



$u_6 = -3.32$ ,  $u_7 = -0.6$ ,  $u_8 = 3.4$ . Эти два случая являются обобщением аналогичных результатов Рыжова [9] при рассмотрении вопроса склейки течения Мейера с симметричным течением Т.-Т.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены автомодельные решения, соответствующие основным (имеющим определенный газодинамический смысл) показателям автомодельности. Установлена связь автомодельных решений с полиномо-параметрическими и осуществлен переход к компонентам скорости  $u$ ,  $v$ . Класс полиномо-параметрических решений является некоторым обобщением автомодельных, поскольку содержит одновременно несколько автомодельных и поэтому весьма интересен с точки зрения дальнейшего изучения (так как позволяет исследовать несколько различных задач с помощью одного решения). Реализована технология нахождения всех коэффициентов в полиномо-параметрическом представлении при выбранном решении ключевого уравнения. Изучены сопловые течения с параболической УВ, переводящей симметричное течения Мейера в несимметричное относительно продольной оси канала.

## Библиографический список

1. Фалькович С.В., Чернов И.А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. С. 280–284.
2. Немцова Е.О. Параметрический метод в изучении трансзвуковых уравнений / Саратов, 2005. Деп. в ВИНИТИ 26.07.05 № 1089-B2005. 18 с.
3. Немцова Е.О. Параметрические решения трансзвукового уравнения и их связь с автомодельными // Материалы Четвертой молодежной науч. школы-конф.: Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2005. Т. 31. С. 110–113.
4. Чернов И.А. Полиномо-параметрические решения трансзвуковых уравнений // Аэродинамика. Нелинейные проблемы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 91–102.
5. Севостьянов Г.Д. Структура элементарных околозвуковых решений // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 109–117.
6. Заславский Б.И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды // Прикладная математика и техническая физика. 1964. № 4. С. 57–65.
7. Заславский Б.И., Клепикова Н.А. Об одном классе точных частных решений уравнений околосопловых течений газа // Прикладная математика и техническая физика. 1965. № 6. С. 65–68.
8. Кузнецова Е.О. Модель нерасчетного режима течения в сопле Лавала // Материалы Пятой молодежной науч. школы-конф.: Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2006. Т. 34. С. 136–139.
9. Рыжов О.С. О работе сопел Лавала в нерасчетных режимах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, №4.

УДК 517.958:536.2

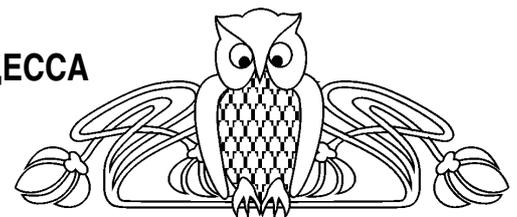
## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕРМОРАСЩЕПЛЕНИЯ ГРАФИТА

В.Ю. Ольшанский\*, К.Г. Бахтин, В.Ю. Михайлов, Ю.Н. Нагар, А.В. Серебряков

\*Саратовский государственный университет, кафедра вычислительного эксперимента в механике, Энгельский технологический институт (филиал Саратовского государственного технического университета), кафедра высшей математики и механики  
E-mail: olsh@techn.sstu.ru

Рассмотрена математическая модель процесса получения изделий из порошка окисленного графита путем терморасширения при нагреве в металлической форме. Выявленное в численном эксперименте выравнивание температур к заключительной стадии процесса позволяет построить асимптотическое разложение решения в одномерном случае. Поле температур и скоростей в двумерном осесимметричном случае определяется численно методом сквозного счета.

Изделия из терморасширенного графита (ТРГ) широко используются в технике в силу своих теплоизолирующих и огнезащитных свойств и устойчивости к агрессивным средам. Одним из перспективных способов получения изделий заданной формы и пористости является терморасширение окисленного графита (ОГ) в газопроницаемой форме [1] — так называемое химическое прессование.



### Mathematical Simulating Thermal Exfoliation of Graphite

V.Y. Olshansky, K.G. Bakhtin, V.Y. Mikhailov, Y.N. Nagar, A.V. Serebrjakov

There has been examined a mathematical model of item obtaining from the oxidized graphite powder by means of exfoliating at heating in a metal mould. Temperature equaling discovered in a numerical experiment by the ultimate stage of the process allows to build asymptotic expansion of the solution in one-dimensional case. Temperature- and speeds fields in two-dimensional axisymmetric case are numerically defined by the shock-capturing method.



Механизм терморасширения, а также теплофизические свойства ТРГ изучены достаточно мало. Ниже рассмотрена математическая модель процесса вспенивания графита в ограниченном объеме, когда образование ТРГ представляется как фазовый переход с учетом тепломассопереноса [2].

1. Рассмотрим одномерную модель процесса химического прессования, когда слой ОГ толщины  $h_0$ , насыпанный на нижнюю пластину пресс-формы, под действием нагрева извне начинает вспениваться. Слой ТРГ толщины  $\xi_n(t)$  поднимает на себе слой ОГ толщины  $h(t)$ . В некоторый момент  $t = t_1$  слой ОГ касается верхней пластины и начинает образовываться верхний слой ТРГ толщины  $\xi_b(t)$ . Процесс заканчивается к моменту времени  $t = t_2: h(t_2) = 0$ .

Распределение температуры и положение границ раздела фаз можно получить из решения краевой задачи для уравнений теплопроводности, включающих конвективные члены, с условиями на внешних границах и условиями Стефана на подвижных границах раздела [4]. При  $t_1 < t < t_2$  имеем

$$\rho_i(t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = F_i \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad x \in D_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = Bio^{(i)} \cdot (u_i(l_i, t) - u_\infty), \quad i = 1, 3, \quad (2)$$

$$u_1(x_2(t), t) = u_2(x_2(t), t) = u_2(x_3(t), t) = u_3(x_3(t), t) = u_*, \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{k_j}{k_1} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_j} = \Lambda \cdot \left( \frac{\partial x_j}{\partial t} - y'(t) \right) \cdot (-1)^j, \quad j = 2, 3. \quad (4)$$

Здесь  $\rho_i = \tilde{\rho}_i / \tilde{\rho}_1$ ,  $t = \tilde{t} / T$ ,  $x = \tilde{x} / l$ ,  $u = \tilde{u} / u_*$ ,  $\tilde{\rho}_i$ ,  $c_i$ ,  $k_i$  — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности в области  $D_i$ ,  $u_*$  — температура термического расщепления ОГ,  $F_i = (k_i T) / (\rho_i c_i l^2)$  — число Фурье,  $\Lambda = (\lambda \rho_i l^2) / (k_1 u_* T)$ ,  $\lambda$  — количество тепла на фазовый переход единицы массы,  $v_i(x, t)$  — безразмерные скорости вещества в областях  $D_1$ ,  $D_3$ ,  $y'(t)$  — скорость слоя ОГ.

Распределение температуры в начальный момент  $t = 0$  задано, расчет стадии процесса от  $t = 0$  до  $t = t_1$  [4] дает начальное распределение температуры для задачи (1)–(4).

Возможность замены внешних слоев из тонких металлических пластин условиями третьего рода (2) на внешних границах областей  $D_1$ ,  $D_3$  была изучена в работе [5], где показано, что для тонких пластин (до 0.1l) вносимая погрешность достаточно мала.

Плотности ТРГ в нижнем и верхнем слоях можно выразить через положения границ раздела и смещение  $y$  слоя ОГ,

$$\rho_2(t) = \rho_1 \left( 1 - \frac{1 - h_0 + y(t)}{\xi_n(t)} \right), \quad \rho_3(t) = \rho_1 \left( 1 + \frac{y(t)}{\xi_b(t)} \right).$$

Закон движения слоя графита  $y(t)$  можно определить из решения присоединенного ОДУ второго порядка, если рассмотреть этот слой как объект переменного состава, движущийся под действием сил давления со стороны верхнего и нижнего слоев ТРГ. Скорости движения слоя графита в моделируемом процессе достаточно малы (2–10 мм/мин), что приводит к выравниванию давлений и плотностей в верхнем и нижнем слоях ТРГ; при этом зависимость плотностей от положения границ раздела имеет вид [3]:

$$\rho_2(t) = \rho_3 = \rho_1 \cdot \left( 1 - \frac{1 - h_0}{\xi_n(t) + \xi_b(t)} \right).$$

Задача определения полей температур и законов движения границ, как и в одномерном случае без учета конвективных членов [4], решалась методом выпрямления фронтов [3, 6]. В численном эксперименте было выявлено, что к моменту  $t_1$  касания ОГ верхней пластины и далее, при  $t > t_1$ , градиенты температур во всех областях  $D_i$  мало отличаются от постоянных, а температура в области  $D_2$ , занятой ОГ, близка всюду к температуре фазового перехода  $u_*$  (рис. 1).

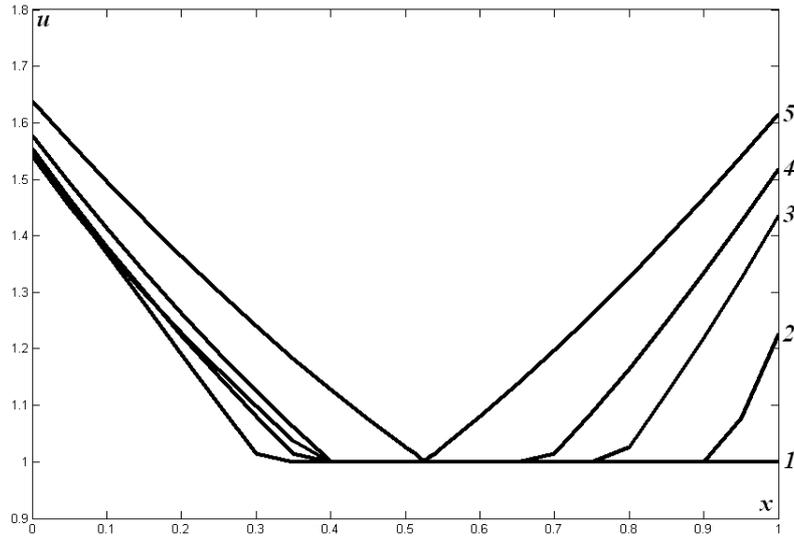


Рис.1. Распределение температуры в моменты времени:  
 1 –  $t = t_1 = 0.661$ , 2 –  $t = 0.702$ , 3 –  $t = 0.772$ , 4 –  $t = 0.872$ ,  
 5 –  $t = t_2 = 1.142$

2. Установленное выравнивание температуры ОГ к заключительной стадии процесса дает возможность построить [7, 8] приближенное решение задачи разложением по малому параметру — отношению коэффициентов теплопроводности ТРГ и ОГ,  $\varepsilon = k_2/k_1$ . Для одного из типовых наборов параметров имеем  $k_2/k_1 = 0.1$ ;  $F_1 = 3.9$ ;  $F_2 = 51.4$ ;  $\Lambda = 0.21$ ;  $\kappa = 20$ . Это позволяет принять  $F_1 \sim 1$ ,  $F_2 = \kappa_2 \varepsilon^{-1}$ ,  $\Lambda = \bar{\Lambda} \cdot \varepsilon$ ,  $\bar{\Lambda} \sim 1$ ,  $\kappa_2 \sim 1$ .

После применения метода выпрямления фронтов с переменными

$$\theta = \frac{x - \xi_H(t)}{1 - \xi_H(t) - \xi_B(t)}, \quad \varsigma = 1 - \frac{x}{\xi_H(t)}, \quad \eta = \frac{1 - x}{\xi_B(t)}$$

в слое ОГ, нижнем и верхнем слоях ТРГ соответственно, приходим к задаче

$$(1 - \xi_H(t) - \xi_B(t))^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} + (1 - \xi_H(t) - \xi_B(t)) \left[ (\dot{\xi}_B + \dot{\xi}_H) \theta - \xi_H \right] \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = F_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2},$$

$$\rho(t) \left[ \xi_H^2(t) \frac{\partial u_2}{\partial t} + \xi_H(t) \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} (\dot{\xi}_H(t)(1 - \varsigma) - v_2) \right] = F_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varsigma^2},$$

$$\rho(t) \left[ \xi_B^2(t) \frac{\partial u_3}{\partial t} - \xi_B(t) \frac{\partial u_3}{\partial \eta} (\dot{\xi}_B(t) \eta + v_3) \right] = F_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \eta^2},$$

$$-\xi_H^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=1} - Bi^{(2)} u_2(1, t) + Bi^{(2)} u_\infty = 0,$$

$$-\xi_B^{-1} \frac{\partial u_3}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + Bi^{(2)} u_3(0, t) - Bi^{(2)} u_\infty = 0,$$

$$u_2(0, t) = u_3(1, t) = u_1(0, t) = u_1(1, t) = 1,$$

$$(1 - \xi_H(t) - \xi_B(t))^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} + \xi_H^{-1}(t) \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=0} = \Lambda (\dot{\xi}_H - \dot{\xi}_r),$$

$$-(1 - \xi_H(t) - \xi_B(t))^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=1} - \xi_B^{-1}(t) \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=1} = \Lambda (\dot{\xi}_H - \dot{\xi}_r).$$

Используя асимптотические разложения



$$\xi_H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \xi_{Hk}(t), \quad \xi_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \xi_{Bk}(t), \quad u_1(\theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{1k}(\theta, t),$$

$$u_2(\zeta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{2k}(\zeta, t), \quad u_3(\eta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{3k}(\eta, t)$$

для главных членов получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (1 - \xi_{H0}(t) - \xi_{B0}(t))^2 \frac{\partial u_{10}}{\partial t} = F_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \theta^2}, \quad (8)$$

причем  $u_{10}$  должна удовлетворять условиям  $\left. \frac{\partial u_{10}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial u_{10}}{\partial \theta} \right|_{\theta=1} = 0$ .

Результаты численных расчетов [12] дают близкое к линейному распределение температур по координате в ТРГ и близкое к постоянному  $u = u_*$  в ОГ в начале последней стадии процесса. Это позволяет записать начальное условие  $u_{10}(\theta, t_2) = 1$ . Решением уравнения (8) при данном условии для  $u_{10}$  является  $u_{10}(t) \equiv 1$ . Тогда условия (7) примут вид

$$\xi_{H0}^{-1}(\partial u_{20}/\partial \zeta) \Big|_{\zeta=0} = \bar{\Lambda}(\dot{\xi}_{H0} - \dot{\xi}_{r0}), \quad \xi_{B0}^{-1}(\partial u_{30}/\partial \eta) \Big|_{\eta=0} = \bar{\Lambda}(\dot{\xi}_{B0} - \dot{\xi}_{r0}). \quad (9)$$

Из уравнений (8) с учетом условий (5), (6) имеем

$$u_{20} = 1 + \varsigma \xi_{H0}(u_{\infty} - 1) \frac{\varsigma \xi_{H0}(u_{\infty} - 1)}{\xi_{H0} + 1/Bi^{(2)}}, \quad u_{30} = \frac{(\xi_{B0} u_{\infty} + 1/Bi^{(2)}) - \eta \xi_{B0}(u_{\infty} - 1)}{\xi_{B0} + 1/Bi^{(2)}}.$$

Подставляя в условия (9), получаем

$$\frac{\alpha}{\xi_{H0} + 1/Bi^{(2)}} = \dot{\xi}_{H0} - \dot{\xi}_{r0}, \quad \frac{\alpha}{\xi_{B0} + 1/Bi^{(2)}} = \dot{\xi}_{B0} + \dot{\xi}_{r0}, \quad \alpha = \frac{u_{\infty} - 1}{\bar{\Lambda}}.$$

Обозначив  $z_1 = \xi_{H0}(t) + \xi_{B0}(t) + 2\gamma$ ,  $z_2 = \xi_{B0}(t) + \gamma$ ,  $\gamma = 1/Bi^{(2)}$ , получаем систему уравнений (с новой переменной времени  $t' = \alpha(t - t_2)$ )

$$\begin{cases} \dot{z}_1/z_1 = (z_2(z_1 - z_2))^{-1}, \\ \dot{z}_2(z_2 - \beta(z_2 - \gamma)/(z_1 - 2\gamma)) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

с начальными условиями

$$z_1(0) = \xi_{H0}(t_2) + 2\gamma, \quad z_2(0) = \gamma. \quad (11)$$

Для случая  $Bi^{(2)} = \infty$  получаем граничные условия первого рода. Система (10) в этом случае (при  $\gamma = 0$ ) интегрируется в элементарных функциях [13]:

$$z_2(z_1) = \frac{z_1}{2} - \frac{\xi_{H0}^2(t_2)}{2\kappa^2} \cdot \frac{z_1}{(z_1 - \beta)^2}, \quad t'(z_1) = \frac{z_1^2}{8} + \frac{\xi_{H0}^4(t_2)}{24\kappa^4} \cdot \frac{3z_1 - \beta}{(z_1 - \beta)^3} - \frac{\xi_{H0}^2(t_2)}{24\kappa^2} (3\kappa^2 + 2\kappa + 1).$$

Система (10)–(11) решается в численном виде, и находятся параметрические зависимости

$$\begin{cases} \xi_{H0}(t) = z_1 - z_2(z_1) \\ t = t'(z_1)/\alpha + t_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \xi_{B0}(t) = z_2(z_1) \\ t = t'(z_1)/\alpha + t_2 \end{cases}, \quad \text{где } z_1 \in [\alpha, 1].$$

Сравнение численных результатов с асимптотическим разложением показывает, что для приведённого диапазона параметров уже главная часть разложения дает хорошее приближение как для закона движения фронтов, так и для температурного поля. На рис. 2 представлено сравнение для условий третьего рода при различных значениях малого параметра и  $Bi^{(1)} = 2$ ,  $u_{\infty}/u_* = 2$ .

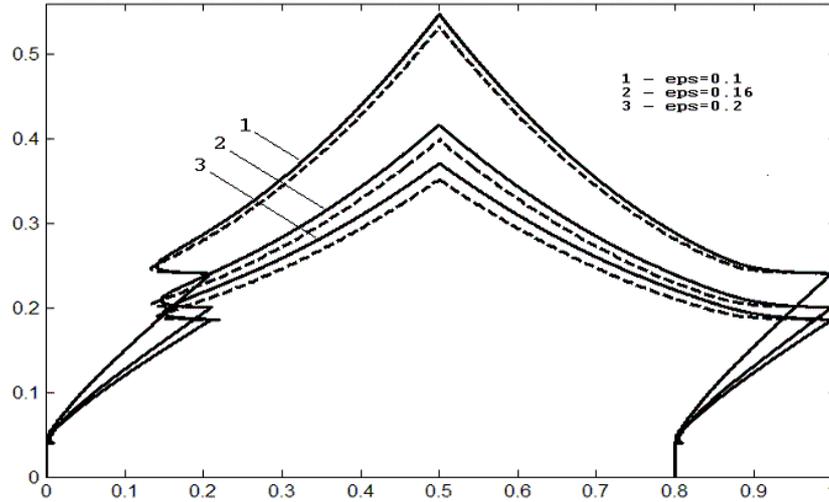


Рис.2. Движение границ раздела фаз и свободной поверхности ОГ  
( — численные расчеты, -- асимптотическое разложение)

**3.** При решении нелинейной краевой задачи типа Стефана в двумерной области применение метода выпрямления фронтов приводит к очень громоздким алгоритмам и обычно прибегают к методам сквозного счета [3, 9]. Рассмотрим схему, примененную ранее [10] в плоском двумерном случае, для расчета полей температур и скоростей в осесимметричном случае.

Задача Стефана записывается в следующем виде:

$$\rho_i c_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \text{grad}(u_i) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_i \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \right), \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

$$u_1(r, z, 0) = u^0(r, z), \quad (r, z) \in D, \quad (13)$$

$$F(u(r, z, t)) = 0, \quad (r, z) \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$u_1(r, z, t) = u_2(r, z, t) = u_*, \quad (r, z) \in \sigma(t), \quad t > t_*, \quad (15)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = \lambda \rho_1 (v_\sigma - v_{1n}), \quad (r, z) \in \sigma(t), \quad t > t_*, \quad (16)$$

где  $D = \{(r, z): r_0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq l\}$ ,  $\rho_i, c_i, k_i$  — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности вещества в области  $D_i(t)$ ,  $u_*$  — температура фазового перехода,  $v_{in}$  — нормальная составляющая (по отношению к границе  $\sigma$ ) скорости частиц в области  $D_i(t)$ ,  $v_\sigma$  — скорость движения межфазной границы,  $\lambda$  — удельное количество тепла, затрачиваемое на фазовый переход ОГ — ТРГ. Как и прежде индекс  $i = 1$  для ОГ,  $i = 2$  для ТРГ.

Используем при определении полей скоростей уравнение неразрывности и уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \left( \mathbf{v} \text{grad}(v_i) + \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left( \Delta v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial(\text{Div}(\mathbf{v}))}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Поскольку скорости частиц малы и между ними существует значительное трение, то, пренебрегая массовыми и инерционными силами, получим

$$\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \text{grad}(\text{Div}(\mathbf{v})) = \frac{1}{\eta} \text{grad}(p), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (17)$$

Примем, что плотность в каждой из областей  $D_i$  является функцией только времени, тогда  $\text{Div}(\mathbf{v}) = -(\ln(\rho))'_t$ , и из (17) следует  $\Delta \mathbf{v} = \frac{1}{\eta} \text{grad}(p)$ . Исключая из равенства (17) давление  $p$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (18)$$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad v_r|_{\Gamma} = 0, \quad v_z|_{\Gamma} = 0. \quad (19)$$

Как и в работе [10], перейдем к упрощенной задаче для потенциала скоростей  $\theta$ :  $\mathbf{v} = grad(\theta)$ . В этом случае уравнение (18) выполнено тождественно. Тогда функцию  $\theta(r, z)$  требуется определить из решения задачи Неймана:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\rho \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (20)$$

Задача решалась итерационно. При заданном поле скоростей определялось из решения задачи (12)–(16) поле температур и продвижение границы раздела, затем находились функция  $\rho'_i$  и поле скоростей из задачи Неймана (20). Задача Стефана (12)–(16) решалась методом сквозного счета, когда уравнение (12) рассматривается во всей области  $D$  и коэффициенты  $c_i\rho_i$  заменяются на единую в области  $D$  функцию  $c(u)\rho(u) + \lambda\rho(u)\delta(u - u_*)$ . Условие Стефана (16) при этом выполняется автоматически.

При расчетах дельта-функция заменяется сглаженной дельтаобразной функцией. Возникает квазилинейное уравнение параболического типа, которое решалось с помощью локально-одномерной конечно-разностной схемы [11]. Задача Неймана решалась методом матричной прогонки.

На рис. 3 изображены положения межфазной границы в моменты времени  $t = 0.06, t = 0.2, t = 0.45$  и поле скоростей при  $t = 0.45$ .

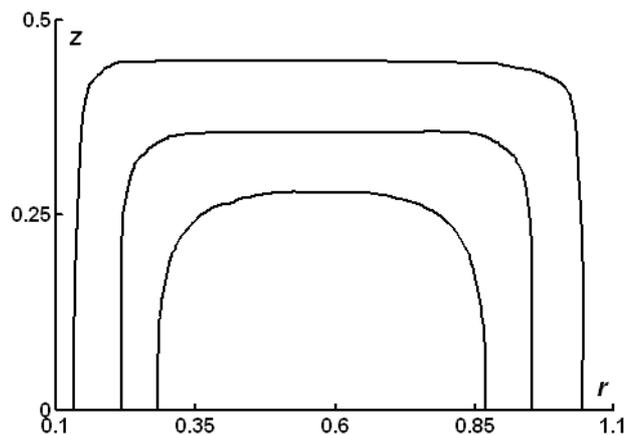


Рис. 3. Движение межфазной границы

Расчеты показывают, что значения конвективных членов и скорость изменения температуры являются величинами одного порядка, и при моделировании процесса терморасширения ОГ необходимо учитывать движение вещества.

### Библиографический список

1. Финаёнов А.И., Трифонов А.И., Журавлев А.М., Яковлев А.В. Области применения и получение терморасширенного графита // Вестник СГТУ. 2003. № 1(2). С. 75–85.
2. Ольшанский В.Ю. Математическое моделирование процесса терморасширения графита с учетом фазовых переходов // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Сб. аннот. докл. (Н.Новгород, 23–28 августа 2006г.). Н.Новгород, 2006. С. 141.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М., 2003. 784 с.
4. Ольшанский В.Ю., Михайлов В.Ю., Серебряков А.В. Результаты применения метода выпрямления фронтов при моделировании термического расщепления графита // Вестник СГТУ. 2006. №2(12), вып.1. С.19-24.
5. Ольшанский В.Ю., Серебряков А.В., Бахтин К.Г. Метод сквозного счета в задаче нагрева многослойной среды с подвижными внутренними границами // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз.науч.сб. Саратов, 2004. С. 87–91.
6. Будак Б.М., Васильев Ф.П., Успенский А.Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике: Сб. работ ВЦ МГУ. М., 1965. С. 139–183.
7. Ольшанский В.Ю., Нагар Ю.Н. О движении границ раздела в задаче о терморасщеплении графита // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники: Тр. междунар. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». Ульяновск, 2006. С. 244–246.



8. Ольшанский В.Ю., Нагар Ю.Н. Исследование закона движения границ раздела в задаче о терморасщеплении графита // Математические методы в технике и технологиях: Сб.тр. XIV Междунар. науч. конф. Воронеж, 2006. С. 91–93.

9. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.

10. Бахтин К.Г., Ольшанский В.Ю. Расчет движения границы раздела в задаче терморасширения графита при учете конвективных членов // Вестник СГТУ. 2006. № 3(15), вып. 2. С. 7–12.

11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М., 2001. 319 с.

12. Ольшанский В.Ю., Серебряков А.В., Михайлов В.Ю. Расчет движения границ раздела компонент в одной модели тепломассопереноса при термическом расщеплении графита // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 7. С. 24–28.

13. Ольшанский В.Ю., Нагар Ю.Н. Движение границы раздела при значительном отличии плотности агрегатных состояний в задаче о терморасщеплении графита // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов, 2005. С. 72–76.

УДК 531/534: [57+61]

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОЦИРКУЛЯТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ: НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТКАНИ

Н.С. Шабрыкина

Пермский государственный технический университет,  
кафедра теоретической механики  
E-mail: sns@theormech.pstu.ac.ru

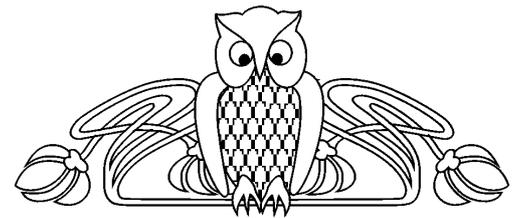
Микроциркуляторное русло является одним из ключевых звеньев сердечно-сосудистой системы человека. Любые патологические процессы, происходящие в организме человека, вызывают различные изменения кровотока и наоборот, расстройства микроциркуляции при многих заболеваниях возникают раньше и держатся дольше их клинических проявлений. Моделирование микроциркуляции позволяет лучше понять сложные взаимосвязанные процессы, обеспечивающие обмен веществ в организме, а также выявить причины возникновения патологий микроциркуляции и предложить пути их лечения.

Важность микроциркуляторного русла подчеркивает тот факт, что большая часть обмена питательных веществ и продуктов распада осуществляется на уровне мельчайших сосудов. Основные количественные данные в области механики микроциркуляторных процессов и обмена веществ были получены в течение последних 30 лет, благодаря существенным инновациям методов и технологий измерения параметров микроциркуляции и методик анализа полученных данных [1]. Но кроме эмпирических существуют и теоретические исследования, которые не только помогают интерпретировать экспериментальные данные, но и служат основанием для проведения дальнейших экспериментов.

К настоящему времени разработано большое количество моделей, описывающих течение крови в капиллярах, а также моделей ткани, без учета их взаимосвязи с сосудистой системой [2]. Однако суть обменных процессов в организме состоит в постоянном перераспределении веществ между кровеносным капилляром, окружающей тканью и лимфатическими капиллярами. Значит, для адекватного описания обменных процессов, необходимо строить комплексные модели, учитывающие взаимосвязь процессов, происходящих во всех частях микроциркуляторного русла.

Представляемая здесь модель посвящена описанию процесса обмена веществ в организме человека и животных. Особенность данной модели состоит в том, что предлагается формулировка краевой задачи, описывающей следующие взаимосвязанные процессы: движение жидкости в кровеносном капилляре, одновременно с ее фильтрацией и реабсорбцией в межклеточное пространство; движение жидкости в межклеточном пространстве; абсорбция в лимфатический капилляр. При этом давление и скорость течения жидкости в капилляре и ткани, а также зависящие от них величины рассматриваются как функции времени и двух пространственных координат.

В моделях микроциркуляции обычно предполагается, что все капилляры в органе одинаковы по размеру, характеристикам течения жидкости и т.д. Поэтому можно рассматривать один представи-



**Modelling of Microcirculation: Unsteady Interstitial Fluid Flow in Tissue**

**N.S. Shabrykina**

Microcirculation is a key element of human metabolism. Every pathological condition of human organism causes different changes in blood flow. And vice versa, many of the microcirculatory disorders appear before and stay longer after then other disease symptoms. Modelling of microcirculation help us to understand complex interconnected metabolic processes, to find out causes of different diseases and to offer ways of their treatment.