Описанные выше вычисления были произведены на ЭВМ, время* вычислений составило 4.87 с.

Отметим, что время вычислений существенным образом зависит от величин x_1, x_2, x_3. Так, для определения неизвестных значений $x_1 = 122$, $x_2 = 1245$, $x_3 = 1381$, при тех же параметрах b, d, s, m и u_1, u_2, u_3, программе потребовался 1 ч 32 мин. В процессе поиска было перебрано 365263502 возможных троек, из которых 9169647 удовлетворяли неравенству (9).

Библиографический список

1. *Bayley D. H.* A Compendium of BBP-type Formulas for Mathematical Constants. Preprint. April, 2013. URL : http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/bbp-formulas.pdf (дата обращения 10.09.2013).
2. *Нестеренко А. Ю.* О статистических свойствах некоторых трансцендентных чисел // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та. 2012. № 6, ч. 2. С. 170–176.
3. *Ferguson H. R. P., Bailey D. H., Arno S.* Analysis of PSLQ, An Integer Relation Finding Algorithm // Math. of Computation. 1999. Vol. 68, № 225. P. 351–369.

Parameters Recovering Algorithm for One Class of Irrationalities

A. Yu. Nesterenko

National Research University «Higher School of Economics», Russia, 109028, Moscow, Bol. Trekhsvjatitel'skij per., 1-3/12, build. 8, nesterenko_a_y@mail.ru

In this article we study one class of irrationalities which may be defined as covergent series with rational coefficients. This class contain a lot of well known constants such as $\ln 2$, π, e.t.c. We consider the problem of determination parameters of rational coefficients by rational approximation of irrationality. We deduced the lower and upper bounds and present an algorithm for determination of unknown parameters. Also, we present some results of practical calculations.

Key words: irrationality, rational approximation.

References

1. Bayley D. H. *A Compendium of BBP-type Formulas for Mathematical Constants*. Preprint. April, 2013. Available at: http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/bbp-formulas.pdf (Accessed 10, September, 2013).
2. Nesterenko A. Yu. On the statistical properties of some transcendetal numbers. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta* [Scientific notes of the Oryol State University], 2012, no. 6, pt. 2, pp. 170–176 (in Russian).
3. Ferguson H. R. P., Bailey D. H., Arno S. Analysis of PSLQ, An Integer Relation Finding Algorithm. *Mathematics of Computation*, 1999, vol. 68, no. 225, pp. 351–369.

УДК 501.1

О ПОРОЖДАЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ ПОДАЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТОВ СВОБОДНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

В. М. Петроградский[1], И. А. Субботин[2]

[1] Доктор физико-математических наук, факультет математики, Университет Бразилиа, Бразилиа, petrogradsky@rambler.ru

[2] Аспирант кафедры алгебро-геометрических вычислений, факультет математики и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, shelby888@yandex.ru

Пусть $L = L(X)$ –- свободная ограниченная алгебра Ли конечного ранга k со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ над произвольным полем положительной характеристики. Пусть G –- нетривиальная конечная группа однородных автоморфизмов $L(X)$. Наша основная цель — доказать, что подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена. Мы получаем более сильный результат. Пусть $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ — однородное свободное порождающее множество

* Вычисления производились на ноутбуке HP EliteBook с процессором Intel Core i5 CPU M 560, тактовой частотой 2.67GHz и 4Gb оперативной памяти.

для подалгебры инвариантов L^G, где элементы Y_n имеют степень n относительно X, $n \geq 1$. Рассмотрим соответствующую производящую функцию $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$. В нашем случае свободных ограниченных алгебр Ли мы доказываем, что ряд $\mathscr{H}(Y,t)$ имеет радиус сходимости $1/k$, и описываем его рост при $t \to 1/k - 0$. В результате получаем, что последовательность $|Y_n|$, $n \geq 1$, растет экспоненциально с показателем экспоненты k.

Ключевые слова: свободные алгебры Ли, ограниченные алгебры Ли, инварианты свободных алгебр Ли, порождающее множество.

ВВЕДЕНИЕ. ИНВАРИАНТЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Пусть $L = L(x_1, \dots, x_m)$ — свободная алгебра Ли. Предположим, что G — конечная группа автоморфизмов алгебры Ли L. Рассмотрим подалгебру инвариантов $H = L^G = \{x \in L \mid g \cdot x = x,\ g \in G\}$. По теореме Ширшова–Витта любая подалгебра в свободной алгебре Ли свободна [1, 2]. Подалгебра инвариантов бесконечно порождена в случае нетривиальной конечной группы однородных автоморфизмов [3].

Теорема 1 [4]. *Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, поле K произвольно. Рассмотрим диагональное действие G на свободной алгебре Ли $L = L(x_1, \dots, x_k)$. Пусть $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$, — однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G и $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ — соответствующая производящая функция. Тогда последовательность $|Y_n|$ растет экспоненциально:* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Y_n|} = k$.

Более подробное описание асимптотик см. [4]. Цель настоящей статьи — доказательство аналогичного результата для свободных ограниченных алгебр Ли (см. п. 2, теорема 5). Доказательство предыдущей теоремы, а также доказательство основного результата настоящей статьи основаны на следующем результате.

Теорема 2 [3, теорема 3.2]. *В условиях теоремы 1 и обозначений выше существует предел*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\dim L^G_{im}}{\dim L_{im}} = \frac{m}{|G|}.$$

Пусть L — алгебра Ли над полем K характеристики $p > 0$. Используем стандартное обозначение $\operatorname{ad} x : L \to L$, $\operatorname{ad} x(y) = [x, y]$, $x, y \in L$. Алгебра Ли L называется *ограниченной алгеброй Ли* (или *p-алгеброй Ли*), если она дополнительно наделена унарной операцией $x \mapsto x^{[p]}$, $x \in L$ [5, 6].

Рассмотрим две мультипликативные функции, предложенные в [7]:

$$1_p(n) = \begin{cases} 1, & (p,n) = 1, \\ 1 - p, & (p,n) = p, \end{cases}$$

$$\mu_p(n) = \begin{cases} \mu(n), & (p,n) = 1, \\ \mu(m)(p^s - p^{s-1}), & n = mp^s, \quad (p,m) = 1, \quad s \geq 1. \end{cases}$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мебиуса. Функцию $\mu_p(n)$ также можно рассматривать как деформацию функции Мебиуса. Заметим, что имеют место следующие оценки:

$$|1_p(n)| \leq n, \qquad |\mu_p(n)| \leq n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Свободная ограниченная алгебра Ли L_p порожденная множеством $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, определяется при помощи стандартных конструкций [6, 8].

Теорема 3 [9]. *Пусть $L = L_p(X)$ — свободная p-алгебра Ли порожденная множеством $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда имеют место следующие аналоги формулы Витта для размерностей полиоднородных компонент и производящих функций:*

$$\mathscr{H}(L,t) = -\sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a} \ln(1 - kt^a), \qquad \dim L_n = \frac{1}{n} \sum_{a|n} \mu_p(a) k^{n/a}.$$

Пусть $\mathbb{Q}[[t]]$ — кольцо формальных степенных рядов от одной переменной, а также $\mathbb{Q}[[t]]_0$— его подмножество, состоящее из рядов с нулевым свободным членом. Введем операторы $\mathscr{E}_p,\blacksquare\mathrm{L}_p$ на формальных степенных рядах следующим образом:

$$\mathscr{E}_p(\phi)(t) = \exp\left(\sum_{b=1}^{\infty} \frac{1_p(b)}{b}\,\phi(t^b)\right), \qquad \phi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]_0,$$

$$\blacksquare\mathrm{L}_p(\phi)(t) = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a}\ln(\phi(t^a)), \qquad \phi(t) \in 1 + \mathbb{Q}[[t]]_0.$$

Теорема 4 [9]. *Пусть $L = \mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ — градуированная ограниченная алгебра Ли. Тогда ряды Гильберта–Пуанкаре для L и ее ограниченной обертывающей алгебры $u(L)$ связаны следующим образом: $\mathscr{H}(u(L),t) = \mathscr{E}_p(\mathscr{H}(L,t))$ и $\mathscr{H}(L,t) = \blacksquare\mathrm{L}_p(\mathscr{H}(u(L),t))$.*

2. ПОРОЖДАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО ДЛЯ ПОДАЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТОВ СВОБОДНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Рассмотрим конечную нетривиальную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, действующую на конечномерном пространстве $V = \langle x_1, \dots, x_k\rangle_K$, где K — произвольное поле положительной характеристики p. Пусть $L = L(x_1, \dots, x_k)$ — свободная ограниченная алгебра Ли, порожденная множеством $\{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда естественно возникает продолжение действия этой группы G однородными автоморфизмами на всей ограниченной алгебре Ли $L(X)$. А именно пусть $\phi \in \mathrm{GL}(V)$, рассмотрим элемент $v \in L$, тогда $v = f(x_1, \dots, x_k)$, и мы определяем действие так: $\phi(v) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_k))$.

Теорема 5. *Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, где K — произвольное поле характеристики p. Рассмотрим диагональное действие G на свободной ограниченной алгебре Ли $L = L(x_1, \dots, x_k)$, порожденной множеством $\{x_1, \dots, x_k\}$. Пусть $Y = \mathop{\cup}\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$, $n \geq 1$, — однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G, а также $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ — соответствующая производящая функция. Тогда*

1) $\mathscr{H}(Y,t)$ не зависит от выбора однородного свободного порождающего множества Y;

2) производящая функция имеет следующую асимптотику:

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \Big(1 - kt\Big)^{1/|G| + o(1)}, \qquad t \to 1/k - 0.$$

3) радиус сходимости для $\mathscr{H}(Y,t)$ равен $1/k$;

4) последовательность $|Y_n|$ растет экспоненциально: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Y_n|} = k$;

5) подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена.

Здесь $t \to 1/k - 0$ обозначает, что вещественная переменная стремится слева к $1/k$. Наше доказательство основано на аналоге теоремы 2.

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть m — порядок подгруппы G_0 группы G, состоящих из элементов, действующих скалярно на $V = \langle x_1, \dots, x_k\rangle_K$. Тогда в условиях теоремы 5 и обозначениях выше существует предел*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\dim L^G_{im}}{\dim L_{im}} = \frac{m}{|G|}.$$

Лемма 2. *Пусть ξ — примитивный корень из единицы порядка m. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеем:*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} = \begin{cases} m, & m \mid n, \\ 0, & m \nmid n. \end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть L — свободная ограниченная алгебра Ли ранга k. Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подалгебру Ли, состоящую из m-кратных компонент, (подалгебру Веронезе) $L_{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_{mi} \subset L$. Тогда для ее производящей функции имеет место асимптотика*

$$\mathscr{H}(L_{(m)}, t) \approx -\frac{1}{m} \ln(1-kt), \qquad t \to 1/k - 0.$$

К сожалению, формат данной статьи не позволяет привести доказательства данных утверждений.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Доказательство теоремы 5. Производящая функция для подалгебры Веронезе вещественная и согласно лемме 3 имеем для любого фиксированного $N \in \mathbb{N}$ также

$$\lim_{t\to 1/k-0} \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi} = +\infty.$$

По лемме 1 для любого числа $\epsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left(\frac{m}{|G|} - \epsilon\right) \dim L_{mi} \le \dim L_{mi}^G \le \left(\frac{m}{|G|} + \epsilon\right) \dim L_{mi}, \qquad i \ge N.$$

Непосредственными вычислениями мы получаем:

$$\mathscr{H}(L^G, t) \approx -\frac{1}{|G|} \ln(1-kt), \qquad t \to 1/k - 0. \tag{2}$$

Теперь мы рассмотрим производящую функцию для $R = u(L^G)$ — ограниченной обертывающей алгебры инвариантов. Используем теорему 4:

$$\mathscr{H}(R, t) = \mathscr{E}_p(\mathscr{H}(L^G, t)) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_p(n)}{n} \mathscr{H}(L^G, t^n)\right). \tag{3}$$

Хорошо известно, что R изоморфна свободной ассоциативной алгебре $A(Y)$, порожденной множеством Y, и в этом случае [10]

$$\mathscr{H}(R, t) = \mathscr{H}(A(Y), t) = \frac{1}{1 - \mathscr{H}(Y, t)}. \tag{4}$$

Из (4) и (3) мы получаем:

$$\mathscr{H}(Y, t) = 1 - \frac{1}{\mathscr{H}(R, t)} = 1 - \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_p(n)}{n} \mathscr{H}(L^G, t^n)\right), \tag{5}$$

из чего следует первое утверждение.

Так как $\dim L_n^G \le \dim L_n$ для всех $n \ge 1$, мы видим, что первое слагаемое $\mathscr{H}(L^G, t)$ в сумме справа (5) определено для любого комплексного $|t| < 1/k$. Значит, другие члены $\mathscr{H}(L^G, t^n)$, $n \ge 2$, определены для всех $|t| < \sqrt{1/k}$. Покажем, что они не меняют асимптотики при $t \to 1/k - 0$, которую дает первое слагаемое.

Действительно, согласно (2) для первого слагаемого имеем $\mathscr{H}(L^G, t) \to +\infty$ при $t \to 1/k - 0$. Так как наш ряд не имеет свободного члена, можем записать $\mathscr{H}(L^G, t) = tf(t)$, где $f(t)$ — ряд с неотрицательными коэффициентами. Как отмечено выше, $f(1/k^2) = k^2 \mathscr{H}(L^G, 1/k^2) = C$ — конечное число. Рассмотрим $t \in \mathbb{C}$, причем $|t| < 1/k$. Тогда

$$|f(t^n)| \le f(|t|^n) < f(1/k^2) = C, \qquad n \ge 2. \tag{6}$$

Используя оценки (1) и (6), сумма слагаемых начиная со второго в (5) оценивается константой:

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1_p(n)}{n} \mathscr{H}(L^G, t^n)\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |\mathscr{H}(L^G, t^n)| \le \sum_{n=2}^{\infty} |t|^n |f(t^n)| \le \frac{C}{k^2(1-1/k)} < \infty, \qquad |t| < 1/k. \tag{7}$$

Таким образом, используем (5), (2) и (7), получаем

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \exp\left(\frac{1+o(1)}{|G|}\ln(1-kt)\right) = 1 - (1-kt)^{1/|G|+o(1)}, \qquad t \to 1/k - 0, \tag{8}$$

что доказывает второе утверждение теоремы.

Заметим, что $\mathscr{H}(Y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$, где $|Y_n| \le \dim L_n$. Обозначим через W диск $|t| < 1/k$. Получаем, что $\mathscr{H}(Y,t)$ сходится, по крайней мере, в W. Предположим, что $t_0 = 1/k$ является *регулярной* точкой для $\mathscr{H}(Y,t)$, то есть существует аналитическое продолжение $h(t)$ в окрестности $W_0 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t - 1/k| < \epsilon\}$ такое, что $\mathscr{H}(Y,t) = h(t)\Big|_{t \in W \cap W_0}$ [11]. Тогда мы имеем разложение в ряд Тейлора:

$$h(t) = c_0 + c_1(t - 1/k) + c_2(t-1/k)^2 + \ldots, \qquad t \in W_0. \tag{9}$$

Сопоставляя пределы (8) и (9) при $t \to 1/k - 0$, получаем $c_0 = 1$. Сравниваем следующие коэффициенты:

$$c_1 = \lim_{t\to 1/k} \frac{h(t)-1}{t-1/k} = \lim_{t \to 1/k-0} \frac{\mathscr{H}(Y,t)-1}{t-1/k} = \lim_{t\to 1/k-0} k(1-kt)^{1/|G|-1+o(1)} = +\infty,$$

здесь мы использовали, что $|G| > 1$, получаем противоречие. Это противоречие доказывает, что точка $t_0 = 1/k$ не является регулярной для $\mathscr{H}(Y,t)$ и радиус сходимости для $\mathscr{H}(Y,t)$ в нуле равен $1/k$, см. [11]. Утверждение (3) доказано. Утверждение (4) следует из формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости ряда [11]. Последнее утверждение очевидно. $\square$

Авторы благодарны Роджеру Брайанту за обсуждение.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта CNPq, Бразилия.

Библиографический список

1. *Ширшов А. И.* Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33. С. 441–452.

2. *Witt E.* Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. 1956. Vol. 64. P. 195–216.

3. *Bryant R. M.* On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra // J. London Math. Soc. 1991. Vol. 43, № 2. P. 215–224.

4. *Петроградский В. М., Смирнов А. А.* Об инвариантах модулярных свободных алгебр Ли // Фунд. прикл. мат. 2009. Т. 15, № 1. С. 117–124.

5. *Jacobson N.* Lie algebras. N. Y. : Interscience, 1962. 332 p.

6. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.

7. *Petrogradsky V. M.* On Witt's formula and invariants for free Lie superalgebras // Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow 2000). Springer, 2000. P. 543–551.

8. *Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V.* Infinite dimensional Lie superalgebras. de Gruyter Exp. Math. Vol. 7. Berlin : de Gruyter, 1992. 250 p.

9. *Petrogradsky V. M.* Witt's formula for restricted Lie algebras // Adv. Appl. Math. 2003. Vol. 30. P. 219–227.

10. *Petrogradsky V. M.* Asymptotic problems in algebraic structures // Limit of graphs in group theory and computer science. / ed. G. Arzhantseva, A. Valette. Lausanne : EPFL Press, 2009. P. 77–108.

11. *Маркушевич А. Л., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. М. : Просвещение, 1977. 320 с.

12. *Петроградский В. М.* Об инвариантах действия конечной группы на свободной алгебре Ли // Сиб. мат. журн. 2000. Vol. 41, № 4. P. 915–925.

13. *Петроградский В. М.* Характеры и инварианты свободных супералгебр Ли // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 1. С. 158–181.

About Generating Set of the Invariant Subalgebra of Free Restricted Lie Algebra

V. M. Petrogradsky[1], **I. A. Subbotin**[2]

[1]Department of Mathematics, University of Brasilia, 70910-900 Brasilia DF, Brazil, petrogradsky@rambler.ru

[2]Ulyanovsk State University, Russia, 432970, Ulyanovsk, ul. L'va Tolstogo, 42, shelby888@yandex.ru

Suppose that $L = L(X)$ is the free Lie p–algebra of finite rank k with free generating set $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ on a field of positive characteristic. Let G is nontrivial finite group of homogeneous automorphisms $L(X)$. Our main purpose to prove that L^G subalgebra of invariants is is infinitely generated. We have more strongly result. Let $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ be homogeneous free generating set for the algebra of invariants L^G, elements Y_n are of degree n relatively X, $n \ge 1$. Consider the corresponding generating function $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$. In our case of free Lie restricted algebras, we prove, that series $\mathscr{H}(Y,t)$ has a radius of convergence $1/k$ and describe its growth at $t \to 1/k - 0$. As a result we obtain that the sequence $|Y_n|$, $n \ge 1$, has exponential growth.

Key words: free Lie algebras, Lie p-algebras, invariants, generating set.

References

1. Shirshov A. I. Subalgebras of free Lie algebra. *Mat. sb.*, 1953, vol. 33, no. 2, pp. 441–452 (in Russian).
2. Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. *Math. Z.*, 1956, vol. 64, pp. 195–216.
3. Bryant R. M. On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra. *J. London Math. Soc.* 1991, vol. 43, no. 2, pp. 215–224.
4. Petrogradsky V. M., Smirnov A. A. On invariants of modular free Lie algebras. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 166, no. 6, pp. 767–772.
5. Jacobson N. *Lie algebras*. New York, Interscience, 1962. 332 p.
6. Bahturin Yu. A. *Identical Relations in Lie Algebras*. Netherlannds, VNU Sciens Press BV, 1987, 309 p.
7. Petrogradsky V. M. On Witt's formula and invariants for free Lie superalgebras. *Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow 2000)*, Springer, 2000, pp. 543–551.
8. Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. *Infinite-dimensional Lie superalgebras*. de Gruyter Exp. Math., Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1992, vol. 7, 250 p.
9. Petrogradsky V. M. Witt's formula for restricted Lie algebras. *Adv. Appl. Math.*, 2003, vol. 30, pp. 219–227.
10. Petrogradsky V. M. Asymptotic problems in algebraic structures. *Limit of graphs in group theory and computer science*. ed. G. Arzhantseva, A. Valette, Lausanne, EPFL Press, 2009, pp. 77–108.
11. Markushevich A. L., Markushevich L. A. *Vvedenie v teoriiu analiticheskikh funktsii* [Introduction to the theory of analytic functions]. Moscow, Prosveshchenie, 1977, 320 p. (in Russian).
12. Petrogradsky V. M. On invariants of the action of a finite group on a free lie algebra. *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 4, 763–770.
13. Petrogradsky V. M. Characters and invariants for free Lie superalgebras. *St. Petersburg Math. J.*, 2002, vol. 13, no. 1, pp. 107–122.

УДК 517.54

ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА СО СТЕПЕННОЙ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

Д. В. Прохоров[1], **К. А. Самсонова**[2]

[1]Профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ProkhorovDV@info.sgu.ru

[2]Аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kris_ruzhik@mail.ru

Рассматривается качественное локальное поведение траекторий обыкновенного дифференциального уравнения Левнера с управляющей функцией, обратной к степенной функции, с целым показателем степени. Выделены все особые точки и соответствующие им сингулярные решения. Показано, что эта управляющая функция порождает решения уравнения Левнера, которые представляют собой отображения полуплоскости с гладким разрезом на верхнюю полуплоскость. Найдено асимптотическое соотношение между гармоническими мерами сторон разреза.

Ключевые слова: уравнение Левнера, гармоническая мера, сингулярное решение, управляющая функция, C^1-кривая.