



маемых сред // Проблемы механики сплошной среды (к 60-летию акад. В.П. Мясникова): Сб. науч. тр. Владивосток, 1996. С. 116–127.  
11. Быковцев Г.И., Колокольчиков А.В., Сыгуров П.Н.

Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1984. № 6. С. 148–156.

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

П.Ф. Недорезов

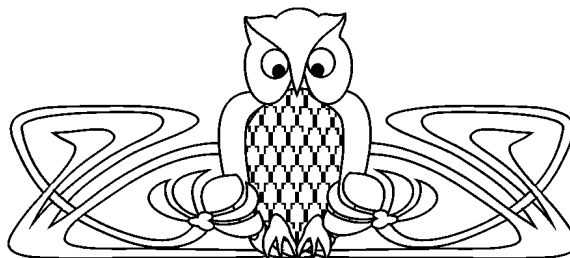
Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: p1934n@yandex.ru

В рамках гипотез Кирхгофа рассматривается задача статического поперечного изгиба тонкой прямоугольной пластинки из анизотропного материала, у которого в каждой точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости пластинки. Предполагается, что вид граничных условий вдоль каждой из сторон контура не меняется.

Двумерная краевая задача для определения прогиба модифицированным методом сплайн-коллокации сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно.

Приведены результаты числовых расчетов для двух вариантов закрепления граничного контура.

**Ключевые слова:** анизотропная пластинка, изгиб пластинки, напряженно-деформированное состояние, модифицированный метод сплайн-коллокации.



## Numerical Study of Stress-Strain State of a Thin Anisotropic Rectangular Plate

P.F. Nedorezov

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
E-mail: p1934n@yandex.ru

Static bending of a thin rectangular anisotropic plate is considered in the framework of Kirchhoff hypotheses. At each point of the plate there is one plane of elastic symmetry parallel to the middle plane of the plate. It is assumed that the type of boundary conditions does not change along each of the straight sides.

By applying of a modified method of spline collocation the two-dimensional boundary value problem for the determination of deflection is reduced to a boundary value problem for the system of ordinary differential equations, which is solved numerically.

The results of numerical calculations for two variants of the boundary conditions on the contour of the plate are presented.

**Key words:** anisotropic plate, bending of plate, stress-strain state, modified method of spline collocation.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается статический изгиб прямоугольной пластинки с размерами в плане  $a \times b$  и малой толщиной  $h$  (рис. 1) под действием поперечной нагрузки интенсивности  $q(x, y)$ . Пластинка изготовлена из анизотропного материала, у которого в каждой

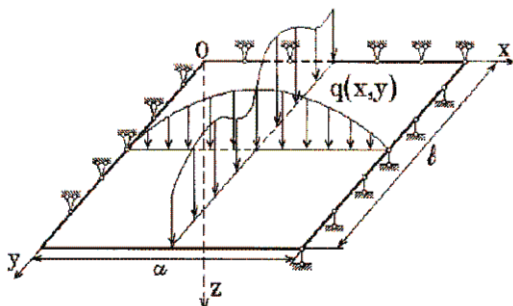


Рис. 1. Анизотропная пластинка

точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Деформации считаются малыми и подчиняются закону Гука.

Уравнение для определения прогиба  $w$  точек срединной плоскости такой пластинки в рамках классической теории Кирхгофа приводится в [1]. Это уравнение после перехода к безразмерным переменным  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$  и ряда преобразований для безразмерного прогиба  $W(\xi, \eta) = w(x, y)/h$  может быть записано в виде

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\gamma_2 c \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(\gamma_1 + \gamma_4) c^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 2\gamma_3 c^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi \partial \eta^3} + \gamma_5 c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = q(\xi, \eta)/D_{11}^* \quad (1)$$



Здесь  $c = a/b$ ,  $D_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) — соответствующие жесткости относительно осей  $x$  и  $y$ ,  $D_{11}^* = D_{11}ha^{-4}$ ,  $\gamma_1 = D_{12}/D_{11}$ ,  $\gamma_2 = 2D_{16}/D_{11}$ ,  $\gamma_3 = 2D_{26}/D_{11}$ ,  $\gamma_4 = 2D_{66}/D_{11}$ ,  $\gamma_5 = D_{22}/D_{11}$ .

Внутренние усилия и моменты в пластинке через производные от функции  $W(\xi, \eta)$  выражаются по формулам [1]

$$\begin{aligned} M_x &= -a^2 D_{11}^* \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma_1 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \gamma_2 c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ M_y &= -a^2 D_{11}^* \left( \gamma_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma_5 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \gamma_3 c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ H_{xy} &= -0.5a^2 D_{11}^* \left( \gamma_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma_3 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + 2\gamma_4 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ N_x &= -aD_{11}^* \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + 1.5\gamma_2 c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (\gamma_1 + \gamma_4)c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + 0.5\gamma_3 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right), \\ N_y &= -aD_{11}^* \left( 0.5\gamma_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (\gamma_1 + \gamma_4)c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 1.5\gamma_3 c^2 + \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + \gamma_5 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right), \\ N_x^* &= -aD_{11}^* \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + 2\gamma_2 c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (\gamma_1 + 2\gamma_4)c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + \gamma_3 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right), \\ N_y^* &= -aD_{11}^* \left( \gamma_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (\gamma_1 + 2\gamma_4)c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 2\gamma_3 c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + \gamma_5 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) должно быть подчинено граничным условиям, вид которых определяется условиями нагружения или деформирования контура пластинки.

Для численного определения напряженно-деформированного состояния (НДС) такой пластинки применяется модифицированный метод сплайн-коллокации (ММСК) [2], который в отличие от классического метода (КМСК) [3] позволяет решать задачи при любых внешних воздействиях на контуре. Единственное ограничение состоит в том, что вид условий вдоль каждой стороны граничного контура предполагается неизменным.

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ $W(\xi, \eta)$ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ УСЛОВИЙ НА СТОРОНАХ $\xi = 0$ И $\xi = 1$

Следуя [2], будем искать функцию  $W(\xi, \eta)$  в виде разложения

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi)W_j(\eta). \quad (3)$$

Здесь  $B_{5,j}(\xi)$  — нормализованные  $B$  — сплайны пятой степени [4], построенные на равномерной сетке  $\xi_i = ih_x$  ( $i = \overline{-5, N+5}$ ),  $h_x = 1/N$ ; нумерация сплайнов ведется по среднему узлу интервала-носителя  $\xi_{j-3} \leq \xi \leq \xi_{j+3}$ , на котором сплайн  $B_{5,j}(\xi)$  отличен от нуля. Функции  $W_{-k}(\eta)$  и  $W_{N+k}(\eta)$  должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия на сторонах  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Уравнения для остальных функций  $W_j(\eta)$  получаются из требования, чтобы уравнение (1) при подстановке выражения (3) выполнялось в точках коллокации  $\xi = \xi_i^*$  ( $i = \overline{0, N}$ ).

Рассмотрим ход решения задачи для нескольких вариантов граничных условий на стороне  $\xi = 0$ :

а) сторона  $\xi = 0$  деформирована заданным образом

$$W(0.0; \eta) = w_0^*(\eta), \quad \frac{\partial W(0.0; \eta)}{\partial \xi} = \Theta_0^*(\eta). \quad (4a)$$

Подстановка выражения (3) в условия (4a) приводит к системе двух линейных алгебраических уравнений, из которой следует

$$W_{-p}(\eta) = m_{0,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,k} W_k(\eta) \quad (p = 1, 2), \quad (5a)$$



где  $\alpha_{p,k}$  — известные коэффициенты, а  $m_{0,p}$  выражаются через  $w_0^*(\eta)$  и  $\Theta_0^*(\eta)$ .

б) сторона  $\xi = 0$  нагружена моментами и усилиями заданной интенсивности

$$M_x(0.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_0^*(\eta), \quad N_x^*(0.0; \eta) = -a D_{11}^* p_0^*(\eta). \quad (4b)$$

Тогда из (4b) и (3) получаются два дифференциальных соотношения, которые преобразуются к виду

$$\frac{d^2 W_{-p}}{d\eta^2} = m_{0,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,k} \frac{d^2 W_k}{d\eta^2} + c^{-1} \sum_{r=-2}^2 \beta_{p,r} \frac{dW_r}{d\eta} + c^{-2} \sum_{r=-2}^2 \lambda_{p,r} W_r(\eta) \quad (p = 1, 2) \quad (5b)$$

с известными коэффициентами  $\alpha_{p,k}$ ,  $\beta_{p,k}$ ,  $\lambda_{p,k}$  и функциями  $m_{0,p}(\eta)$ .

с) если при  $\xi = 0$  заданы смешанные граничные условия

$$W(0.0; \eta) = w_0^*(\eta), \quad M_x(0.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_0^*(\eta), \quad (4c)$$

то при подстановке разложения (3) в условия (4c) получатся алгебраическое уравнение, из которого определяется  $W_{-2}(\eta)$ , и дифференциальное соотношение для функции  $W_{-1}(\eta)$

$$W_{-2}(\eta) = \left( w_0^*(\eta) - \sum_{k=-1}^2 B_{5,k}(\xi_0) W_k(\eta) \right) / B_{5,-2}(\xi_0),$$

$$\frac{dW_{-1}}{d\eta} = m_0(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{1,k} \frac{dW_k}{d\eta} + c^{-1} \sum_{s=-1}^2 \mu_s W_s(\eta). \quad (5c)$$

Как и в предыдущих случаях, коэффициенты  $\alpha_{1,k}$ ,  $\mu_s$  и функция  $m_0(\eta)$  известны. Совершенно аналогично из условий на стороне  $\xi = 1$  получаются формулы и соотношения, определяющие функции  $W_{N+k}(\eta)$  ( $k = 1, 2$ ):

а) если на стороне  $\xi = 1$  задаются прогиб и угол поворота

$$W(1.0; \eta) = w_N^*(\eta), \quad \frac{\partial W(1.0; \eta)}{\partial \xi} = \Theta_N^*(\eta), \quad (6a)$$

то

$$W_{N+p}(\eta) = m_{N,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,N-k} W_{N-k}(\eta) \quad (p = 1, 2); \quad (7a)$$

б) при нагруженной стороне  $\xi = 1$

$$M_x(1.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_N^*(\eta), \quad N_x^*(1.0; \eta) = -a D_{11}^* p_N^*(\eta), \quad (6b)$$

$$\frac{d^2 W_{N+p}}{d\eta^2} = m_{N,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,N-k} \frac{d^2 W_{N-k}}{d\eta^2} + c^{-1} \sum_{r=-2}^2 \beta_{p,N-r} \frac{dW_{N-r}}{d\eta} +$$

$$+ c^{-2} \sum_{r=-2}^2 \lambda_{p,N-r} W_{N-r}(\eta) \quad (p = 1, 2); \quad (7b)$$

с) в случае смешанных граничных условий на стороне  $\xi = 1$

$$W(1.0; \eta) = w_N^*(\eta), \quad M_x(1.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_N^*(\eta), \quad (6c)$$

для функций  $W_{N+k}(\eta)$  ( $k = 1, 2$ ) имеем

$$W_{N+2}(\eta) = \left( w_N^*(\eta) - \sum_{r=N-2}^{N+1} B_{5,r}(\xi_N) W_r(\eta) \right) / B_{5,N+2}(\xi_N),$$

$$\frac{dW_{N+1}}{d\eta} = m_N(\eta) + \sum_{r=N-2}^N \alpha_{1,r} \frac{dW_r}{d\eta} + c^{-1} \sum_{s=N-2}^{N+1} \mu_s W_s(\eta). \quad (7c)$$



Различные комбинации из приведенных выше выражений для функций  $W_{-k}(\eta)$  и  $W_{N+k}(\eta)$  ( $k = 1, 2$ ) позволяют по формуле (3) получить разложения функции  $W(\xi, \eta)$ , удовлетворяющие разным вариантам граничных условий при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Эти разложения могут быть представлены в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=j_0}^{j_N} \varphi_j(\xi) W_j(\eta) + M(\xi, \eta), \quad (8)$$

где функция  $M(\xi, \eta)$  известным образом выражается через характеристики внешнего воздействия на сторонах  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  и  $B$  — сплайны  $B_{5,r}(\xi)$  ( $r = -2, -1, N+1, N+2$ ).

Отдельный интерес представляют однородные граничные условия (4a), (4b), (4c) и (6a), (6b), (6c). В этом случае функция  $W(\xi, \eta)$  в виде (8) при значениях  $j_0 = 0$ ,  $j_N = N$  и

$$\varphi_k(\xi) = B_{5,k}(\xi) + \sum_{p=1}^2 \alpha_{p,k} B_{5,-p}(\xi), \quad \varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) \quad (j = \overline{3, N-3})$$

$$\varphi_{N-k}(\xi) = B_{5,N-k}(\xi) + \sum_{p=1}^2 \alpha_{p,N-k} B_{5,N+k}(\xi) \quad (k = \overline{0, 2})$$

удовлетворяет условиям жесткого закрепления сторон  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ .

Если  $j_0 = -2$ ,  $j_N = N+2$ ,  $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi)$  ( $j = \overline{-2, N+2}$ ), а функции  $W_{-p}(\eta)$  и  $W_{N+p}(\eta)$  ( $p = 1, 2$ ) удовлетворяют однородным уравнениям (5b) и (6b), то из (8) получается представление  $W(\xi, \eta)$  для свободных от нагрузки сторонах  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ .

При  $j_0 = -1$ ,  $j_N = N+1$ ,

$$\varphi_s(\xi) = \frac{1}{B_{5,-2}(\xi_0)} [B_{5,-2}(\xi_0) B_{5,s}(\xi) - B_{5,-2}(\xi) B_{5,s}(\xi_0)],$$

$$\varphi_{N-s}(\xi) = \frac{1}{B_{5,N+2}(\xi_N)} [B_{5,N+2}(\xi_N) B_{5,N-s}(\xi) - B_{5,N+2}(\xi) B_{5,N-s}(\xi_N)] \quad (s = \overline{-1, 2}),$$

$$\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) \quad (j = \overline{3, N-3})$$

и функциях  $W_{-1}(\eta)$  и  $W_{N+1}(\eta)$ , удовлетворяющих однородным уравнениям (5c) и (6c), формула (8) определяет  $W(\xi, \eta)$  при свободно опертых сторонах  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ .

В перечисленных случаях однородных условий в формуле (8) функцию  $M(\xi, \eta)$  следует полагать равной нулю.

### 3. СИСТЕМЫ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ. ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Количество слагаемых в разложении (8) функции  $W(\xi, \eta)$  и, следовательно, число неизвестных функций  $W_j(\eta)$ , подлежащих определению, меняется в зависимости от вида граничных условий при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Минимальное число неизвестных  $W_j(\eta)$ , равное  $N+1$ , получается в случае граничных условий (4a) и (6a). Максимальное число неизвестных  $W_j(\eta)$  в разложении (8) равно  $N+5$  и получается при заданных на сторонах  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  внешних усилиях, в случае смешанных граничных условий при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  число неизвестных  $W_j(\eta)$  будет  $N+3$ .

В предлагаемой методике переход от двумерной краевой задачи для функции  $W(\xi, \eta)$  к одномерной задаче для неизвестных  $W_j(\eta)$  выполняется методом коллокации. С этой целью вводится в рассмотрение система точек коллокации  $\xi = \tilde{\xi}_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ),  $\tilde{\xi}_N < 1$  и требуется, чтобы результат подстановки (8) в (1) выполнялся вдоль прямых  $\xi = \tilde{\xi}_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ). Полученную таким образом систему  $N+1$  обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций  $W_j(\eta)$  условно будем называть системой «А».



В случае, когда на сторонах  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  заданы смещения — условия (4a) и (6a), система «А» является разрешающей системой уравнений для определения всех неизвестных  $W_j(\eta)$  ( $j = \overline{0, N}$ ). Эта система уравнений стандартным приемом преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая в векторной форме записывается в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{d\eta} = A\bar{Y}(\eta) + \bar{F}(\eta), \quad (9)$$

где компонентами неизвестного вектора  $\bar{Y}(\eta) = \{y_i(\eta)\}$  ( $i = \overline{0, 4N+3}$ ) являются функции  $W_j(\eta)$  ( $j = \overline{0, N}$ ) и их производные до третьего порядка включительно, а матрица  $A$  и вектор  $\bar{F}$  известны.

Требую, чтобы граничные условия на сторонах  $\eta = 0$  и  $\eta = 1$  выполнялись в точках коллокации  $\xi = \tilde{\xi}_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ) для значений компонентов вектор-функции  $\bar{Y}(\eta)$ , получаем систему  $4N + 4$  соотношений, которую будем условно называть условиями «Б». Условия «Б» являются в рассматриваемом случае граничными условиями для вектор-функции  $\bar{Y}(\eta)$  и в векторной форме записываются в виде

$$H_1\bar{Y}(0) = \bar{e}_1, \quad H_2\bar{Y}(1) = \bar{e}_2, \quad (10)$$

где компоненты матриц  $H_k$  и векторов  $\bar{e}_k$  ( $k = 1, 2$ ) соответствующей размерности известны.

Если при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  задается распределение внешних усилий — условия (4b) и (6b), то к уравнениям системы «А» следует добавить уравнения (5b) и (7b) и из уравнений системы «А» исключить третьи и четвертые производные функций  $W_{-p}(\eta)$  и  $W_{N+p}(\eta)$  ( $p = 1, 2$ ). Выражения для этих производных получаются из (5b) и (7b) дифференцированием. Полученная система также преобразуется к виду (9), где компонентами вектора неизвестных  $\bar{Y}(\eta) = \{y_i(\eta)\}$  ( $i = \overline{0, 4N+11}$ ) являются функции  $W_j(\eta)$  и их производные до третьего порядка включительно, а также функции  $W_{-p}(\eta)$ ,  $W_{N+p}(\eta)$  ( $p = 1, 2$ ) и их первые производные. Выполнение граничных условий при  $\eta = 0$  и  $\eta = 1$  требуется не только в точках коллокации  $\xi = \tilde{\xi}_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ), но и в концевых точках отрезков  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Таким образом, к условиям «Б» добавляются еще восемь условий (по два условия в каждой угловой точке). Соответствующие граничные условия для вектора  $\bar{Y}(\eta)$  по-прежнему представляются в виде (10).

В случае граничных условий смешанного типа — условия (4c) и (6c) — система уравнений «А» с добавленными к ней уравнениями (5c) и (7c), вообще говоря, составляет полную систему уравнений для функций  $W_s(\eta)$  ( $s = \overline{-1, N+1}$ ). Этой системе эквивалентна системе  $4N + 6$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, для однозначного решения которой необходимо иметь  $4N + 6$  граничных условий. Как и ранее,  $4N + 4$  условия составляют условия «Б». Недостающие условия естественно формулировать в угловых точках пластинки. Однако в каждой из этих точек можно записать по два условия, при этом условия для  $W$  будут выполнены автоматически. Поэтому вопрос о том, какие два из четырех оставшихся условий выбрать, имеет неоднозначное решение.

Чтобы избежать подобной ситуации, за систему разрешающих уравнений в этом случае примем систему «А», дополненную продифференцированными по  $\eta$  уравнениями (5c) и (7c). Порядок такой системы равен  $4N + 8$ , и в качестве граничных условий для нее можно взять  $4N + 4$  условия «Б», к которым добавлены оставшиеся четыре условия в угловых точках. Такой подход делает постановку краевой задачи для указанной системы разрешающих уравнений математически корректной. Компонентами вектора  $\bar{Y}(\eta)$  в этом случае будут функции  $W_j(\eta)$  ( $j = \overline{0, N}$ ), их производные до третьего порядка включительно, а также функции  $W_{-1}(\eta)$ ,  $W_{N+1}(\eta)$  и их первые производные. Полученная таким способом краевая задача снова записывается в виде (9), (10).

Аналогичным образом строятся краевые задачи, если на сторонах  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  задаются граничные условия разного типа.

Численное решение краевых задач (9), (10) выполняется методом дискретной ортогонализации, который обеспечивает высокую точность результатов.



#### 4. ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрим частный случай прямоугольной пластинки, изготовленной из ортотропного материала. Предполагается, что в каждой точке одно главное направление упругости перпендикулярно срединной плоскости, а два других — направления  $x'$  и  $y'$  (рис. 2) — составляют со сторонами пластинки угол  $\psi$ . Пластинка изгибается поперечной нагрузкой интенсивности  $q(x, y)$ .

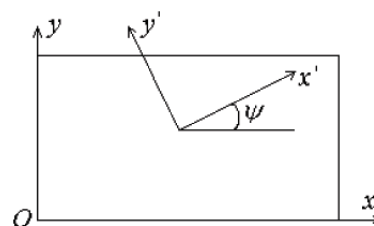


Рис. 2. Ортотропная пластинка

Если угол  $\psi$  равен нулю, то дифференциальное уравнение для прогиба точек срединной поверхности не содержит слагаемых с нечетными производными по переменным  $\xi$  и  $\eta$  и  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$  [1]. Применение ММСК для численного определения НДС такой пластинки детально изложено в работе [5].

При  $\psi \neq 0$  для ортотропной пластинки остается в силе [1] уравнение (1). Однако теперь коэффициенты  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) не являются независимыми, так как жесткости  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) относительно осей  $x$  и  $y$  выражаются через главные жесткости  $D_1, D_2, D_k, D_3 = D_1\nu_2 + 2D_k$ , вычисленные относительно осей  $x'$  и  $y'$  по известным формулам [1].

В этом случае НДС пластинки определяется в соответствии с методикой, изложенной в разд. 2 и 3.

#### 5. ПРИМЕРЫ ЧИСЛОВЫХ РАСЧЕТОВ

Изложенная методика была применена при численном исследовании НДС квадратных пластинок ( $a = b = 1\text{м}$ ) под действием распределенной статической нагрузки интенсивности  $q(x, y) = q_0 = \text{const}$ . Предполагалось, что края  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$  жестко закреплены, а края  $\xi = 1$  и  $\eta = 1$  свободны; угловая точка  $\xi = \eta = 1$  либо свободна — задача 1, либо подкреплена шарниром — задача 2. Вычисления выполнены для пластинок из ортотропного материала АГ-4с, у которого [6]  $E_1 = 2.1 \cdot 10^4$  МПа,  $E_2 = 1.6 \cdot 10^4$  МПа,  $G = 0.42 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_2 = 0.07$ .

Значения функции  $W$  в долях величины  $q_0/D_*$  ( $D_* = E_1 h_0^4 / 12(1 - \nu_1 \nu_2)$ ) в некоторых характерных точках пластинки при  $\psi = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/3$  приведены в табл. 1 ( $D_* = 1.761 \cdot 10^3 h_0^4$ ). Для задачи 2 в столбце значений  $\max W$  в скобках указаны координаты точек, где достигается максимум  $W$ .

Таблица 1

Значения функции  $W$  (материал АГ-4с)

Задача	$\psi$	$\max W$	$W(0.5; 0.5)$	$W(0.5; 1.0)$	$W(1.0; 0.5)$
1	0.0	5.953E-2	1.081E-2	2.545E-2	2.670E-2
	$\pi/12$	5.356E-2	1.073E-2	2.396E-2	2.938E-2
	$\pi/6$	5.398E-2	1.126E-2	2.484E-2	2.864E-2
	$\pi/4$	5.158E-2	1.101E-2	2.488E-2	2.437E-2
2	0.0	8.138E-3 (1.00; 0.59)	5.047E-3	6.197E-3	7.726E-3
	$\pi/12$	8.191E-3 (1.0; 0.53)	5.231E-3	7.230E-3	8.155E-3
	$\pi/6$	8.181E-3 (0.74; 0.67)	5.626E-3	7.427E-3	7.632E-3
	$\pi/4$	7.879E-3 (0.70; 0.70)	5.628E-3	6.670E-3	6.632E-3

Аналогичные результаты для пластинок из дельта-древесины, которая обладает более сильной анизотропией по сравнению с АГ-4с, с постоянными  $E_1 = 3.05 \cdot 10^4$  МПа,  $E_2 = 0.467 \cdot 10^4$  МПа,  $G = 0.22 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_2 = 0.02$  [1], представлены в табл.2 ( $D_* = 2.626 \cdot 10^3 h_0^4$ ).

Приведенные данные позволяют оценить влияние ориентации сторон пластинки по отношению к главным направлениям ортотропии и степень анизотропии материала на прогибы пластинки.



Таблица 2

Значения функции  $W$  (дельта-древесина)

Задача	$\psi$	$\max W$	$W(0.5; 0.5)$	$W(0.5; 1.0)$	$W(1.0; 0.5)$
1	0.0	1.0832E-1	2.165E-2	4.060E-2	5.789E-2
	$\pi/12$	1.377E-1	2.261E-2	5.207E-2	7.374E-2
	$\pi/6$	1.5151E-1	2.114E-2	5.5689E-2	7.385E-2
	$\pi/4$	2.735E-2	3.604E-2	1.492E-1	1.034E-1
2	0.0	3.129E-2 (1.00; 0.58)	1.275E-2	6.545E-3	3.010E-2
	$\pi/12$	3.313E-2 (1.00; 0.55)	1.326E-2	1.016E-2	3.247E-2
	$\pi/6$	2.506E-2 (1.00; 0.59)	1.190E-2	1.149E-2	2.387E-2
	$\pi/4$	4.443E-2 (0.61; 1.00)	1.501E-2	4.032E-2	1.428E-2

**Библиографический список**

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.
2. Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. Самара: СамГТУ, 2005. Ч. 1. С. 203–209.
3. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–26.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. Шевцова Ю.В. Применение модифицированного метода сплайн-коллокации в задачах изгиба ортотропных прямоугольных пластинок // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2005. С. 146–149.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 268 с.