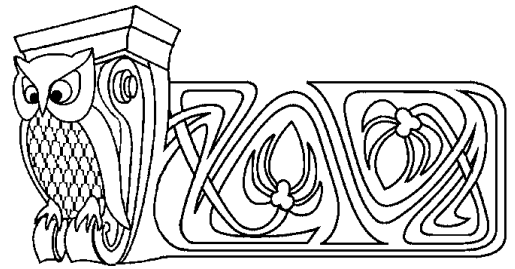




УДК 539.3

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ



В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина*

Липецкий государственный технический университет,
кафедра теоретической механики
*кафедра прикладной математики
E-mail: viktorp@lipetsk.ru, satalkina_lyubov@mail.ru

**Method of Boundary States as an Effective Technique of Solving
of Heterogeneous Problems of Elasticity Theory**

V. B. Penkov, L. V. Satalkina*

Lipetsk State Technical University,
Chair of Applied Mathematics,
*Chair of Applied Mathematics
E-mail: viktorp@lipetsk.ru, satalkina_lyubov@mail.ru

Метод граничных состояний в сочетании с методом возмущений обнаружил свою эффективность при решении неоднородных задач статической теории упругости. Построены и проиллюстрированы решения основных задач теории упругости для тела геометрической конфигурации «гвоздь», выполненного из неоднородного материала с осесимметричной неоднородностью.

Method of boundary states in combination with perturbation technique discovers its efficiency on heterogeneous problems of elastostatics. Solutions of problems for body of geometric configuration «peg», produced from heterogeneous material with axisymmetric heterogeneity is performed and illustrated.

Ключевые слова: гильбертово пространство, коэффициенты Фурье, ортонормированный базис, метод граничных состояний.

Key words: Hilbert space, Fourier coefficient, orthonormal basis, method of boundary states.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается задача статической теории упругости, в которой механические параметры среды являются функциями точек среды. Трудности преодолеваются комбинированием метода Пуанкаре с методом граничных состояний (МГС). Это дает возможность построения приближенного аналитического решения указанного класса задач [1].

После приведения к безразмерному виду основные положения статической термоупругости представляются соотношениями:

– уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (1.1)$$

– соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.2)$$

– обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \vartheta = \varepsilon_{kk}, \quad (1.3)$$

где σ_{ij} — напряжения, F_i — массовые силы, u_i — перемещения, ε_{ij} — деформации, λ, μ — параметры Ламе, ν — коэффициент Пуассона, ϑ — объемные деформации.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Полагая все параметры упругой среды непрерывно зависящими от x_i , представим их в виде степенных рядов по малому параметру β :

$$\{\lambda, \mu, \nu\} = \{\lambda_0, \mu_0, \nu_0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\lambda_k(x_i), \mu_k(x_i), \nu_k(x_i)\} \beta^k,$$

будем искать характеристики упругостатического поля в виде асимптотических рядов:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \beta \sigma_{ij}^1 + \dots; \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \beta \varepsilon_{ij}^1 + \dots; \\ u_i &= u_i^0 + \beta u_i^1 + \dots; \\ F_i &= F_i^0 + \beta F_i^1 + \dots; \\ \vartheta &= \vartheta^0 + \beta \vartheta^1 + \dots \end{aligned}$$



3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАЖДОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

3.1. Разложение основных соотношений по малому параметру

Исходные соотношения приводятся к бесконечной последовательности линейных систем уравнений:

$$\sigma_{ij,j}^0 + F_i^0 = 0, \quad \sigma_{ij,j}^1 + F_i^1 = 0, \dots, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad \varepsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^1 + u_{j,i}^1), \dots, \\ \sigma_{ij}^0 = \lambda_0 \vartheta^0 \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^1 = (\lambda_0 \vartheta^1 + \lambda_1 \vartheta^0) \delta_{ij} + (2\mu_0 \varepsilon_{ij}^1 + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^0).$$

Вообще для приближения k имеем зависимости:

$$\sigma_{ij,j}^k + F_i^k = 0, \quad \varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}(u_{i,j}^k + u_{j,i}^k), \quad \sigma_{ij}^k = \lambda_0 \vartheta^k \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^k + S_{ij}^{k*}, \quad \vartheta^k = \varepsilon_{ii}^k, \\ S_{ij}^{0*} = 0, \quad S_{ij}^{1*} = \lambda_1 \vartheta^0 \delta_{ij} + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^0, \quad S_{ij}^{2*} = (\lambda_2 \vartheta^0 + \lambda_1 \vartheta^1) \delta_{ij} + 2(\mu_1 \varepsilon_{ij}^1 + \mu_2 \varepsilon_{ij}^0), \dots \quad (3.1)$$

Совокупность соотношений (3.1) определяет последовательность задач, решением которых должны явиться поля соответствующих приближений. Заметим, что структура уравнений одинакова. Однако существенны некоторые отличия: в задаче последующего приближения фигурируют поля предшествующих приближений, их необходимо учитывать при построении решения.

3.2. Декомпозиция решения задачи каждого приближения

Представим искомое поле напряжений σ_{ij}^k в виде суммы неизвестной части S_{ij}^k и известной поправки S_{ij}^{k*} . Получим $\sigma_{ij}^k = S_{ij}^k + S_{ij}^{k*}$, где обозначено $S_{ij}^k = \lambda_0 \vartheta^k \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^k$.

Такие преобразования приводят упругую задачу каждого приближения к унифицированной задаче теории упругости при наличии объемных сил:

$$S_{ij,j}^k + X_i^k = 0, \quad \varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}(u_{i,j}^k + u_{j,i}^k), \quad S_{ij}^k = \lambda_0 \vartheta^k \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^k. \quad (3.2)$$

где $X_i^k = F_i^k + S_{ij,j}^{k*}$.

Для решения задачи каждого приближения удобно применять МГС.

4. ОСНОВЫ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

МГС основан на понятии состояния среды, под которым понимается любое частное решение определяющих уравнений среды безотносительно к условиям, поставленным на границе тела [1]. Понятие состояния среды трансформируется в понятие внутреннего состояния ξ , если речь заходит о конкретном теле, имеющем свои границы. Совокупность всех возможных внутренних состояний образует гильбертово пространство внутренних состояний Ξ . Поэтому внутреннее состояние может быть представлено в виде ряда Фурье по элементам ортонормированного базиса: $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \dots \xi^{(n)} \dots \in \Xi$, $(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) = \delta_{ij}$:

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)},$$

где $c_k = (\xi, \xi^{(k)})_{\Xi}$ — коэффициенты Фурье.

След, который оставляет на границе тела внутреннее состояние ξ , воспринимается как граничное состояние γ , соответствующее внутреннему. Совокупность всех граничных состояний образует гильбертово пространство граничных состояний Γ . Для него также справедливо разложение в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса: $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots \gamma^{(n)} \dots \in \Gamma$, $(\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)}) = \delta_{ij}$:

$$\gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)}, \quad c_k = (\gamma, \gamma^{(k)})_{\Gamma}.$$

Если пространства внутренних и граничных состояний изоморфны в смысле Гильберта:

$$(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = (\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}), \quad \alpha \xi = \alpha \gamma, \quad (\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)})_{\Gamma} = (\xi^{(i)}, \xi^{(j)})_{\Xi},$$

то изучение внутреннего состояния сводится к изучению соответствующего граничного состояния. При этом базисному набору элементов пространства Ξ однозначно соответствует базисный набор элементов пространства Γ .



5. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Система уравнений (1.1)-(1.3) эквивалентна уравнениям Ламе в частных производных второго порядка относительно перемещений [2]:

$$\mu_0 u_{i,jj}^k + (\lambda_0 + \mu_0) u_{j,ji}^k + X_i^k = 0.$$

В случае потенциальных сил $X_i^k = -\Pi_{,i}^k$ уравнение Ламе имеет общее решение (Папковича – Нейбера [2])

$$u_i^k = 4(1 - \nu_0) B_i - (x_j B_j + B_0)_{,i} + \chi_{,i}^k, \quad (5.1)$$

где Π^k — потенциал объемных сил k -го приближения, B_i — компонента произвольного гармонического вектора B .

В случае односвязной конечной области уместно общее решение Аржаных – Слободянского [2]:

$$u_i^k = 4(1 - \nu_0) B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j} + \chi_{,i}^k.$$

где χ^k удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\chi_{,ii}^k = \frac{1 - 2\nu_0}{2\mu_0(1 - \nu_0)} \Pi^k. \quad (5.2)$$

Представим решение (5.1) в виде суммы

$$u_i = u_i^L + u_i^P, \quad (5.3)$$

где второе слагаемое полагается в задаче известной частью

$$u_i^P = \chi_{,i},$$

а первое слагаемое

$$u_i^L = 4(1 - \nu_0) B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j} \quad (5.4)$$

строится методом граничных состояний как результат решения краевой задачи для однородных уравнений Ламе, в которой граничные условия содержат поправку относительно известной величины $u_i^L|_{\partial V} = u_i|_{\partial V} - u_i^P|_{\partial V}$ (вторая основная задача теории упругости) или $p_i^L|_{\partial V} = p_i|_{\partial V} - p_i^P|_{\partial V}$, $p_i^P|_{\partial V} = \sigma_{ij}^P|_{\partial V} n_j$, $\sigma_{ij}^P = \lambda_0 \vartheta \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^P$, $\vartheta = \varepsilon_{kk}^P$, $\varepsilon_{ij}^P = \frac{1}{2}(u_{i,j}^P + u_{j,i}^P)$ (первая основная задача).

Под внутренним состоянием ξ упругой среды будем полагать набор $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$. Скалярное произведение в пространстве Ξ определяется как

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi} \equiv \int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dv.$$

Выражение (5.4) формально оставляет за нулевым элементом пространства Ξ недоопределенность из-за несущественности значения уровня отсчета перемещения, которая легко преодолевается введением нормировки: в некоторой фиксированной точке каждое из состояний пространства должно иметь нулевое значение вектора перемещения.

Базис пространств внутренних состояний набирается в соответствии с (5.1) при отсутствии массовых сил через систему гармонических многочленов. После ортогонализации базиса атрибуты результирующего внутреннего состояния представляются рядами Фурье в соответствии с формулой (3.2)

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}. \quad (5.5)$$

Под граничным состоянием будем понимать набор функций точек границы $\gamma = \{u_i, p_i\}$, где $u_i|_{\partial V}$, $p_i|_{\partial V}$ — поверхностные усилия на границе тела: $p_i = \sigma_{ij} n_j$. Скалярное произведение в пространстве Γ определяется как

$$(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma} = \int_{\partial V} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds.$$

Формула (5.6) также позволяет представить все атрибуты граничного состояния рядами Фурье:

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}. \quad (5.6)$$

Оба пространства Ξ и Γ сопряжены гильбертовым изоморфизмом [3].

Таким образом, набор коэффициентов Фурье определяет упругое состояние в теле.

Решение первой задачи теории упругости сводится к отысканию коэффициентов Фурье через квадратуры

$$c_k = \int_{\partial V} p_i^L |_{\partial V} u_i^{(k)} dS. \quad (5.7)$$

Решение второй задачи сводится к расчету коэффициентов Фурье также через квадратуры

$$c_k = \int_{\partial V} u_i^L |_{\partial V} p_i^{(k)} dS.$$

Различные смешанные постановки реализуются через бесконечные системы уравнений, разрешимость некоторых из них доказана [1, 4].

6. ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ НЕОДНОРОДНОГО «ГВОЗДЯ»

6.1. Постановка задачи неоднородной теории упругости

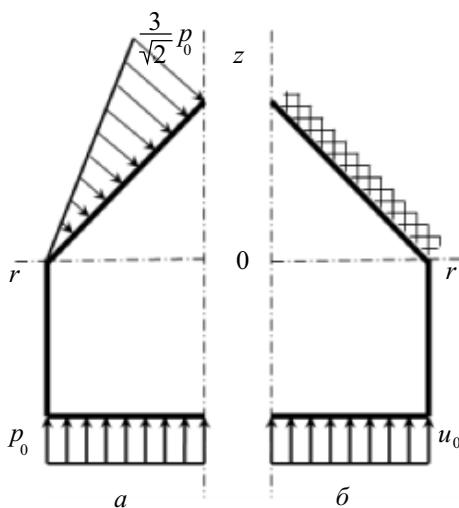


Рис. 1. Параметры нагружения «гвоздя»: a – первая задача, b – вторая задача

Задача решалась для нетривиального тела: цилиндра, накрытого конусом. Такое тело в дальнейшем будем называть «гвоздь» (рис. 1). «Гвоздь» безразмерного радиуса 1 параметризован цилиндрической системой координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, $z \in [-1, 1 - r]$. Материал среды характеризуется механическими параметрами Ламе, являющимися функциями точек границы, что в безразмерном представлении имеет вид: $\mu(x, y, z) = 1 + \frac{1}{10}(x^2 + y^2)$, $\lambda(x, y, z) = \frac{2}{3} + \frac{28}{45}(x^2 + y^2)$. Граница разбита на три участка (основание, цилиндр, конус): $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Рассматриваются две механические постановки задачи:

1) поверхность сектора нагружена распределенным усилием:

$$\mathbf{p}|_{S_1} = \{0, 0, p_0\}, \quad \mathbf{p}|_{S_2} = \{0, 0, 0\},$$

$$\mathbf{p}|_{S_3} = p_0 \left\{ \frac{(-3 + 3r) \cos \varphi}{\sqrt{2}}, \frac{(-3 + 3r) \sin \varphi}{\sqrt{2}}, \frac{(-3 + 3r)}{\sqrt{2}} \right\};$$

2) точки поверхности тела перемещаются в соответствии с условиями

$$\mathbf{u}|_{S_1} = \{0, 0, u_0\}, \quad \mathbf{u}|_{S_2} = \{0, 0, -u_0 z\}, \quad \mathbf{u}|_{S_3} = \{0, 0, 0\}.$$

Требуется построить напряженно деформированное состояние в условиях первой и второй основных задач.

6.2. Формирование базисов пространств состояний

Рассмотрим процесс формирования базисов внутреннего и граничного состояний на примере одного из элементов ([5], элемент 15 из табл. 1.1)

Вектор перемещения строим по формуле (5.1) при отсутствии объемных сил ($\chi = 0$), где гармонический вектор есть $B = \{0, 0, -x^2 y + y z^2\}$.



Получаем

$$u^{(15)} = \begin{pmatrix} -2xyz \\ -2y^2z \\ \frac{1}{5}(31x^2y + 21yz^2) \end{pmatrix}.$$

Из соотношения Коши находим компоненты тензора деформаций:

$$\hat{\varepsilon}^{(15)} = \begin{pmatrix} -2yz & -xz & -\frac{36}{5}xy \\ -xz & -4yz & -\frac{1}{10}(31x^2 + 10y^2 - 21z^2) \\ -\frac{36}{5}xy & -\frac{1}{10}(31x^2 + 10y^2 - 21z^2) & \frac{42}{5}yz \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора напряжений строим в соответствии с законом Гука:

$$\hat{\sigma}^{(15)} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{5}yz & -2xz & \frac{72}{5}yx \\ -2xz & -\frac{32}{5}yz & -\frac{1}{5}(31x^2 + 10y^2 - 21z^2) \\ -2xz & -\frac{72}{5}yx & \frac{92}{5}yz \end{pmatrix}.$$

Полные линейно-независимые наборы векторов u и тензоров $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ определяют базис внутреннего состояния.

Построим граничное состояние, изоморфное внутреннему. Значение вектора перемещения на границе установим как его предельное значение изнутри области. Перемещения на границах S_1 , S_2 , S_3 вычисляем, используя соответствующую параметризацию:

$$u^{(15)}|_{S_1} = \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ 2r^2 \sin^2 \varphi \\ 4.2r \sin \varphi - 6.2r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad u^{(15)}|_{S_2} = \begin{pmatrix} -2z \cos \varphi \sin \varphi \\ -2z \sin^2 \varphi \\ 4.2z^2 \sin \varphi - 6.2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$u^{(15)}|_{S_3} = -2r \sin \varphi \begin{pmatrix} r \cos \varphi (1 - r) \\ r \sin \varphi (1 - r) \\ (-2.1 + 4.2r - 2.1r^2 + 3.1r^2 \cos^2 \varphi) \end{pmatrix}.$$

Находим усилия на границе (удержано два знака в дробной части)

$$p^{(15)}|_{S_1} = \sigma^{(15)}|_{S_1} \cdot n_1 = \begin{pmatrix} 14.4r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ -4.2 + 6.2r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi \\ 18.4r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$p^{(15)}|_{S_2} = \sigma^{(15)}|_{S_2} \cdot n_2 = \begin{pmatrix} -4.4z \cos \varphi \sin \varphi \\ -2z \cos^2 \varphi - 6.4z \sin^2 \varphi \\ \sin \varphi (4.2z^2 - 2.6 \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) \end{pmatrix},$$

$$p^{(15)}|_{S_3} = \sigma^{(15)}|_{S_3} \cdot n_3 = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \varphi (3.11 + 7.07r) \\ 2.97 \sin \varphi - r \sin \varphi (5.94 - 2.97r + \cos^2 \varphi (1.41 + 2.97r) + \sin^3 \varphi (4.53 - 3.11r)) \\ \sin \varphi (2.97 + 7.07r - 10.04r^2 - 14.57 \cos^2 \varphi - 1.41r \sin^2 \varphi) \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в пространстве граничных состояний (5.5) с учетом параметризации поверхности приняло форму

$$(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^{(1)} u_i^{(2)} r dr + \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-1}^0 p_i^{(1)} u_i^{(2)} dz + \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^{(1)} u_i^{(2)} r dr.$$

Описанный процесс формирует изоморфные исходные базисы пространств состояний.



6.3. Решение основных задач

Решение первой задачи сводится к вычислениям по следующей цепочке действий:

- 1) нахождение массовых сил $S_{ij,j}^{k*}$ для каждого приближения в соответствии с (3.1) ($S_{ij}^{0*} = 0$);
- 2) восстановление потенциала объемных сил Π_k методом наименьших квадратов;
- 3) построение частного решения уравнения Пуассона (5.2);
- 4) декомпозиция решения (5.3), где $u_i^P = \chi_{,i}(u_i^{0P} = 0)$ и определение $\varepsilon_{ij}^P, \sigma_{ij}^P, p_i^P$ по цепочке действий, описанной в п. 5;
- 5) поправка в ГУ: $p_i^L = p_i - p_i^P$;
- 6) расчет коэффициентов Фурье в соответствии с (5.7), переписанной для границы «гвоздя»:

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^L u_i^k r dr + \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-1}^0 p_i^L u_i^k dz + \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^L u_i^k r dr;$$

- 7) построение внутреннего $u_i^L, \varepsilon_{ij}^L, \sigma_{ij}^L$ и граничного $u_i^L|_{\partial V} p_i^L|_{\partial V}$ состояний в соответствии с (5.5), (5.6) соответственно;
- 8) суммирование полей, помеченных «L» и «P»:

$$u_i = u_i^L + u_i^P, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^P, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^P, \quad u_i|_{\partial V} = u_i^L|_{\partial V} + u_i^P|_{\partial V}, \quad p_i|_{\partial V} = p_i^L|_{\partial V} + p_i^P|_{\partial V}.$$

Результатом решения задачи явились поля перемещений, деформаций и напряжений в теле и перемещения и усилия на границе тела. По результатам асимптотических приближений построены конечные суммы полей. Ввиду громоздкости выражений результаты решения задачи представлены в графической форме.

На рис. 2 представлен график зависимости напряжений σ_{xz} (как наиболее характерного представителя поля) первой основной задачи, построенный по

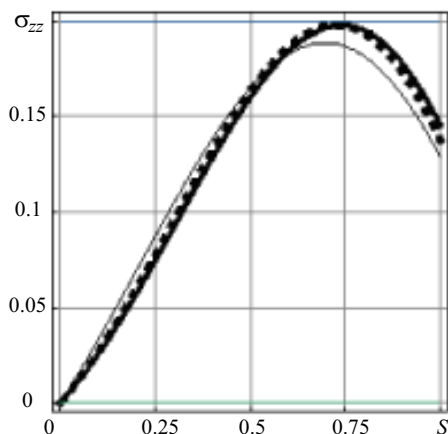


Рис. 2. Напряжения σ_{xz}

суммам начальных асимптотик (0 — тонкая сплошная, 0 + 1 — толстая, 0 + 1 + 2 — точечная). Распределения построены на луче, исходящем из начала координат в направлении $\{1, 0, -1\}$. Характер зависимости свидетельствует о достаточности двух асимптотических приближений для описания состояния тела.

На рис. 3–6 изображены купюры полей в осевом сечении для результирующих асимптотических приближений первой и второй основных задач. Незначительные качественные отличия в приближениях в первой основной задаче наблюдаются только в радиальных перемещениях, хотя количественные отличия налицо. В задаче о смятии «гвоздя» проявляются качественные отличия в приближениях в полях напряжений.

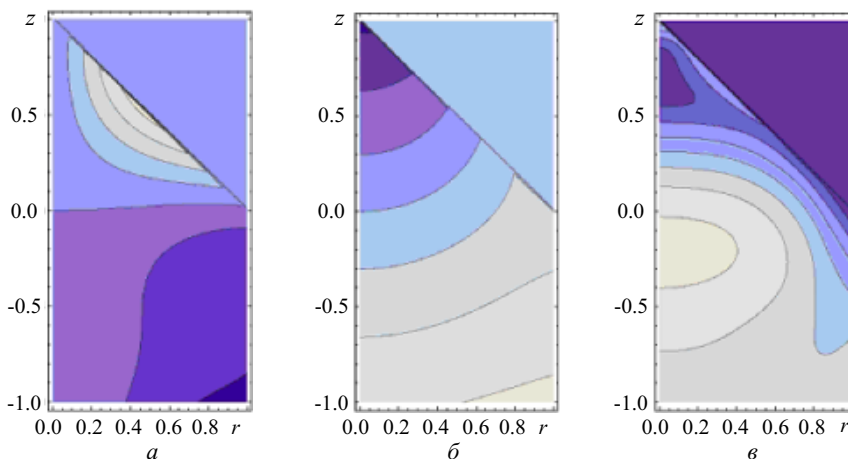


Рис. 3. Перемещения и изохромы первой основной задачи: а — радиальные, б — осевые, в — наибольшие касательные напряжения

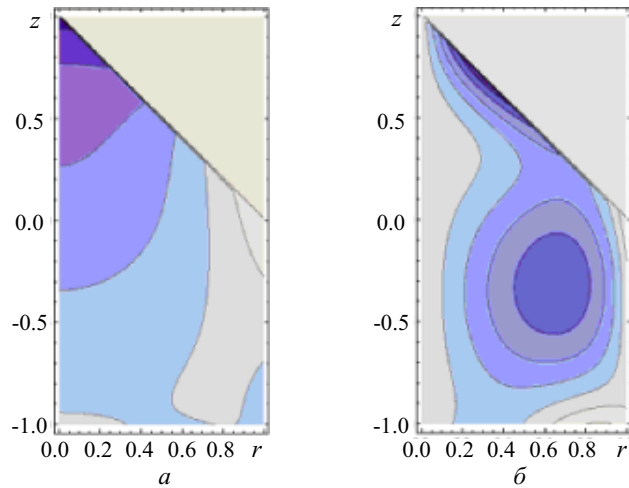


Рис. 4. Напряжения первой основной задачи: a — осевое, b — сдвиговое

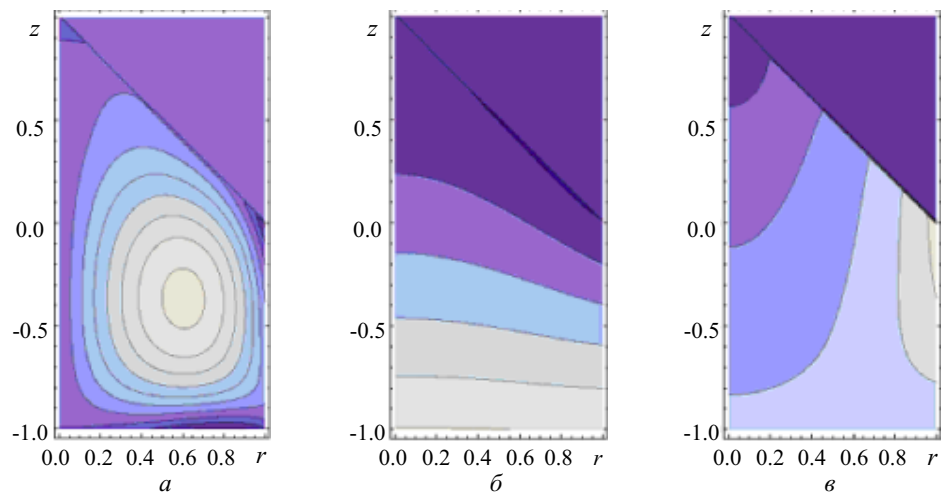


Рис. 5. Перемещения и изохромы второй основной задачи: a — радиальные, b — осевые, v — наибольшие касательные напряжения

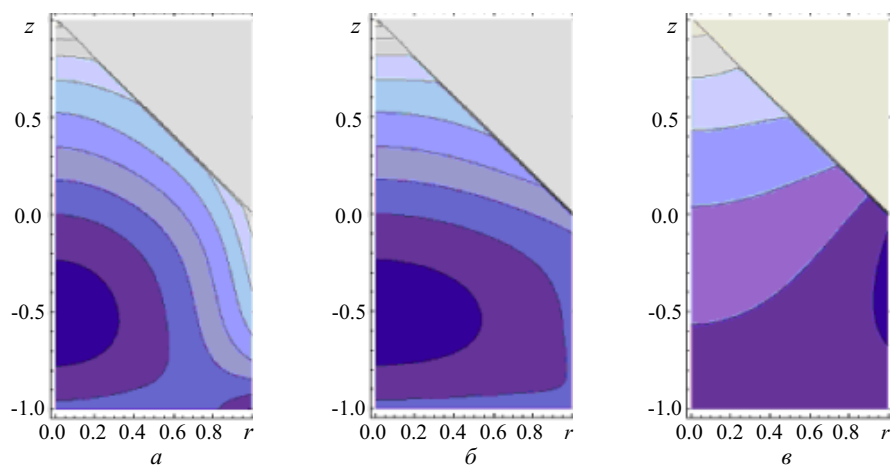


Рис. 6. Напряжения первой основной задачи: a — радиальное, b — осевое, v — сдвиговое



ВЫВОДЫ

1. Означенные классы задач имеют как самостоятельное значение, так и вспомогательное: к таким задачам часто приводятся нелинейные постановки после проведения декомпозиции. Технология решения этих задач методом граничных состояний заслуживает специального внимания.

2. Разработанный метод может эффективно применяться для решения задач термоэластостатики с несвязанными температурными и механическими полями, а также с полями, связанными в граничных условиях.

Библиографический список

1. Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный мат. журн. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
2. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
3. Колмогоров А. Н. Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 571 с.
4. Пеньков В. Б., Рожков А. Н. Метод граничных состояний в основной контактной задаче теории упругости // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11, вып. 2. Механика. С. 101–106.
5. Харитonenko А. А. Моделирование состояний гармонических сред и разработка метода распознавания состояний: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2006. 100 с.