$  решения уравнения (1) при начальных условиях

$$c(0, \lambda) = s'(0, \lambda) = 1, \quad c'(0, \lambda) = s(0, \lambda) = 0. \quad (4)$$



Очевидно, что спектр задачи  $L$  будет совпадать с последовательностью нулей функции  $s(\pi, \lambda)$ .

**Лемма 1** [9]. *Справедливы следующие представления:*

$$c(\pi, \lambda) = \cos \pi(\lambda - a) - a_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi c_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t) e^{i\lambda t} dt,$$

$$s'(\pi, \lambda) = \cos \pi(\lambda - a) + a_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi c_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(t) e^{i\lambda t} dt,$$

где  $a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(t) dt$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}[p(0) - p(\pi)]$ ,  $c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [q(t) + p^2(t)] dt$ ,  $\psi_i(t) \in L_2[-\pi, \pi]$ ,  $i = 1, 2$ .

**Лемма 2** [9, 12]. *Для того чтобы целые функции  $u(z)$  и  $v(z)$  допускали представления*

$$u(z) = \sin \pi(z - a) + 4A\pi \frac{z - a}{4(z - a)^2 - 1} \cos \pi(z - a) + \frac{f(z - a)}{z - a},$$

$$v(z) = \cos \pi(z - a) - B\pi \frac{\sin \pi(z - a)}{z - a} + \frac{g(z - a)}{z - a},$$

где

$$f(z) = p_0 \sin \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{itz} dt, \quad F(t) \in L_2[-\pi, \pi], \quad f(0) = f'(0) = 0,$$

$$g(z) = p_1 \cos \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} G(t) e^{itz} dt, \quad G(t) \in L_2[-\pi, \pi], \quad g(0) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$u(z) = \pi(z - a) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{u_k - z}{k}, \quad u_k = k + a - \frac{A}{k} + \frac{\delta_k}{k},$$

$$v(z) = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\nu_k - z}{k - \frac{1}{2} \text{sign } k}, \quad \nu_k = k + a - \frac{1}{2} \text{sign } k - \frac{B}{k} + \frac{\delta'_k}{k},$$

где  $A, B, a, p_0, p_1$  — некоторые числа,  $\{\delta_k\}, \{\delta'_k\}$  — произвольные числовые последовательности, удовлетворяющие условию  $\sum_k \{|\delta_k|^2 + |\delta'_k|^2\} < \infty$ .

В случае уравнения диффузии справедлив следующий аналог леммы 4 из работы [13], который доказывается с использованием результатов статьи [8].

**Лемма 3.** *Тождество  $c(\pi, \lambda) \equiv s'(\pi, \lambda)$  имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия симметричности (3).*

Дальше в этом и в следующем пункте всюду будем считать, что функция  $q(x)$  удовлетворяет следующему дополнительному условию: для всех функций  $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$ ,  $y(x) \not\equiv 0$ , удовлетворяющих равенству  $y'(0)\overline{y(0)} - y'(\pi)\overline{y(\pi)} = 0$ , выполняется неравенство

$$\int_0^{\pi} [|y'(\pi)|^2 + q(x)|y(x)|^2] dx > 0.$$

Легко заметить, что последнее неравенство заведомо выполняется, если  $q(x) > 0$ .

**Лемма 4** [8]. *Собственные значения краевой задачи  $L$  вещественны, отличны от нуля и простые. Эти собственные значения можно располагать в последовательность*

$$\dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \tag{5}$$

причем при  $|n| \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_n = n + a + \frac{A}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \tag{6}$$

где  $a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx$ ,  $A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [q(x) + p^2(x)] dx$ ,  $\{\alpha_n\} \in \ell_2$ .

**Лемма 5.** Если выполняются условия (3), то  $s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$ .

**Доказательство.** Поскольку функции  $p(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют условию (3), то функция  $s(\pi - x, \lambda)$  также удовлетворяет уравнению (1). Так как функции  $c(x, \lambda)$ ,  $s(x, \lambda)$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), то функция  $s(\pi - x, \lambda)$  равна их линейной комбинации:  $s(\pi - x, \lambda) = C_1 c(x, \lambda) + C_2 s(x, \lambda)$ , где  $C_1, C_2$  — некоторые постоянные. Отсюда

$$-s'(\pi - x, \lambda) = C_1 c'(x, \lambda) + C_2 s'(x, \lambda). \quad (7)$$

Полагая в последних двух равенствах  $x = 0$  и учитывая (4), получим

$$C_1 = s(\pi, \lambda), \quad C_2 = -s'(\pi, \lambda). \quad (8)$$

Соотношения (7), (8) влекут  $s'(\pi - x, \lambda) = s'(\pi, \lambda)s'(x, \lambda) - s(\pi, \lambda)c'(x, \lambda)$ . Отсюда при  $x = \pi$  вытекает, что  $s'^2(\pi, \lambda) - s(\pi, \lambda)c'(\pi, \lambda) = 1$ . Из этого равенства при  $\lambda = \lambda_n$  следует, что  $s'^2(\pi, \lambda_n) = 1$ . Значит,  $s'(\pi, \lambda_n) = \pm 1$ . Известно [9], что  $\text{sign } s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$ . Последние два равенства показывают, что  $s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$ .  $\square$

## 2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ СПЕКТРОМ ЗАДАЧИ $L$

Исследуем теперь вопрос об однозначной определенности уравнения диффузии спектром задачи  $L$ .

По последовательности  $\{\lambda_n\}$  можно восстановить функцию  $s(\pi, \lambda)$  в виде бесконечного произведения. Согласно лемме 1, функция  $s'(\pi, \lambda)$  представима в виде

$$s'(\pi, \lambda) = \cos \pi(\lambda - a) + A\pi \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{f(\lambda)}{\lambda}, \quad (9)$$

где  $f(\lambda)$  — целая функция экспоненциального типа не выше  $\pi$ , принадлежащая  $L_2(-\infty, \infty)$  при вещественном  $\lambda$  (представление (9) в случае  $p(x) \equiv 0$  получено в [14, с. 38]). Из асимптотической формулы (6) получаем

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\lambda_n - n - a). \quad (10)$$

Далее, из формулы (9) получаем  $f(\lambda_n) = \lambda_n [s'(\pi, \lambda_n) - \cos \pi(\lambda_n - a)] - A\pi \sin \pi(\lambda_n - a)$ , откуда, принимая во внимание лемму 5, имеем

$$f(\lambda_n) = \lambda_n [(-1)^n - \cos \pi(\lambda_n - a)] - A\pi \sin \pi(\lambda_n - a). \quad (11)$$

Легко убедиться, что  $\{f(\lambda_n)\} \in \ell_2$ . Тогда функцию  $f(\lambda)$  можно восстановить по формуле

$$f(\lambda) = s(\pi, \lambda) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{f(\lambda_n)}{(\lambda - \lambda_n) \dot{s}(\pi, \lambda_n)}, \quad (12)$$

где точка над функцией означает дифференцирование по  $\lambda$ . Известно [15, с. 120], что этот ряд сходится равномерно на каждом компакте комплексной плоскости, а на вещественной оси — по норме пространства  $L_2(-\infty, \infty)$ . Последняя формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между  $\ell_2$  и множеством целых функций экспоненциального типа не выше  $\pi$ , принадлежащих  $L_2(-\infty, \infty)$  на вещественной оси. Соотношения (9)–(12) показывают, что функция  $s'(\pi, \lambda)$  однозначно определяется спектром  $\{\lambda_n\}$  краевой задачи  $L$ . Множество нулей  $\{\nu_n\}$  функции  $s'(\pi, \lambda)$  совпадает со спектром краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями

$$y(0) = y'(\pi) = 0. \quad (13)$$

По двум спектрам  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\nu_n\}$  однозначно восстанавливаются коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  уравнения (1) (см. [8]).

Таким образом, справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 1.** Задание спектра  $\{\lambda_n\}$  однозначно определяет краевую задачу  $L$ .

Легко заметить, что приведенное выше рассуждение содержит также процедуру восстановления функций  $p(x)$  и  $q(x)$  по спектру  $\{\lambda_n\}$ .



### 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Теперь приведем достаточные условия разрешимости обратной задачи.

**Теорема 2.** Для того чтобы последовательность вещественных чисел (5) была спектром некоторой краевой задачи вида  $L$  с вещественными коэффициентными функциями  $p(x)$  и  $q(x)$ , удовлетворяющими условиям (3), достаточно, чтобы имели место асимптотическая формула (6) и неравенство

$$\cos \pi a + A\pi \frac{\sin \pi a}{a} + \frac{s(0)}{a} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda_n s'(\lambda_n)} > 0, \quad (14)$$

где  $a \neq 0$  и  $A$  — вещественные числа,  $\varphi_n = [(-1)^n - \cos \pi(\lambda_n - a)](\lambda_n - a) - A\pi \sin \pi(\lambda_n - a)$ ,  $s(z) = \pi \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{n}$ .

**Доказательство.** Поскольку для  $\{\lambda_n\}$  имеет место асимптотическая формула (6), то, согласно лемме 2, функция  $(z - a)s(z)$  допускает следующее представление:

$$(z - a)s(z) = \sin \pi(z - a) - 4A\pi \frac{z - a}{4(z - a)^2 - 1} \cos \pi(z - a) + \frac{g(z - a)}{z - a},$$

где  $g(z) = a_0 \sin \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{itz} dt$ ,  $g(t) \in L_2[-\pi, \pi]$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ ,  $a_0$  — некоторое число.

Рассмотрим функцию

$$s_1(z) = \cos \pi(z - a) + A\pi \frac{\sin \pi(z - a)}{z - a} + \frac{\varphi(z - a)}{z - a}, \quad (15)$$

где

$$\varphi(z) = s(z) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\varphi_n}{(z - \lambda_n)s'(\lambda_n)}.$$

Принимая во внимание асимптотические формулы  $\cos x = 1 + O(x^2)$ ,  $\sin x = O(x)$ , при  $x \rightarrow 0$  и (6), получаем

$$\varphi_n = \left[ (-1)^n - (-1)^n \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] \cdot O(n) - O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е.  $\varphi_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ . Следовательно,  $\{\varphi_n\} \in \ell_2$ . Поэтому функция  $\varphi(z)$  — целая функция экспоненциального типа не выше  $\pi$ , суммируемая с квадратом на вещественной оси. Тогда нули  $\nu_n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) функции  $s_1(z)$  удовлетворяют асимптотической формуле

$$\nu_n = n - \frac{1}{2} \operatorname{sign} n + a + \frac{A}{n} + \frac{\xi_n}{n}, \quad \{\xi_n\} \in \ell_2 \quad (16)$$

(см. лемму 2). Полагая в равенстве (15)  $z = \lambda_n$ , получим

$$s_1(\lambda_n) = \cos \pi(\lambda_n - a) + A\pi \frac{\sin \pi(\lambda_n - a)}{\lambda_n - a} + \frac{\varphi_n}{\lambda_n - a} = (-1)^n. \quad (17)$$

С другой стороны, неравенство (14) показывает, что  $s_1(0) > 0$ . Поэтому в каждом интервале  $\dots, (\lambda_{-2}, \lambda_{-1}), (\lambda_{-1}, 0), (0, \lambda_1), (\lambda_1, \lambda_2), \dots$  лежит один и в силу асимптотики (16) только один нуль функции  $s_1(z)$ . Следовательно, нули функций  $s_1(z)$  и  $s(z)$  перемежаются в следующем смысле:

$$\dots < \lambda_{-2} < \nu_{-2} < \lambda_{-1} < \nu_{-1} < 0 < \nu_1 < \lambda_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \dots$$

Отсюда, учитывая асимптотические формулы (6) и (16), заключаем, что последовательности  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\nu_n\}$  удовлетворяют условиям теоремы 3 работы [8]. Поэтому  $\{\lambda_n\}$ ,  $\{\nu_n\}$  являются спектрами краевых задач, порожденных на отрезке  $[0, \pi]$  одним и тем же уравнением (1) с вещественными коэффициентами  $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$ ,  $q(x) \in L_2[0, \pi]$  и граничными условиями (2), (13) и

$$s(\lambda) = s(\pi, \lambda), \quad s_1(\lambda) = s'(\pi, \lambda). \quad (18)$$



Остается показать, что восстановленные функции  $p(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют условиям (3). Действительно, из равенств (17), (18) и тождества  $c(\pi, \lambda)s'(\pi, \lambda) - c'(\pi, \lambda)s(\pi, \lambda) = 1$  вытекает, что

$$c(\pi, \lambda_n) = \frac{1}{s'(\pi, \lambda_n)} = \frac{1}{s_1(\lambda_n)} = (-1)^n.$$

Поэтому функция  $a(\lambda) = c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda)$  обращается в нуль в нулях функции  $s(\lambda) = s(\pi, \lambda)$ .

Из равенств (15), (18) и леммы 1 вытекает, что для построенной задачи  $a_1 = 0$  ( $p(0) = p(\pi)$ ). Кроме того, из представлений для  $c(\pi, \lambda)$  и  $s'(\pi, \lambda)$  (см. лемму 1) следует, что

$$a(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t)e^{i\lambda t} dt,$$

где  $\Psi(t) \in L_2[-\pi, \pi]$ . Отсюда получается  $|a(\lambda)| = |\lambda|^{-1}e^{\pi|\operatorname{Im} \lambda|} o(1)$ , при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Значит, функция  $\nu(\lambda) = a(\lambda)/s(\lambda)$  — целая, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\lambda \in K_n} |\nu(\lambda)| = 0$ , где  $K_n$  — последовательность неограниченно расширяющихся контуров, ограничивающих квадраты  $\{\lambda : |\operatorname{Re} \lambda - a| \leq n + \frac{1}{2}, |\operatorname{Im} \lambda| \leq n + \frac{1}{2}\}$ . Тогда по теореме Лиувилля  $\nu(\lambda) \equiv 0$ . Таким образом, при любом  $\lambda$  имеет место равенство  $c(\pi, \lambda) = s'(\pi, \lambda)$  (для восстановленного уравнения). Отсюда, согласно лемме 3, получаем, что  $p(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют условию симметричности (3).  $\square$

**Замечание 1.** Условия теоремы 2 являются также необходимыми, если функция  $q(x)$  удовлетворяет дополнительному условию, приведенному в п. 1. Но построенная вещественная функция при доказательстве теоремы 2 не обязана удовлетворять этому условию.

**Замечание 2.** Подобные результаты могут быть получены и в случае граничных условий вида  $y'(0) - hy(0) = 0$ ,  $y'(\pi) + hy(\pi) = 0$ , где  $h$  — вещественное число. При этом широко используются результаты, полученные в работе [16].

### Библиографический список

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
2. Левитан Б.М. Об определении оператора Штурма–Лиувилля по одному и двум спектрам // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1978. Т. 42, № 1. С. 185–199.
3. Poschel J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. N.Y.: Academic Press, 1987. 192 p.
4. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Определение дифференциального оператора по спектру // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 4. С. 59–66.
5. Yurko V. A. The inverse spectral problem for differential operators with non-separated boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 250. P. 266–289.
6. Набиев И.М. Свойства спектров и восстановление дифференциальных операторов на отрезке: Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук. Баку, 2007. 36 с.
7. Мазур Т. В. О разрешимости обратной задачи Штурма–Лиувилля в симметричном случае // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, № 1. С. 21–24.
8. Гусейнов Г. Ш. К спектральному анализу квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1292–1296.
9. Гусейнов Г. Ш. Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку, 1986. Вып. 7. С. 51–101.
10. Юрко В. А. Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 10. С. 137–160.
11. Набиев И.М. Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 2. С. 168–170.
12. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66.
13. Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 569–576.
14. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 332 с.
15. Левин Б.Я. Целые функции (курс лекций). М.: Изд-во МГУ, 1971. 124 с.
16. Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш. Определение оператора диффузии по спектральным данным // Докл. АН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 2. С. 19–23.