



Библиографический список

1. Соркин, Р.Е. Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе / Р.Е. Соркин. М.: Наука, 1967. 319 с.
2. Шапиро, Я.М. Основы проектирования ракет на твердом топливе / Я.М. Шапиро, Г.Ю. Мазинг, Н.Е. Прудников. М.: Военное изд-во, 1978. 621 с.
3. Budiansky, B. Fiber-matrix de bonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites / B. Budiansky, A.G. Evans, J.W. Hutchinson // Intern. J. Solid Structures. 1995. Vol. 32, № 3–4. P. 315–328.
4. Ji, H. Adhesion via Connector Molecules: The Many-stitch Problem / H. Ji, P.G. de Gennes // Macromolecules. 1993. Vol. 26. P. 520–525.
5. Cox, B.N. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue / B.N. Cox, D.B. Marshall // Acta Met. Mat. 1994. Vol. 42, № 2. P. 341–363.
6. Goldstein, R.V. Modelling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints / R.V. Goldstein, V.F. Bakirov, M.N. Perelmuter // Proc. Inst. Phys. Technol. Russian Ac. of Sci. 1997. Vol. 13. P. 115–125.
7. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. М.: Наука, 1966.
9. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинках, оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
10. Мирсалимов, В.М. Неоднородные упругопластические задачи / В.М. Мирсалимов. М.: Наука, 1987. 256 с.
11. Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. М.: Л.: Гостехиздат, 1948.
12. Гольдштейн, Р.В. Рост трещин по границе соединения материалов / Р.В. Гольдштейн, М.Н. Перельмутер // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.

УДК 539.319

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин

Пермский государственный технический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

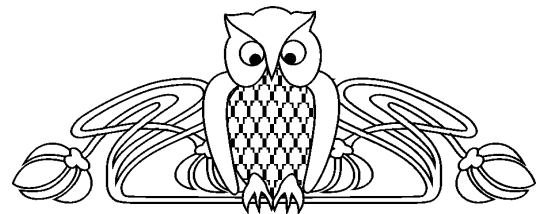
Рассмотрены задачи об одностороннем контакте балок, струн, круглых мембран и пластин. Предложен новый подход к решению таких задач, включающий строгую математическую постановку, элементарное доказательство единственности решения, метод построения аналитического решения, основанный на итерационном уточнении области контакта. Приведен ряд примеров применения этого метода к решению одномерных контактных задач.

Ключевые слова: струна, балка, мембрана, пластина, односторонний контакт, одномерная задача, аналитическое решение.

ВВЕДЕНИЕ

Существует ряд одномерных контактных задач, решения которых могут быть получены в явном аналитическом виде. Это задачи об одностороннем контакте двух струн, балок, осесимметричных мембран или пластин под заданной нагрузкой (рис. 1, a , b , c , d соответственно) и о таком же контакте струны, балки, мембраны или пластины с абсолютно твердым телом (рис. 2, a , b , c , d соответственно).

Физические предположения в этих задачах примем самыми простыми: все объекты являются однородными, толщины их геометрически равны нулю, контакт происходит без трения, перемещения считаются малыми (на рис. 1 и 2 перемещения для наглядности показаны сильно увеличенными). Теории изгиба балок и пластин используем также простейшие: теории Бернулли и Кирхгофа соответственно [1].



A Certain Approach to Solving of Some One-Dimensional Contact Problems

M.A. Osipenko, Yu.I. Nyashin

Perm State Technical University,
Chair of Theoretical Mechanics
E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

The paper deals with the problems of the unbonded contact of beams, strings, circular membranes and plates. A new approach to solving of such problems is suggested. This approach includes the rigorous problem statement, the elementary proof of the uniqueness of solution and the analytical solution construction method. The method is based on the iterative correction of the contact region. A number of examples of this method application are given.

Key words: string, beam, membrane, plate, unbonded contact, one-dimensional problem, analytical solution.

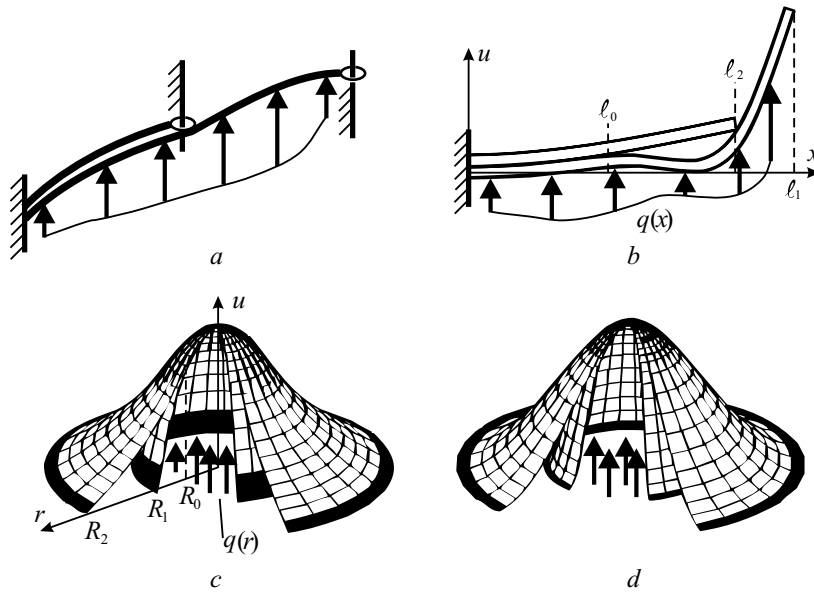


Рис. 1

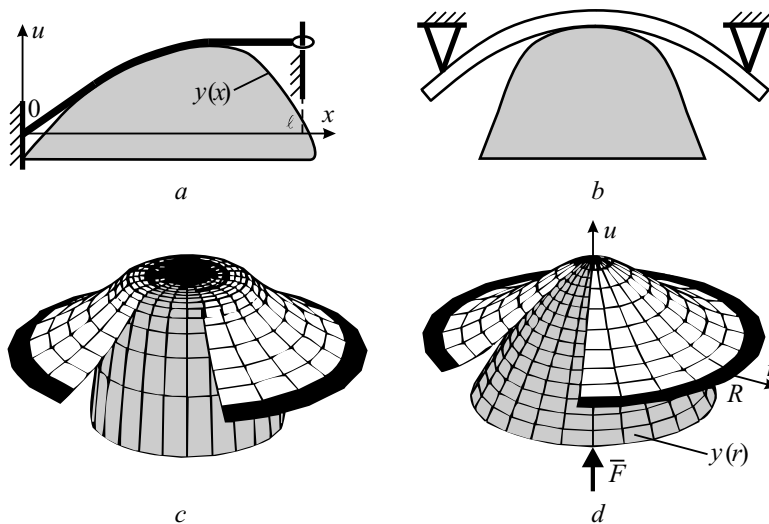


Рис. 2

В литературе можно найти два подхода к решению таких задач. Первый подход — вариационный [2, 3]. Искомыми при этом подходе обычно являются перемещения. Достоинствами этого подхода являются строгие математические постановки задач, доказательства (впрочем, не элементарные) существования и единственности решения, естественный переход к численным методам решения. Однако этот подход имеет и некоторые недостатки. Здесь почти никогда не рассматриваются аналитические решения. Если даже предположительное аналитическое решение каким-либо образом получено (например, угадано), то нелегко установить, является ли оно действительно решением (доставляет минимум некоторому функционалу или удовлетворяет некоторому вариационному неравенству).

Второй подход основан на теории сопротивления материалов [4, 5]. Искомыми при этом подходе обычно являются силы взаимодействия рассматриваемых объектов. Достоинством этого подхода является, прежде всего, получение явных аналитических решений, причем силы обычно аналитически устроены проще перемещений. Далее, если имеется предположительное решение, то легко выяснить, является ли оно действительно решением; этот подход может служить основой и для численных методов. Данный подход также имеет недостатки. Здесь почти никогда не дается строгой математической постановки задачи; без такой постановки невозможно даже сформулировать теоремы существования



и единственности решения. Кроме того, получаемые аналитические решения, по существу, угадываются; нет метода их построения.

В настоящей работе, основанной на статьях [6, 7], предлагается некоторое улучшение и уточнение второго подхода, а именно: в его рамках формулируется столь же строгая, как и в первом подходе, математическая постановка задачи, доказывается (причем элементарными средствами) единственность решения и предлагается метод построения аналитического решения. Это построение одновременно доказывает и существование решения.

1. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Строгая постановка задачи содержит обычные физические предположения, а также некоторые математические детали. Имеются упругие элементы 1 и 2 (рис. 3; о случае контакта упругого элемента с абсолютно твердым телом см. ниже). К элементу 1 в известной области D_q приложена нагрузка с заданной плотностью $q(x)$. D — известная максимально возможная область контакта, в которой имеются контактные силы с плотностью $f(x)$. Эта плотность является искомой функцией. Зная функции Грина G_1, G_2 упругих элементов, можно записать выражения для перемещений и затем для расстояния ρ между точками упругих элементов:

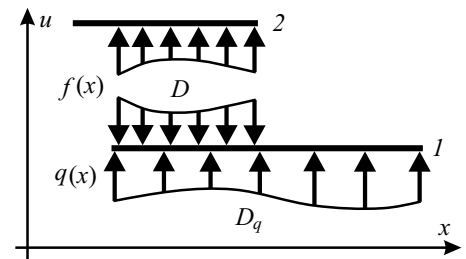


Рис. 3

$$u_1(x) = \int_{D_q} G_1(x, s)q(s)ds - \int_D G_1(x, s)f(s)ds, \quad u_2(x) = \int_D G_2(x, s)f(s)ds,$$

$$\rho(x) = u_2(x) - u_1(x) = \int_D G(x, s)f(s)ds - y(x), \quad (1)$$

где $G = G_1 + G_2$, $y(x) = \int_{D_q} G_1(x, s)q(s)ds$. Если элемент 1 — абсолютно твердое тело, то в выражении для $\rho(x)$ следует положить $G = G_2$, а $y(x)$ считать функцией, задающей форму тела.

Так как искомой является функция ($f(x)$), то необходимо уточнить множество, в котором она отыскивается. Выберем множество функций вида

$$\tilde{f}(x) + \sum_i F_i \delta(x - x_i), \quad (2)$$

где $\tilde{f}(x)$ — неотрицательная кусочно-непрерывная функция, причем односторонне непрерывная, $F_i \geq 0$, $x_i \in D$ — все различны, δ — дельта-функция Дирака. Это множество является естественным в данной задаче, так как небольшое его сужение (например, требование непрерывности $\tilde{f}(x)$) может привести к отсутствию решения, а небольшое расширение (например, отказ от односторонней непрерывности) — к неединственности решения (за счет появления «точечных выбросов»). Заметим, что заданную плотность нагрузки $q(x)$ также удобно считать имеющей вид (2).

Окончательно строгая постановка контактной задачи имеет вид: найти $f(x)$ вида (2) такую, что

$$\rho(x) \begin{cases} = 0 & (f(x) > 0), \\ \geq 0 & (f(x) = 0). \end{cases} \quad (3)$$

2. ОБЩАЯ СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

При данной постановке задачи единственность решения может быть доказана элементарными средствами. Детали доказательства зависят от явного вида функций Грина и от того, является ли элемент 1 упругим или абсолютно твердым. Общая схема доказательства следующая. Пусть $f(x), f_*(x)$ — два решения задачи; им соответствуют функции $\rho(x)$ и $\rho_*(x)$. Рассмотрим величину

$$E = \int_D (f(x) - f_*(x)) (\rho(x) - \rho_*(x)) dx.$$



Непосредственно из постановки задачи следует, что $E \leq 0$. Используя явные выражения для функций Грина, можно привести E к виду

$$E = \int_D I^2(x) dx,$$

где

$$I(x) = \int_D K(x, s) (f(s) - f_*(s)) ds,$$

$K(x, s)$ — некоторое кусочно-непрерывное ядро типа Вольтерра. Тогда $E \geq 0$, следовательно, $E = 0$. Отсюда, используя то, что $f(x)$ и $f_*(x)$ имеют вид (2) и свойства ядра K , последовательно получаем $I(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv f_*(x)$ в D .

Далее (см. п. 5) в качестве примера приведем доказательство для задачи о контакте струны с абсолютно твердым телом.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Сформулированная постановка задачи может быть основой для известного численного метода решения [8].

Обозначим через D_c (неизвестную фактическую) область контакта, в которой $\rho = 0$. Тогда в D_c неизвестная плотность $f(x)$ контактных сил удовлетворяет интегральному уравнению (см. (2)):

$$\int_{D_c} G(x, s) f(s) ds = y(x). \quad (4)$$

Далее произведем дискретизацию задачи. Тогда выписанное интегральное уравнение перейдет в систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k \in D_c} G_{ik} f_k = y_i, \quad i \in D_c. \quad (5)$$

Система (5) решается итерационно следующим образом. Первоначально принимается, что $D_c = D$. Решая (5), находим контактные силы f_k . Если среди них есть отрицательные, то исключаем из D_c соответствующие точки и снова находим f_k . Когда все f_k станут неотрицательными, найдем в D контактные расстояния:

$$\rho_i = \sum_{k \in D_c} G_{ik} f_k - y_i, \quad i \in D.$$

Если среди ρ_i нет отрицательных, то задача решена. Если имеются отрицательные ρ_i , то добавляем в D_c соответствующие точки, затем снова решаем (5) и т. д.

4. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

На основе изложенного численного метода можно предложить метод построения аналитического решения задачи. Идея этого метода состоит в том, чтобы весь вышеописанный алгоритм выполнять аналитически, без проведения дискретизации. Тогда вместо системы (5) следует аналитически решать интегральное уравнение (4) Фредгольма первого рода. Решение этого уравнения не является строго математически обоснованным и строится с помощью эвристических правил, использующих δ -функцию и ее производные. Получаемое в итоге аналитическое решение контактной задачи является тогда лишь предположительным. Но на данном этапе важно лишь то, что решение получено в результате систематических вычислений, а не угадано. Далее уже строго доказывается, что это предположительное решение действительно является решением. Тем самым устанавливается и существование решения. Таким образом, строгость окончательного результата не нарушается из-за нестрогости промежуточного этапа.

Появление сингулярных функций при решении уравнения (4) можно увидеть на следующем примере. Рассмотрим уравнение

$$\int_{\lambda}^{\mu} \min(x, s) f(s) ds = y(x), \quad 0 \leq \lambda \leq x \leq \mu, \quad (6)$$



где $\min(x, s)$ — функция Грина для струны. Дифференцируя (6), получим $f(x) = -y''(x)$, но при этом $y(\lambda) = \lambda y'(\lambda)$ и $y'(\mu) = 0$. Если же одно из двух последних равенств не выполнено, то (6) формально не имеет решения, но, используя δ -функцию, можно и в этом случае записать решение (6) в виде

$$f(x) = -y''(x) + y'(\mu)\delta(x - \mu) + \begin{cases} -y(0)\delta'(x) & (\lambda=0), \\ (y(\lambda)/\lambda - y'(\lambda))\delta(x - \lambda) & (\lambda > 0). \end{cases} \quad (7)$$

Справедливость соотношения (7) легко проверить подстановкой его в (6).

5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Приведем пример полного решения контактной задачи с помощью описанного алгоритма. Рассмотрим равновесие струны, имеющей односторонний контакт с гладким абсолютно твердым телом (см. рис. 2, а). Левый конец струны закреплен (в начале координат), правый может скользить по неподвижной гладкой прямой $x = \ell$. Натяжение струны примем за единицу. Форма тела описывается заданной функцией $y(x)$. Форма струны описывается функцией $u(x)$. Из элементарной теории слабо деформированной струны [9] следует, что в (1) $G(x, s) = \min(x, s)$. В (2) считаем, что $\tilde{f}(x)$ непрерывна справа при $x = 0$ и непрерывна слева при $0 < x \leq \ell$, сумма конечна, $0 < x_i \leq \ell$. Для интегралов, содержащих δ -функцию, примем соглашение, что

$$\int_a^b A(x)\delta(x - c) dx = A(c),$$

если $c = a$ или $c = b$. Постановка задачи имеет вид: найти $f(x)$ вида (2) такую, что выполнено (3), где (см. (1))

$$\rho(x) = \int_0^\ell \min(x, s)f(s)ds - y(x). \quad (8)$$

Теорема 1. *Поставленная задача может иметь только одно решение.*

Доказательство. Пусть $f(x), f_*(x)$ — два решения задачи. Обозначим $\varphi(x) = f(x) - f_*(x)$. Функция $\varphi(x)$ имеет вид (2), но $\tilde{f}(x)$ и F_i могут быть отрицательными. В соответствии с общей схемой (см. п. 2) строим величину E и непосредственно из постановки задачи получаем, что $E \leq 0$. Используя явное выражение для функции Грина, приводим E к виду

$$E = \int_0^\ell I^2(x)dx, \quad I(x) = \int_x^\ell \varphi(s) ds. \quad (9)$$

Отсюда следует, что $E \geq 0$, поэтому $E = 0$. Далее, учитывая упомянутый вид $\varphi(x)$, легко доказать, что функция $I(x)$ кусочно-непрерывна при $0 \leq x \leq \ell$, причем непрерывна слева при $x > 0$ и непрерывна справа при $x = 0$ (здесь использованы упомянутые ранее соглашения о значениях интегралов, содержащих δ -функцию, и условие $x_i > 0$). Тогда из равенства $E = 0$ следует, что $I(x) \equiv 0$. Докажем теперь, что $\varphi(x) \equiv 0$. Предположим, что в выражении (2) для $\varphi(x)$ $\tilde{f}(x) > 0$ при некотором $x_* > 0$. Тогда в силу непрерывности $\tilde{f}(x)$ слева и конечности суммы можно найти такие $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, что отрезок $0 < x_* - \varepsilon_1 \leq x \leq x_* - \varepsilon_2$ не содержит ни одной точки x_i и $\tilde{f}(x) > 0$ на этом отрезке; это противоречит (с учетом (9)) тому, что $I(x_* - \varepsilon_1) = I(x_* - \varepsilon_2) = 0$. Аналогично устанавливается невозможность неравенств $\tilde{f}(x) < 0$ при $x > 0$ и $\tilde{f}(0) \neq 0$; следовательно, $\tilde{f}(x) \equiv 0$, откуда

$$\varphi(x) = \sum_i F_i \delta(x - x_i).$$

Предположим, что не все F_i равны нулю. Тогда можно выбрать максимальное $x_j > 0$, отвечающее ненулевым F_i , и можно найти такое $\varepsilon > 0$, что $I(x) \neq 0$ при $0 < x_j - \varepsilon \leq x < x_j$ (с учетом (9)). Из полученного противоречия следует, что все $F_i = 0$, откуда $\varphi(x) \equiv 0$; это доказывает теорему 1.

Теперь с помощью нестрогих рассуждений построим предположительное решение задачи в одном частном случае.

В соответствии с вышеописанным алгоритмом область контакта предполагаем сначала максимально возможной: отрезок $0 \leq x \leq \ell$. Тогда из (7) следует, что

$$f(x) = -y''(x) - y(0)\delta'(x) + y'(\ell)\delta(x - \ell); \quad (10)$$



такой $f(x)$ отвечает форма струны, показанная на рис. 4, а. Пусть $y''(x) < 0$, $y(0) < 0$, $y'(\ell) < 0$ (эти неравенства соответствуют рис. 4, а). Тогда первое слагаемое в (10) положительно, второе — «частично отрицательно» (в соответствии с «графиком» функции $\delta'(x)$; рис. 4, б), третье — отрицательно. Следовательно, нужно исключить из отрезка $0 \leq x \leq \ell$ точки $x = 0$ и $x = \ell$. Это истолковывается как переход к отрезку $a \leq x \leq b$, где a близко к нулю, а b близко к ℓ . Тогда из (7) следует, что

$$f(x) = -y''(x) + (y(a)/a - y'(a))\delta(x - a) + y'(b)\delta(x - b); \quad (11)$$

такой $f(x)$ отвечает форма струны, показанная на рис. 4, с. При указанных a и b коэффициенты в (11) при δ -функциях отрицательны. Следовательно, нужно постепенно исключать из отрезка $a \leq x \leq b$ точки слева и справа до исчезновения отрицательных слагаемых в (11). Поэтому увеличиваем a и уменьшаем b до тех пор, пока содержащие δ -функции слагаемые в (11) не станут неотрицательными (а, фактически, равными нулю). Тогда a станет равным корню a_0 уравнения $y(a)/a - y'(a) = 0$, а b — корню b_0 уравнения $y'(b) = 0$. Нетрудно показать (см. ниже), что это возможно, если $y'(0) > 0$ и $y(b_0) > 0$. Полученной $f(x) = -y''(x)$ (на отрезке $a_0 \leq x \leq b_0$) отвечает форма струны, показанная на рис. 4, д.

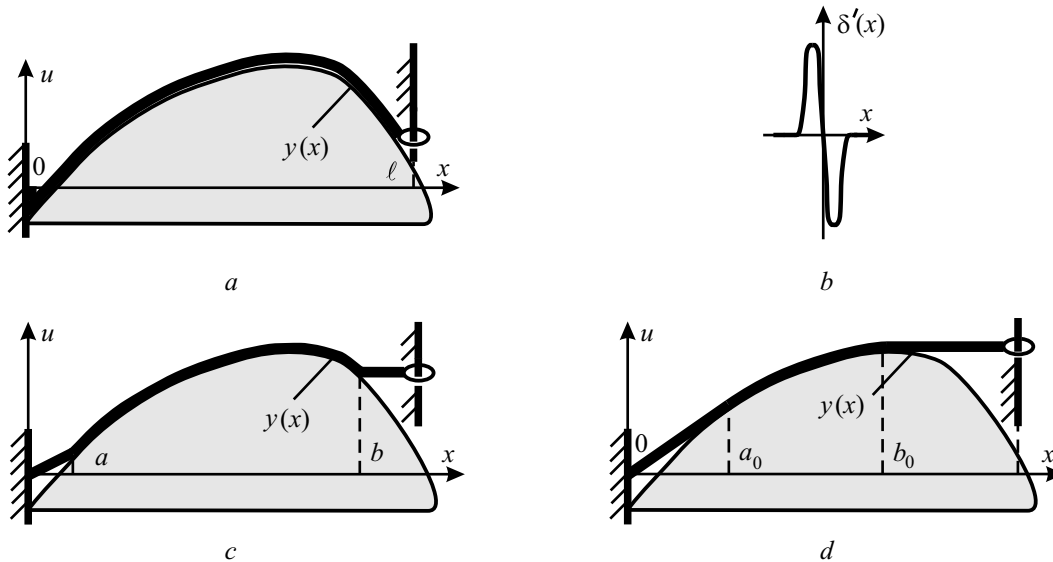


Рис. 4

Алгоритм завершается строгим доказательством того, что построенное предположительное решение действительно является решением задачи.

Теорема 2. Если $y''(x) < 0$ при $0 \leq x \leq \ell$, $y(0) < 0$, $y'(0) > 0$, $y'(\ell) < 0$, $y(b_0) > 0$, где b_0 — корень уравнения $y'(b) = 0$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} -y''(x) & (a_0 \leq x < b_0), \\ 0 & (x < a_0, x \geq b_0), \end{cases} \quad (12)$$

где a_0 — корень уравнения $y(a)/a - y'(a) = 0$.

Доказательство. Так как $y'(0) > 0$ и $y'(\ell) < 0$, то корень b_0 существует. Так как для функции $\psi(a) = y(a)/a - y'(a)$ справедливы соотношения $\psi(0+0) = -\infty$, $\psi(b_0) > 0$, то корень $a_0 < b_0$ существует. Далее, $f(x)$, очевидно, имеет вид (2). Остается доказать справедливость (3), где $\rho(x)$ выражается формулой (8). Неравенство $f(x) > 0$ выполнено только при $a_0 \leq x < b_0$; для этих x из (8) и (12) (с учетом упомянутых в формулировке теоремы 2 свойств функции $y(x)$) нетрудно найти, что $\rho(x) = 0$; тем самым первое соотношение в (3) выполнено. При $x < a_0$ из (8) и (12) можно получить следующее представление для $\rho(x)$:

$$\rho(x) = - \int_x^{a_0} (s - x)y''(s)ds,$$



откуда следует, что $\rho(x) \geq 0$. При $x \geq b_0$ из (8) и (12) можно получить следующее представление для $\rho(x)$:

$$\rho(x) = - \int_{b_0}^x (x-s)y''(s)ds,$$

откуда следует, что $\rho(x) \geq 0$; тем самым второе соотношение в (3) выполнено и теорема 2 доказана.

6. НЕКОТОРЫЕ ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗЛОЖЕННЫМ МЕТОДОМ

На рис. 1, *b* показаны две консольные балки под заданной нагрузкой $q(x)$. Применение изложенного метода приводит к следующему известному результату [6]. Обозначим

$$\Phi(\ell) = \int_{\ell}^{\ell_2} (x-\ell)(\ell_2-x)(2\ell_2-\ell-x)q(x)dx - (\ell_2-\ell)^2 \int_{\ell_2}^{\ell_1} (x-\ell_2)q(x)dx.$$

Если $\Phi(0) > 0$, то имеется область прилегания балок; длина ℓ_0 этой области есть корень уравнения $\Phi(\ell) = 0$.

На рис. 2, *d* показаны круглая пластина радиуса R с заземленным краем и осесимметричное абсолютно твердое тело. Функция $y(r)$ описывает заданную форму тела. Применение изложенного метода приводит к следующему результату. Если $\Delta\Delta y(r) > 0$ при $0 \leq r \leq R$ (Δ — оператор Лапласа), $y(0) > 0$, $y(R) < 0$; функции $ry'(r)$, $r^2y''(r)$, $ry'''(r) + y''(r) - y'(r)/r$ стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$, то сила, действующая на твердое тело, равна

$$F = k \Phi(\lambda_0)/R,$$

где k — изгибная жесткость пластины, $0 < \lambda_0 < 1$ — корень уравнения $\Psi(\lambda) = 0$,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= ((\lambda + 1/\lambda)y'(\lambda R) + (1 - \lambda^2)Ry''(\lambda R)) / ((1 - \lambda^2)/2 - \ln(1/\lambda)), \\ \Psi(\lambda) &= \left((2\lambda \ln(1/\lambda))^2 - (1 - \lambda^2)^2 \right) Ry''(\lambda R) + \left(8\lambda \ln(1/\lambda) - 4\lambda(\ln(1/\lambda))^2 - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \lambda^2)(1 + 3\lambda^2)/\lambda \right) y'(\lambda R) + 4(2\ln(1/\lambda) - 1 + \lambda^2) y(\lambda R)/R. \end{aligned}$$

На рис. 1, *c* показаны две круглые мембраны радиусами R_1 , R_2 с закрепленными краями под заданной осесимметричной нагрузкой $q(r)$. Применение изложенного метода приводит к следующему результату: всегда имеется область (круг) прилегания мембран; радиус R_0 этого круга есть корень уравнения $\Phi(R) = 0$, где

$$\Phi(R) = \int_R^{R_1} \ln(R_1/r)rq(r)dr - \frac{\ln(R_2/R_1)}{1 + T_2/T_1} \int_0^R rq(r)dr,$$

T_1, T_2 — натяжения мембран.

ВЫВОДЫ

Предложенный новый подход к постановке и решению контактных задач для балок, струн, пластин и мембран имеет некоторые преимущества по сравнению с известными подходами. Постановки задач являются простыми и в то же время строгими. Единственность решения доказывается элементарными средствами. Построены (со строгим обоснованием) не известные ранее аналитические решения ряда контактных задач. Новый подход допускает дальнейшее развитие и распространение на более сложные контактные задачи.

Библиографический список

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. М.: Наука, 1988. 711 с.
2. Дюво, Ж. Неравенства в механике и физике / Ж. Дюво, Ж.-Л. Лионс. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Кравчук, А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. М.: Изд-во МГАПИ, 1997. 340 с.
4. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. М.: Наука, 1973. 400 с.



5. Григолюк, Э.И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
6. Няшин, Ю.И. К теории изгиба листовой рессоры / Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, Р.Н. Рудаков // Изв. РАН, МТТ. 2002. № 6. С. 134–143.
7. Осипенко М.А. Об одной контактной задаче для системы струн / М.А. Осипенко // Вест. ПГТУ. Сер. Прикладная математика и механика. 2005. № 1. С. 82–86.
8. Li, H. Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer / H. Li, J.P. Dempsey // J. of Engineering Mechanics. 1988. July. Vol. 114, № 7. P. 1265–1284.
9. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.

УДК 629

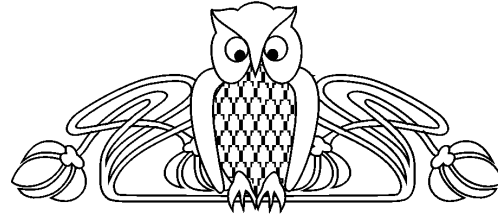
АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

Рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА) с помощью ограниченного по модулю управления, ортогонального плоскости орбиты КА. Найдено аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты КА для постоянного на смежных участках активного движения КА управления.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, ориентация, кватернион, оптимальное управление.



Analytical Solution of Differential Equations of Circular Spacecraft Orbit Orientation

I.A. Pankratov, Yu.N. Chelnokov

Saratov State University,
Chair of Computational Experiment in Mechanics
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

The problem of optimal reorientation of spacecraft's orbit with a limited control, orthogonal to the plane of spacecraft orbit is being investigated. We have found an analytical solution of differential equations of circular spacecraft orbit orientation by control that is permanent on adjacent parts of the active spacecraft's motion.

Key words: spacecraft, orbit, orientation, quaternion, optimal control.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КА

В работах Ю.Н. Челнокова, С.В. Ненахова, Д.А. Сергеева [1–3] рассматривается задача оптимальной переориентации орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2 \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ \Omega_\xi, \quad \Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 i_1 + \Lambda_2 i_2 + \Lambda_3 i_3, \quad \Omega_\xi = \frac{r}{c} u (\cos \varphi i_1 + \sin \varphi i_2), \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const.}$$

Здесь Λ — нормированный кватернион ориентации орбиты КА, \circ — символ кватернионного умножения, i_1, i_2, i_3 — векторные мнимые единицы Гамильтона, $r = |\mathbf{r}|$ — модуль радиуса-вектора центра масс КА, $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости \mathbf{v} центра масс КА), φ — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите, u — проекция вектора реактивного ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА), p и e — параметр и эксцентриситет орбиты.

При этом необходимо определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}, \quad u = |\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \Lambda(0) = \Lambda^0$$

в конечное состояние

$$t = t_1, \quad \varphi(t_1) = \varphi^*, \quad \text{vect}(\Lambda(t_1)) = 0$$