

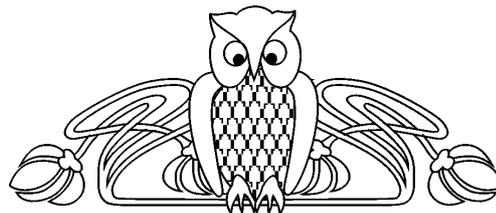


УДК 539.374

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ (КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ТЕЧЕНИЕ НА ГРАНИ И РЕБРЕ ПРИЗМЫ КУЛОНА – ТРЕСКА)

Ю.Н. Радаев

Самарский государственный университет,
кафедра механики сплошных сред
E-mail: radayev@ssu.samara.ru



В работе приводится вывод правильно определенной системы уравнений, описывающей кинематику пространственного идеально пластического течения на ребре призмы Кулона – Треска, и дано исследование основных кинематических уравнений (включая пространственные соотношения Коши и уравнения совместности для приращений деформаций) с помощью триортogonalной изостатической системы координат. Устанавливаются правильная определенность и гиперболичность системы уравнений для приращений перемещений и находятся ее характеристические направления. Выводятся соотношения для приращений перемещений вдоль линий главных напряжений, обобщающие известные соотношения Гейрингера. Отдельно рассматриваются кинематические соотношения для случаев плоского деформированного и осесимметричного состояний. Исследована кинематика скольжения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Показано, что скольжения на указанной поверхности происходят вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т.е. когда Гауссова кривизна положительна, поверхности максимальной скорости сдвига.

Three-Dimensional Problem of Perfect Plasticity (Kinematic Equations Determining Three-Dimensional Plastic Flow for a Facet and Edge of the Tresca Prism)

Yu.N. Radayev

In the present study a system of partial differential equations which describes kinematic of three-dimensional plastic flow for the states corresponding to an edge of the Tresca prism is obtained. The system includes the Cauchy equations and the compatibility equations formulated for the displacements and strains increments. These equations are then analysed by the aid of the triorthogonal isostatic co-ordinate net. The system of kinematic equations is shown correctly determines displacements increments and be of the hyperbolic type. Relations for the displacements increments valid along principal stress lines are derived. Kinematic of plane and axial symmetric plastic flow are separately considered for each case. Kinematic equations for states corresponding to a facet of the Tresca prism which are of the less importance are also examined. Slip kinematic on a surface of maximum shear strain rate in perfectly plastic continuous media is studied. Sliding on the surface is shown can be realized only along asymptotic directions and only within hyperbolic zones of the surface (wherein the Gaussian curvature of the surface is negative). Integrable equations along asymptotic lines of the maximum shear strain rate surface for the jumps of tangent velocities are obtained. Kinematic equations corresponding to elliptic zones on a maximum shear strain rate surface (i.e. if the Gaussian curvature of the surface is positive) are derived and analysed.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона – Треска, для подавляющего большинства пространственных состояний уравнения теории идеальной пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Так, пространственная задача математической теории пластичности в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптичны (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения, действительные



характеристики отсутствуют. Не спасает положения учет упругих деформаций. Фактор упрочнения в принципе гарантирует эллиптичность уравнений. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время неассоциированных законов пластического течения. После осмысления всех этих результатов в отчетливой форме и была сформулирована задача: *найти такие определяющие зависимости, чтобы в области пластического течения всегда существовали, по меньшей мере, два семейства характеристических поверхностей, получив тем самым пространственные уравнения теории идеальной пластичности, адекватно описывающие скольжение.*

Подытоживая почти полувековую дискуссию по указанной проблематике, можно сказать, что предельные состояния идеально пластических тел должны описываться статически определенными уравнениями гиперболического типа. Именно такое положение дел имеет место в пространственной задаче теории идеальной пластичности при использовании критерия текучести Кулона – Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся статически определенными и гиперболическими. основополагающими работами этого важнейшего направления современной теории пластичности выступают статьи Д.Д. Ивлева [1], [2]. В монографии [3] с помощью изостатической координатной сетки были исследованы основные соотношения пространственной задачи математической теории пластичности для течения на ребре призмы Кулона – Треска.

Целью представляемой работы являются вывод правильно определенной системы уравнений, описывающей кинематику пространственного пластического течения на ребре призмы Кулона – Треска, и исследование кинематических уравнений с помощью триортогональной изостатической системы координат.

В первом параграфе статьи рассматриваются трехмерные уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру условия текучести Кулона – Треска, дается их классификация и с помощью геометрических условий совместности Адамара – Томаса определяются характеристические направления. Здесь же выводится ряд замечательных инвариантных форм указанных уравнений. Во втором параграфе исследуются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения на ребре призмы Кулона – Треска и основные соотношения для приращений перемещений, следующие из него. Устанавливаются правильная определенность и гиперболичность системы уравнений для приращений перемещений и находятся ее характеристические направления. Затем (см. параграф 3 представляемой работы) анализируются уравнения математической теории пластичности для грани призмы Кулона – Треска и доказывается, что задача для приращений перемещений является неправильно определенной: *три* компоненты приращения вектора перемещений должны удовлетворять *пяти* независимым уравнениям. В следующем параграфе работы выводятся пространственные соотношения Коши в приращениях относительно триортогональной изостатической координатной сетки. Триортогональная изостатическая координатная сетка характеризуется тем, что ее координатные линии суть взаимно ортогональные траектории главных напряжений. В тех случаях, когда указанная координатная сетка существует, оказывается наиболее естественным рассматривать те или иные тензорные уравнения относительно именно таких криволинейных координат. Кинематические соотношения для пространственного пластического течения исследуются в пятом параграфе с помощью изостатических координат. Далее (параграф 6) приводятся уравнения совместности для приращений деформаций, а затем — вывод кинематических соотношений для случаев плоского деформированного и осесимметричного состояний (параграфы 7 и 8). Заканчивается работа параграфом 9, где дан анализ пластического скольжения на поверхности максимальной скорости сдвига и доказывается, что скольжения на указанной поверхности происходят вдоль асимптотических направлений.

1. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СОСТОЯНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РЕБРУ ПРИЗМЫ КУЛОНА – ТРЕСКА

Условие текучести Треска, или условие максимального касательного напряжения, имеет следующий вид:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = Y, \quad (1.1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — собственные значения тензора напряжений (главные нормальные напряжения); Y —



предел текучести при одноосном растяжении. Величины

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

называются главными касательными напряжениями и представляют собой экстремальные значения касательных напряжений для всех возможных площадок, проходящих через заданную точку. Пространственное напряженное состояние в данной точке весьма просто анализируется с помощью графического метода Мора (O. Mohr), который дает также простую схему для определения величины нормального и касательного напряжения в зависимости от ориентации площадки в пространстве [4].

Условие текучести Треска устанавливает, что величина Y связана с величиной k (пределом текучести при чистом сдвиге) простым соотношением $Y = 2k$.

Уравнение призмы Кулона – Треска (1.1), очевидно, можно также представить в форме

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - Y^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - Y^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - Y^2] = 0. \quad (1.2)$$

В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (1.2), представляет собой правильную шестигранную призму (призма Кулона – Треска), ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства. Кривая текучести (сечение призмы Кулона – Треска девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат и стороной, равной $\sqrt{2/3}Y$.

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска. Обозначим через σ тензор напряжений; $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.3)$$

В пространстве главных напряжений ребра призмы Кулона – Треска определяются уравнениями

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что два главных напряжения равны по величине, а главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Сделаем одно существенное для всего дальнейшего изложения замечание. Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}). Их преимущественное положение в упомянутой плоскости может быть указано только либо 1) после анализа тензора приращений пластических деформаций $d\epsilon^P$, который в силу ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений σ и обладает, вообще говоря, уникальным триэдром главных направлений; либо 2) условиями «подгонки» триэдра $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ до триортогональной системы. Все эти вопросы будут затронуты в параграфе 2.

Так как $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор.

Учитывая (1.3), (1.4) и уравнение ребра призмы Кулона – Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим

$$\sigma = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.5)$$



Таким образом, тензор напряжений определяется скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем \mathbf{n} .

Уравнение равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ после подстановки в него разложения (1.5) можно представить в следующем виде:

$$\text{grad } \sigma_3 \mp 2k \text{ div } (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.6)$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Кулона – Треска, формально статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора \mathbf{n}), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Обозначим через Σ безразмерное отношение σ_3 к $\mp 2k$ и приведем уравнение (1.6) к виду:

$$\text{grad } \Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.7)$$

В декартовых координатах векторное уравнение (1.7) эквивалентно системе трех скалярных уравнений ($i, k = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (n_k n_k = 1).$$

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.7):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

где ∇ — пространственный оператор Гамильтона.

Для единичного векторного поля справедлива формула¹

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}, \quad (1.9)$$

с помощью которой векторное уравнение (1.8) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{ div } \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.10)$$

Исследуем характеристики уравнения (1.10). Для этого будем трактовать характеристические поверхности уравнения (1.10) как поверхности слабого разрыва Σ и \mathbf{n} и воспользуемся условиями совместности Адамара – Томаса [5]:

$$[\nabla \Sigma] = B \mathbf{N}, \quad [\nabla \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{b}, \quad (1.11)$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва; \mathbf{N} — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва; B, \mathbf{b} — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть действительно поверхность слабого разрыва.

На основании уравнения (1.10) имеем:

$$[\nabla \Sigma] - \mathbf{n} \times [\text{rot } \mathbf{n}] + \mathbf{n} [\text{div } \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

и, применяя условия совместности (1.11), получим

$$B \mathbf{N} - \mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

Кроме того, так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, то $\mathbf{n} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{n})^T = \mathbf{0}$ и, следовательно, $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{N} = \mathbf{0}$, что приводит к следующему соотношению на поверхности слабого разрыва:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.14)$$

¹Приводимая ниже формула является прямым следствием тождества

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}$$

и условия нормировки $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$.



Замечая, что $\mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b}$, и учитывая (1.14), уравнение (1.13) приводим к виду

$$B\mathbf{N} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.15)$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор \mathbf{N} :

$$B + 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) = 0. \quad (1.16)$$

Умножая обе части уравнения (1.15) скалярно на вектор \mathbf{n} , получим также

$$B(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.17)$$

Подставляя в это уравнение выражение для B , полученное с помощью предыдущего уравнения, находим, что

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})(1 - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^2) = 0. \quad (1.18)$$

Это уравнение распадается на два. Если $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} \neq 0$, то необходимо

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.19)$$

Если $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0$, то на основании (1.16) $B = 0$, и тогда уравнение (1.15) дает $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} = \mathbf{0}$, откуда в силу того, что равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.20)$$

Итак, уравнение (1.10) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям в силу (1.19) образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора \mathbf{n} . Ясно, что характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и согласно (1.20) интегральные поверхности поля \mathbf{n} (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля \mathbf{n}).

2. УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕЧЕНИЯ НА РЕБРЕ ПРИЗМЫ КУЛОНА – ТРЕСКА И СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает, что в пространстве напряжений вектор, представляющий тензор приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$, ортогонален регулярной поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ в данном напряженном состоянии $\boldsymbol{\sigma}$:

$$d\varepsilon^P = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda. \quad (2.1)$$

Величина $d\lambda$, называемая неопределенным множителем, положительна при активном пластическом нагружении, признаком которого является выполнение условий $f = 0$, $df = 0$. Следует отметить, что множитель $d\lambda$ не может быть вычислен через определяющие функции, и его значение должно вычисляться в процессе решения краевой задачи.

Для изотропного тела критерий текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ связывает некоторой зависимостью главные нормальные напряжения

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (2.2)$$

причем функция текучести f на самом деле зависит от трех независимых симметрических комбинаций главных нормальных напряжений; в качестве таковых могут быть выбраны линейная, квадратичная и кубическая симметрические формы главных нормальных напряжений

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3), \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$



В теории идеальной пластичности обычно предполагается, что гидростатическое напряжение никак не влияет на текучесть, а поэтому функция текучести f в действительности зависит лишь от разностей главных нормальных напряжений, т.е. от двух независимых инвариантов девиатора тензора напряжений

$$J'_2 = \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2),$$

$$J'_3 = \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2).$$

Ассоциированный закон течения (2.1) для изотропного тела устанавливает соосность тензоров $d\varepsilon^P$ и σ .

Действительно, если $f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — регулярная изотропная функция тензора напряжений σ , то

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Доказательство формулы (2.3) базируется на фундаментальных соотношениях дифференцирования собственных значений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ симметричного тензора второго ранга по самому тензору σ

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

Для доказательства этих соотношений продифференцируем спектральное разложение тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j$$

по σ_{ks} и в результате получим равенство (при дифференцировании *не должна* учитываться симметрия тензора напряжений, иначе необходимые частные производные будут вычислены неправильно)

$$\delta_{ik} \delta_{js} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ks}} l_i l_j + \sigma_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial \sigma_{ks}} + \sigma_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial \sigma_{ks}} + \dots,$$

сворачивая обе части которого сначала с l_i , а затем с l_j , приходим (невывисанные слагаемые при этом дают нулевой вклад в силу взаимной ортогональности собственных векторов) к

$$l_k l_s = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ks}} + \sigma_1 l_i \frac{\partial l_i}{\partial \sigma_{ks}} + \sigma_1 l_j \frac{\partial l_j}{\partial \sigma_{ks}}.$$

Учитывая, что $l_j l_j = 1$ и поэтому

$$l_j \frac{\partial l_j}{\partial \sigma_{ks}} = 0,$$

сразу же получаем

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ks}} = l_k l_s,$$

и аналогично

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ks}} = m_k m_s, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ks}} = n_k n_s,$$

что и доказывает (2.4).

Если два собственных значения равны (скажем, $\sigma_1 = \sigma_2$), а третье с ними не совпадает, то частные производные $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma}$ становятся неопределенными. Однако в силу $\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}$ их сумма будет вполне определенной, так как выполняется равенство

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.$$

В главных осях тензора напряжений ассоциированный закон течения изотропного тела (2.1) имеет следующий вид:

$$d\varepsilon_j^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda, \quad (2.5)$$

где здесь и в дальнейшем $d\varepsilon_j^P$ — собственные значения тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$, которые, вообще говоря, отличаются от *приращений* собственных значений ε_j^P тензора

²Или главные приращения пластических деформаций.



пластических деформаций ε^P . С учетом этого замечания спектральное разложение тензора $d\varepsilon^P$ представляется как

$$d\varepsilon^P = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1^P + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3^P.$$

Для изотропного тела в силу указанной выше формы критерия текучести и ассоциированного закона течения наиболее удобно геометрическое представление основных соотношений в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя – Вестергарда (Haigh, 1920; Westergaard, 1920).

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (Koiter, 1953). Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа p гладких поверхностей текучести $f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется условиями

$$\begin{aligned} f_\omega &= 0, & df_\omega &= 0, \\ f_\kappa &= 0, & df_\kappa &< 0 \text{ или } f_\kappa < 0, \end{aligned}$$

где индексы ω и κ различны, и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса $\gamma = 1, 2, \dots, p$, причем индекс ω пробегает непустое множество значений.

Полное приращение $d\varepsilon^P$ есть сумма соответствующих всем индексам ω приращений $d\varepsilon^{P(\omega)}$:

$$d\varepsilon^P = \sum_{\omega} d\varepsilon^{P(\omega)},$$

где каждое приращение $d\varepsilon^{P(\omega)}$ вычисляется согласно ассоциированному закону течения

$$d\varepsilon^{P(\omega)} = \frac{\partial f_\omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\omega,$$

а величины $d\lambda_\omega$ должны быть положительными.

Окончательно обобщенный ассоциированный закон течения принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} d\varepsilon^P &= \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial f_\gamma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\gamma, \\ d\lambda_\gamma &> 0 \quad (f_\gamma = 0, df_\gamma = 0), \\ d\lambda_\gamma &= 0 \quad (f_\gamma = 0, df_\gamma < 0 \text{ или } f_\gamma < 0). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Его следствием является соосность тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\varepsilon^P$ в изотропном теле.

Геометрически обобщенный ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям $f_\omega = 0$ в указанной точке векторов, причем направление указанного вектора в угловой точке поверхности нагружения обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируется, а остается неопределенным.

Рассмотрим уравнения обобщенного ассоциированного закона течения применительно к условию текучести Треска. Обозначая, как обычно, через τ_1, τ_2, τ_3 экстремальные (главные) касательные напряжения

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

имеем

$$d\varepsilon_{ij}^P = \text{sgn}(\tau_\gamma) \frac{\partial \tau_\gamma}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3), \tag{2.7}$$



где индекс γ пробегает значения 1, 2, 3, однако суммирование в правой части (2.7) распространяется лишь на те значения γ , для которых $\text{sgn}(\tau_\gamma)\tau_\gamma = k$, т.е. в правой части содержится не более двух слагаемых.

Частные производные в правой части (2.7) в главных осях тензора напряжений без труда вычисляются, если заметить, что (по i не суммировать)

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{il} \delta_{ij} \quad (i, j, l = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

В результате находим

$$-\frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_{33}} = \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_{22}} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_{33}} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\partial \tau_3}{\partial \sigma_{22}} = \frac{\partial \tau_3}{\partial \sigma_{11}} = \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

Остальные частные производные равны нулю.

Непосредственный подсчет с помощью (2.7), (2.9) показывает, что в главных осях напряжений матрица тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ диагональна

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \text{diag}(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3),$$

т.е. ориентации главных осей напряжений и главных осей приращений деформаций одинаковы.

Подсчет суммы главных приращений $d\varepsilon_j^P$ на основании (2.7), (2.9) позволяет заключить, что выполняется условие несжимаемости.

Обратимся к более детальному исследованию уравнений обобщенного ассоциированного закона течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона – Треска, а третье главное напряжение является максимальным: $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$. Ясно, что при этом имеет место равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$. В терминах главных касательных напряжений этот случай характеризуется выполнением условий $\tau_1 = -k$, $\tau_2 = k$, $\tau_3 = 0$.

Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска, т.е. в состоянии полной пластичности, имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворота в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}). Их преимущественное положение в упомянутой плоскости указывается ориентацией собственных векторов тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, который в силу ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и обладает, поскольку, вообще говоря, $d\varepsilon_1 \neq d\varepsilon_2$, уникальным триэдром главных направлений. Следовательно, ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона – Треска, устанавливает совпадение *только одной* из трех главных осей тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, накладывая тем самым *минимум* кинематических ограничений. Это обстоятельство мы будем характеризовать термином «1/3-соосность» тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$. Для течения на ребре призмы Кулона – Треска «1/3-соосность» тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ достаточна для их соосности в том смысле, что существует хотя бы одна тройка взаимно ортогональных направлений, которая будет главной как для тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, так и для тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Итак, при исследовании течения на ребре призмы Кулона – Треска никогда не следует забывать об указанном обстоятельстве: триэдр главных направлений тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ всегда будет и триэдром главных направлений тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, но не всякий триэдр главных направлений тензора напряжений будет триэдром главных направлений тензора приращений пластических деформаций.

Обозначая, как было оговорено выше, через $d\varepsilon_j^P$ собственные значения тензора приращений пластических деформаций, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения для ребра призмы Кулона – Треска $\tau_1 = -k$, $\tau_2 = k$, $\tau_3 = 0$ представим в *общих* главных осях напряжений и приращений пластических деформаций в виде

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1^P &= -d\lambda_2, \\ d\varepsilon_2^P &= -d\lambda_1, \\ d\varepsilon_3^P &= d\lambda_1 + d\lambda_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$



где $d\lambda_\beta$ — неопределенные множители теории идеальной пластичности. Следовательно, обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона – Треска, эквивалентен двум условиям: условию 1/3-соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и условию $d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P + d\varepsilon_3^P = 0$, характеризующему несжимаемость пластического деформирования.

Таким образом, уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, сформулированного для ребра призмы Треска, позволяют найти помимо условия соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ (да и то с точностью до поворота триэдра главных осей в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}) еще только одно существенное соотношение, следующее из (2.10), — условие несжимаемости:

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P + d\varepsilon_3^P = 0. \quad (2.11)$$

Его можно также представить в форме

$$d\varepsilon_{jj}^P = 0 \quad (2.12)$$

или в инвариантной прямой записи

$$\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = 0. \quad (2.13)$$

Последнее обстоятельство имеет принципиально важное значение: для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, пластическое течение имеет наибольшую свободу и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, привлекая схему полной пластичности Хаара – Кармана³. Ясно, что напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю⁴.

Условие соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ в силу (1.3) может быть сформулировано как

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l} \otimes l d\varepsilon_1^P + \mathbf{m} \otimes m d\varepsilon_2^P + \mathbf{n} \otimes n d\varepsilon_3^P. \quad (2.14)$$

Здесь векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} уже выступают как собственные векторы тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, и поэтому их ориентация в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , уникальна. Если тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ соответствует ребру призмы Кулона – Треска и задан, то ориентация вектора \mathbf{n} известна, а ориентации векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} не определены до тех пор, пока полностью не определены кинематические поля. Далее в кинематических уравнениях мы задействуем лишь вектор \mathbf{n} .

Соотношение (2.14) позволяет заключить, что $\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = n d\varepsilon_3^P$, или также $\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot \mathbf{n} = d\varepsilon_3^P$, и, кроме того (см. [6, с. 208]),

$$\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n} \text{tr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P). \quad (2.15)$$

Полученное уравнение устанавливает лишь только тот факт, что вектор \mathbf{n} — собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Проектируя векторное уравнение (2.15) на оси некоторой прямоугольной системы координат x_1, x_2, x_3 , можно получить три скалярных уравнения [7]

$$n_j d\varepsilon_{ij}^P = n_i n_k n_l d\varepsilon_{kl}^P. \quad (2.16)$$

Только два из них будут независимыми. Действительно, свернутые с n_i соотношения (2.16) удовлетворяются тождественно, что указывает на их линейную зависимость.

Два независимых уравнения из (2.16) вместе с уравнением несжимаемости (2.12) образуют систему из *трех* независимых уравнений

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{jj}^P &= 0, \\ n_j d\varepsilon_{ij}^P &= n_i n_k n_l d\varepsilon_{kl}^P, \end{aligned} \quad (2.17)$$

которые после подстановки в них вместо приращений пластических деформаций *трех* приращений перемещений согласно

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes d\mathbf{u}) + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T \quad (2.18)$$

³Эта гипотеза принадлежит Д.Д. Ивлеву.

⁴В следующем параграфе приводится анализ общих соотношений математической теории идеальной пластичности для течения на грани призмы Кулона – Треска. Граням призмы соответствуют чисто сдвиговые течения, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям $d\varepsilon_i^P = 0$, $d\varepsilon_j^P + d\varepsilon_l^P = 0$ ($i \neq j, j \neq l, l \neq i$).



или, переходя к прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 ,

$$2d\varepsilon_{ij}^P = \partial_i(du_j) + \partial_j(du_i),$$

позволяют полностью исследовать кинематику пластического течения, если поле напряжений уже определено⁵.

Система кинематических уравнений (2.17)

$$\begin{aligned} \text{tr}(d\varepsilon^P) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot d\varepsilon^P &= \mathbf{n} \text{tr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\varepsilon^P), \end{aligned} \quad (2.19)$$

описывающая идеально пластическое течение на ребре призмы Кулона – Треска, правильно определенная и гиперболическая⁶. Характеристические направления этой системы, как показывает несложный расчет, совпадают с характеристическими направлениями системы трехмерных статических уравнений.

Действительно, будем трактовать характеристические поверхности системы уравнений (2.19) как поверхности слабого разрыва приращений перемещений $d\mathbf{u}$ и воспользуемся геометрическими условиями совместности Адамара – Томаса (см., например [5]):

$$[\nabla \otimes d\mathbf{u}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a},$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва, \mathbf{N} – единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва, \mathbf{a} – некоторое ненулевое векторное поле, определенное на этой поверхности. На основании соотношений Коши

$$2[d\varepsilon^P] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{N},$$

следовательно,

$$\text{tr}([d\varepsilon^P]) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}.$$

Учитывая полученные формулы, из уравнений системы (2.19) находим следующие соотношения для вектора \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})\mathbf{a} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{N} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Проектируя последнее из полученных уравнений на ортогональные друг другу направления \mathbf{N} , \mathbf{a} , получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})(1 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})^2) &= 0, \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В зависимости от того, выполняется ли условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$, имеем: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0$ или $1 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})^2 = 0$ ⁷. Поэтому нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора \mathbf{n} . Конус нормалей к характеристическим площадкам для системы кинематических уравнений пространственной задачи математической теории пластичности (в случае течения на ребре призмы Треска) тот же самый, что и для системы уравнений равновесия⁸. На основании уравнения $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0$ можно заключить, что характеристическими поверхностями являются также и интегральные поверхности поля \mathbf{n} (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля \mathbf{n}). Все это указывает на гиперболичность системы уравнений (2.19), описывающей пространственное пластическое течение на ребре призмы Треска.

Если удастся получить решение системы кинематических уравнений (2.17) относительно приращений перемещений $d\mathbf{u}$, то затем можно найти тензор приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$, а вместе с ним и точную ориентацию собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} .

⁵В параграфе 5 будет дан анализ кинематических уравнений в случае пространственного течения на ребре призмы Кулона – Треска в триортогональной криволинейной сетке линий главных напряжений.

⁶Далее будет установлено, что кинематические соотношения пространственной задачи для грани призмы Кулона – Треска не являются правильно определенными: *три* компоненты вектора приращения перемещений du_j должны удовлетворять *пяти* независимым уравнениям.

⁷Любопытно отметить, что во втором случае (т.е. когда $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \neq 0$) с помощью второго уравнения системы (2.20) можно установить, что вектор \mathbf{a} , обладая произвольным модулем, должен составлять с вектором \mathbf{n} угол $\pm\pi/4$.

⁸Этот результат был получен в работе [2].



3. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ГРАНИ ПРИЗМЫ КУЛОНА–ТРЕСКА

Рассмотрим также основные уравнения теории идеальной пластичности для грани призмы Треска. Напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку ассоциированный закон течения в этом случае устанавливает весьма сильные кинематические ограничения на процесс пластического течения: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю, и триэдр главных осей тензора приращений пластических деформаций жестко предписан тензором напряжений. Граням призмы соответствуют чисто сдвиговые течения, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям

$$d\varepsilon_i^P = 0, \quad d\varepsilon_j^P + d\varepsilon_l^P = 0 \quad (i \neq j, j \neq l, l \neq i).$$

Совершенно иная ситуация наблюдается в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска: ни одно из главных приращений пластических деформаций здесь принципиально определить нельзя⁹ а триэдр главных осей тензора приращений пластических деформаций не предписывается жестко триэдром главных напряжений (они могут отличаться друг от друга поворотами в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}).

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ (в этом случае σ_1 — максимальное, σ_2 — минимальное, σ_3 — промежуточное главное напряжение), тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} - (\sigma_2 - \sigma_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 2k \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}. \quad (3.1)$$

Поэтому уравнения равновесия получаются в виде (ср. (1.7))

$$\text{grad} \Sigma_2 + \text{div}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)] \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

где введены безразмерные главные напряжения $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$, $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$, или

$$\nabla \Sigma_2 + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

К этому уравнению следует присоединить условия нормировки и ортогональности

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Проектируя векторное уравнение (3.3) на главные оси тензора напряжений, определяемые ориентациями \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , находим направление \mathbf{n} :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \Sigma_3 + \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad (3.4)$$

направление \mathbf{l} :

$$(\mathbf{l} \cdot \nabla) \Sigma_2 + (\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0; \quad (3.5)$$

направление \mathbf{m} :

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \Sigma_2 + \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0. \quad (3.6)$$

Если оказывается возможным введение триортогональной координатной системы с координатными линиями, являющимися линиями главных напряжений, то полученные только что соотношения можно рассматривать как соотношения вдоль взаимно ортогональных изостат [3]. Тогда можно ввести кривизны κ_{ij} (κ_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно направлению j на локальную координатную плоскость, ортогональную этому направлению), и, учитывая, что

$$\nabla \cdot \mathbf{l} = \kappa_{32} + \kappa_{23}, \quad \nabla \cdot \mathbf{m} = \kappa_{13} + \kappa_{31}, \quad \nabla \cdot \mathbf{n} = \kappa_{12} + \kappa_{21},$$

⁹Главные приращения пластических деформаций связаны единственным уравнением (уравнением несжимаемости),

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P + d\varepsilon_3^P = 0.$$



а также

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m}] &= -\kappa_{23}, & \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}] &= -\kappa_{32}, \\ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l}] &= -\kappa_{13}, & \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}] &= -\kappa_{31}, \\ \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l}] &= -\kappa_{12}, & \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m}] &= -\kappa_{21}, \end{aligned}$$

привести уравнения равновесия для грани призмы Треска (3.4)–(3.6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \nabla)\Sigma_3 - \kappa_{12} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= 0, \\ (\mathbf{l} \cdot \nabla)\Sigma_2 + (\kappa_{32} + \kappa_{23}) - \kappa_{32}(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= 0, \\ (\mathbf{m} \cdot \nabla)\Sigma_2 - \kappa_{13} - \kappa_{31}(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь дифференциальные операторы слева суть производные по направлениям линий главных напряжений:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial S_3} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3}, \\ \mathbf{l} \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial S_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \\ \mathbf{m} \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial S_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Ассоциированный закон течения, сформулированный для грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Видно, что характер пластического течения, если реализуется напряженное состояние на грани призмы Треска, оказывается чисто сдвиговым. Сдвиг происходит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} . Направления максимальной скорости сдвига расположены в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , и делят пополам прямые углы, образованные направленными вдоль векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} пересекающимися прямыми.

Нетрудно видеть, что множитель $d\lambda$ вычисляется через главные приращения пластических деформаций в виде

$$d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2}.$$

Условие соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ для течения на грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ принимает форму

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m})d\varepsilon_1^P$$

или также

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = -\mathbf{l}d\varepsilon_1^P + 2\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}d\varepsilon_1^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}d\varepsilon_1^P,$$

где, в отличие от течения на ребре призмы Треска, векторы \mathbf{l} и \mathbf{n} жестко предписаны тензором напряжений и заданы, если задан тензор напряжений.

Таким образом, система кинематических уравнений для рассматриваемой грани может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \text{tr}((\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P), \\ \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{0}, \\ \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$



Здесь содержится пять независимых скалярных уравнений, так как первое векторное уравнение дает только два независимых скалярных (скалярное умножение на вектор \mathbf{l} приводит к тождеству), второе векторное уравнение — три независимых скалярных, но одно из них (которое получается скалярным умножением на вектор \mathbf{l}) следует из первого векторного уравнения (точнее, из уравнения, которое получается скалярным умножением первого векторного уравнения на вектор \mathbf{n}), а третье — одно скалярное уравнение.

Первое из уравнений (3.8) выражает просто тот факт, что вектор \mathbf{l} есть собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, второе устанавливает, что вектор \mathbf{n} — собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ с нулевым собственным значением, третье — пластическую несжимаемость.

Проектируя уравнения (3.8) на оси некоторой прямоугольной системы координат, находим

$$\begin{aligned} l_j d\varepsilon_{ij}^P &= l_i l_k l_s d\varepsilon_{ks}^P, \\ n_j d\varepsilon_{ij}^P &= 0, \\ d\varepsilon_{jj}^P &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Три компоненты приращения вектора перемещений du_j , вводимые в (3.9) согласно

$$2d\varepsilon_{ij}^P = \partial_i(du_j) + \partial_j(du_i),$$

должны, таким образом, удовлетворять *пяти* независимым уравнениям. Следовательно, полученная система кинематических уравнений при течении на грани призмы Треска не является правильно определенной¹⁰.

Тем не менее течение на грани призмы Треска реализуется в ряде важных случаев: в случае плоского деформированного состояния и в случае скольжений вдоль поверхностей максимальной скорости сдвига (кинематика таких течений будет исследована в заключительном параграфе статьи).

Итак, замкнутая система соотношений для состояний, соответствующих грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \Sigma_2 + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{l} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{l} \operatorname{tr}((\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P), \\ \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) &= 0; \\ 2d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T; \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. СООТНОШЕНИЯ КОШИ В ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ ИЗОСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Соотношения Коши, связывающие приращение вектора перемещений с приращением тензора полных деформаций, являются фундаментальными уравнениями механики деформируемого твердого тела. С их помощью наиболее просто могут быть выведены все кинематические уравнения теории идеальной пластичности.

Соотношения Коши, записанные для приращений перемещений, имеют форму прямого тензорного уравнения:

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes d\mathbf{u}) + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (4.1)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам локального ортонормированного базиса в пространстве $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3 \rangle}. \quad (4.2)$$

¹⁰Состояния на грани призмы Треска, вообще говоря, статически неопределимы. Для состояний на грани необходимо совместное рассмотрение уравнений (3.3), (3.8), дополненных условиями нормировки и ортогональности собственных векторов тензора напряжений

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

и соотношениями Коши

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T.$$

Только тогда получается правильно определенная система соотношений.



Здесь величины $du_{\langle j \rangle}$ не являются действительными приращениями, а служат для обозначения физических компонент вектора du в триортогональной изостатической координатной сетке. Тем не менее о величинах $du_{\langle j \rangle}$ мы будем говорить как о приращениях перемещений, помня, однако, что они таковыми в действительности не являются.

Нетрудно видеть, что трехмерный оператор Гамильтона в триортогональной изостатической системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 есть (h_j — параметры Ламе рассматриваемой координатной системы)

$$\nabla = \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3}. \quad (4.3)$$

Градиент приращения вектора перемещения $\nabla \otimes du$ вычисляется в виде

$$\begin{aligned} \nabla \otimes du &= \mathbf{l} \otimes \nabla du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \nabla du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \nabla du_{\langle 3 \rangle} + \\ &+ (du_{\langle 1 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{l} + (du_{\langle 2 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{m} + (du_{\langle 3 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^3}, \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^3}, \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (4.5)$$

или ($d_1 = \mathbf{l} \cdot \nabla$, $d_2 = \mathbf{m} \cdot \nabla$, $d_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla$)

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 1 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 2 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 3 \rangle}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_2 h_1) \mathbf{m} - (d_3 h_1) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{m} = (d_1 h_2) \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{n} = (d_1 h_3) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{l} = (d_2 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_1 h_2) \mathbf{l} - (d_3 h_2) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{n} = (d_2 h_3) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{l} = (d_3 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{m} = (d_3 h_2) \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^3} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{m} = -(d_1 h_3) \mathbf{l} - (d_2 h_3) \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (4.9)$$



приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}\nabla \otimes \mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1}(d_2h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_1}(d_3h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_2}(d_1h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{h_3}(d_1h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \nabla \otimes \mathbf{m} &= \frac{1}{h_1}(d_2h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2}(d_3h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \nabla \otimes \mathbf{n} &= \frac{1}{h_1}(d_3h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Используя (4.6) и (4.10), соотношение (4.4) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right].\end{aligned}\tag{4.11}$$

Транспонировав уравнение (4.11), получаем

$$\begin{aligned}\nabla \otimes d\mathbf{u})^T &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right].\end{aligned}\tag{4.12}$$

Подставляя выражения (4.11) и (4.12) в соотношения Коши (4.1), получим

$$\begin{aligned}d\varepsilon &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\ &+ \frac{1}{2}\mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] +\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right].
\end{aligned}$$

Тензор $d\varepsilon$, как явствует из только что полученной формулы, симметричен, что и так ясно а priori. Указанную формулу можно несколько преобразовать, вводя нормальные кривизны κ_{ij} триортогональной системы поверхностей $\xi^s = \text{const}$ (κ_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению¹¹ в соответствии с приводимыми ниже равенствами:

$$\begin{aligned}
d_1 h_3 &= h_3 \kappa_{32}, & d_2 h_3 &= h_3 \kappa_{31}, & d_3 h_2 &= h_2 \kappa_{21}, \\
d_1 h_2 &= h_2 \kappa_{23}, & d_2 h_1 &= h_1 \kappa_{13}, & d_3 h_1 &= h_1 \kappa_{12}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В результате получим следующие выражения для физических компонент тензора $d\varepsilon$ в триортогональных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 :

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} &= \kappa_{13} du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} &= \kappa_{23} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{21} du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} &= \kappa_{32} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} &= -\kappa_{13} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} &= -\kappa_{12} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} &= -\kappa_{21} du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь ни $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$, ни $du_{\langle j \rangle}$ действительными приращениями не являются; $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$ — физические компоненты тензора $d\varepsilon$ в изостатической системе координат:

$$\begin{aligned}
d\varepsilon &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_{\langle 21 \rangle} + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_{\langle 31 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_{\langle 32 \rangle}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Уравнения (4.14) можно преобразовать, используя величины γ_{ij} (γ_{ij} — геодезическая кривизна изостатической траектории с номером i на поверхности, ортогональной главному направлению с номером j), лишь знаком отличающиеся от κ_{ij} ¹². В итоге получаем

¹¹Напомним, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{23}, & \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{32}, \\
\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{13}, & \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{31}, \\
\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{12}, & \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{21}.
\end{aligned}$$

¹²Если имеется некоторая кривая на поверхности, параметризованная натуральным параметром s , \mathbf{t} — единичный вектор, направленный по касательной к кривой в сторону возрастающих значений параметра s , \mathbf{t}^* — единичный вектор, расположенный в касательной плоскости ортогонально вектору \mathbf{t} , \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности так, чтобы векторы $\mathbf{t}, \mathbf{t}^*, \mathbf{n}$ образовывали правую тройку, то мы определяем

$$\kappa_n = -\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{n}, \quad \kappa_g = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{t}^*$$

соответственно как нормальную кривизну (кривизна проекции рассматриваемой кривой на плоскость, определяемую векторами \mathbf{t}, \mathbf{n}) и геодезическую кривизну (кривизна проекции рассматриваемой кривой на касательную плоскость, определяемую векто-



$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} &= -\gamma_{13} du_{\langle 2 \rangle} - \gamma_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} &= -\gamma_{23} du_{\langle 1 \rangle} - \gamma_{21} du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} &= -\gamma_{32} du_{\langle 1 \rangle} - \gamma_{31} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} &= \gamma_{13} du_{\langle 1 \rangle} + \gamma_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} &= \gamma_{12} du_{\langle 1 \rangle} + \gamma_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} &= \gamma_{21} du_{\langle 2 \rangle} + \gamma_{31} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРИОРТОГОНАЛЬНЫХ ИЗОСТАТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В приближении жесткопластического анализа имеем $d\varepsilon = d\varepsilon^P$. Ассоциированный закон течения, как известно, устанавливает соосность тензора напряжений σ и тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$. При использовании критерия текучести Треска следует различать течение на грани (в этом случае уникальный триэдр $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ будет однозначно указывать также и главные оси тензора $d\varepsilon^P$) и течение на ребре, когда равны два главных напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$. В случае течения на ребре равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. При соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска сохраняется неопределенность в ориентации собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}) и они уже, вообще говоря, могут и не быть собственными векторами тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$.

Рассмотрим по отдельности каждый из двух указанных случаев.

1. Течение на грани призмы Кулона – Треска. Триэдр $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ есть также и триэдр главных направлений тензора $d\varepsilon$. Полученная в предыдущем параграфе формула для $d\varepsilon$ приводит к шести соотношениям:

$$d\varepsilon_1^P = \frac{1}{h_1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \tag{5.1}$$

$$d\varepsilon_2^P = \frac{1}{h_2}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \tag{5.2}$$

$$d\varepsilon_3^P = \frac{1}{h_3}(d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \tag{5.3}$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0, \tag{5.4}$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} = 0, \tag{5.5}$$

$$-\frac{1}{h_2}(d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} = 0. \tag{5.6}$$

Вводя кривизны в соотношения (5.1)–(5.6) согласно (4.13), получим (см. также (4.14))

$$d\varepsilon_1^P = \kappa_{13} du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \tag{5.7}$$

$$d\varepsilon_2^P = \kappa_{23} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{21} du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \tag{5.8}$$

$$d\varepsilon_3^P = \kappa_{32} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \tag{5.9}$$

$$-\kappa_{13} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0, \tag{5.10}$$

$$-\kappa_{12} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} = 0, \tag{5.11}$$

$$-\kappa_{21} du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} = 0. \tag{5.12}$$

рами \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) кривой на поверхности. В данном выше определении следует особо обратить внимание на знаки. Именно поэтому в применяемой нами терминологии γ_{ij} – геодезическая кривизна изостатической траектории с номером i на поверхности, ортогональной главному направлению с номером j .



Эти соотношения компактно представляются в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \\ d\varepsilon_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_{13} & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & d_2 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & \kappa_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{13} + d_2 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & -\kappa_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.14)$$

Второе из матричных соотношений выражает соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

Как отмечалось выше (см. параграф ??), в случае пространственного течения на грани призмы Кулона – Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ ассоциированный закон течения устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\varepsilon^P$ и σ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций:

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда сразу же следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Следовательно, для анализа кинематики пространственного течения на грани призмы Кулона – Треска достаточно воспользоваться полученными только что матричными уравнениями (5.13), (5.14), положив в них $d\varepsilon_3^P = 0$ и $d\varepsilon_1^P = -d\varepsilon_2^P$. В результате находим следующие уравнения, выражающие в изостатической координатной системе кинематическое ограничение $d\varepsilon_3^P = 0$, условие несжимаемости и условие соосности:

$$\kappa_{32}du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31}du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} = 0; \quad (5.15)$$

$$d_1du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{23}du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{13}du_{\langle 2 \rangle} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})du_{\langle 3 \rangle} = 0; \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} d_2du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{13}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23}du_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ d_3du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{12}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32}du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ d_3du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{21}du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31}du_{\langle 3 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Нетрудно видеть, что если напряженное состояние соответствует грани призмы Кулона – Треска и уже определено, то изостатическую координатную сетку (если таковая существует) можно считать известной. Но в таком случае *три* неизвестных величины $du_{\langle j \rangle}$ должны удовлетворять *пяти* уравнениям (5.15), (5.16), (5.17)¹³. Ниже мы увидим, что подобной проблемы не возникает, например, в случае плоского деформированного состояния, поскольку тогда соотношение (5.15) и два из трех соотношений (5.17) удовлетворяются тождественно.

2. Течение на ребре призмы Кулона – Треска. Триэдр **l**, **m**, **n**, вообще говоря, не будет триэдром главных направлений тензора $d\varepsilon$. Из ассоциированного закона течения можно вывести условие несжимаемости и лишь тот факт, что **n** есть собственный вектор тензора $d\varepsilon$, т.е. соотношения

$$d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d\varepsilon_3 = 0; \quad d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} = 0.$$

Полученная выше формула для $d\varepsilon$ позволяет представить приведенные выше соотношения в следующем виде:

$$d_1du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} + (\kappa_{23} + \kappa_{32})du_{\langle 1 \rangle} + (\kappa_{13} + \kappa_{31})du_{\langle 2 \rangle} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})du_{\langle 3 \rangle} = 0; \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} d_3du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{12}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32}du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ d_3du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{21}du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31}du_{\langle 3 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

¹³Т.е. на приращения перемещений $du_{\langle j \rangle}$ в триортогональной изостатической координатной сетке в случае пространственного пластического течения на грани призмы Кулона – Треска имеется слишком много ограничивающих соотношений. Поэтому, если в действительности реализуется течение на грани, то некоторые из приведенных соотношений (5.15), (5.16), (5.17) должны удовлетворяться тождественно, либо следовать из остальных соотношений.



Таким образом, в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска *три* неизвестных величины $du_{<j>}$ должны удовлетворять *трем* уравнениям (5.18), (5.19), т.е. задача расчета приращений перемещений по известному напряженному состоянию является правильно определенной.

Заметим, что уравнение несжимаемости (5.18) приобретает форму

$$\begin{pmatrix} d_1 + H_{(1)} \\ d_2 + H_{(2)} \\ d_3 + H_{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix} = 0, \quad (5.20)$$

если ввести средние кривизны $H_{(j)}$ координатных поверхностей $\xi^j = \text{const}$, учитывая, что

$$\begin{aligned} 2H_{(1)} &= \kappa_{32} + \kappa_{23}, \\ 2H_{(2)} &= \kappa_{13} + \kappa_{31}, \\ 2H_{(3)} &= \kappa_{12} + \kappa_{21}. \end{aligned}$$

Докажем, что система, состоящая из уравнений (5.18), (5.19), гиперболична и определим ее характеристические направления. Обозначим через $N_{<j>}$ физические компоненты вектора \mathbf{N} единичной нормали к характеристическому элементу относительно пространственного базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} N_{<1>} & N_{<2>} & N_{<3>} \\ N_{<3>} & 0 & N_{<1>} \\ 0 & N_{<3>} & N_{<2>} \end{vmatrix} = 0$$

или с учетом $N_{<1>}^2 + N_{<2>}^2 + N_{<3>}^2 = 1$

$$N_{<3>} (2N_{<3>}^2 - 1) = 0$$

имеет три различных действительных корня

$$N_{<3>} = 0, \quad N_{<3>} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

что указывает на гиперболичность системы уравнений (5.18), (5.19). Конус нормалей к характеристическим поверхностным элементам для системы кинематических уравнений пространственной задачи математической теории пластичности (в случае течения на ребре призмы Треска) тот же самый, что и для системы уравнений равновесия.

6. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ПРИРАЩЕНИЙ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СЕТКЕ ИЗОСТАТ

Уравнения совместности деформаций наряду с соотношениями Коши, связывающими приращение вектора перемещений с приращением тензора полных деформаций, являются фундаментальными уравнениями механики деформируемого твердого тела. Их также можно применять для анализа кинематики идеально пластического течения. Сформулируем, следуя [3], уравнения совместности приращений малых деформаций в триортогональной криволинейной сетке линий главных напряжений ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

Уравнение совместности малых деформаций в приращениях, как известно, имеет вид

$$-d\mathbf{S} = \nabla \times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

где тензор второго ранга $d\mathbf{P}$ есть транспонированный вихрь тензора приращений полных деформаций

$$d\mathbf{P} = (\nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon})^T. \quad (6.2)$$

Тензор несовместности $d\mathbf{S}$ симметричен:

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{S})^T. \quad (6.3)$$



Тензор $d\mathbf{P}$ антисимметричен, поскольку:

$$(\nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon})^T = -(d\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla). \quad (6.4)$$

Физические компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ относительно триортогональной криволинейной сетки линий главных напряжений ξ^1, ξ^2, ξ^3 вычисляются в форме [8]:

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{h_2} \left[\frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 32 \rangle})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} + \frac{d\varepsilon_{\langle 23 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 22 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \right\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{1}{h_3} \left[\frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 22 \rangle})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 23 \rangle})}{\partial \xi^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{d\varepsilon_{\langle 32 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} - \frac{d\varepsilon_{\langle 33 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \right\} + \\ & + \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 21 \rangle})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 22 \rangle})}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \right] - \\ & - \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 31 \rangle})}{\partial \xi^3} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \right], \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} dS_{\langle 12 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 31 \rangle})}{\partial \xi^3} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{d\varepsilon_{\langle 21 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} - \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \right\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 23 \rangle})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 21 \rangle})}{\partial \xi^3} \right] + \frac{d\varepsilon_{\langle 31 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \right\} + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 23 \rangle})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} + \frac{d\varepsilon_{\langle 23 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 22 \rangle}}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \left[\frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 21 \rangle})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 22 \rangle})}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \left[\frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 31 \rangle})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 32 \rangle})}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} - \frac{d\varepsilon_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $h_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ (по α не суммировать) – параметры Ламе; $dS_{\langle ij \rangle}$ – физические компоненты тензора $d\mathbf{S}$ в изостатической системе координат,

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} dS_{\langle 11 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} dS_{\langle 12 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} dS_{\langle 13 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} dS_{\langle 22 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} dS_{\langle 21 \rangle} + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} dS_{\langle 23 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} dS_{\langle 31 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} dS_{\langle 32 \rangle}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}, dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.5). Компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}, dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.6). Здесь представляется уместным еще раз упомянуть о том, что ни $dS_{\langle ij \rangle}$, ни $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$ не являются действительными приращениями величин, находящихся под знаком дифференциала.

Заметим также, что формулы (6.5), (6.6) справедливы для любой триортогональной координатной системы, хотя в дальнейшем нас будет интересовать лишь изостатическая координатная сетка.

В декартовой системе координат компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ вычисляются по следующим формулам:

$$dS_{lp} = e_{nr} e_{mkp} \partial_n \partial_k d\varepsilon_{rm},$$



где e_{nrl} — кососимметричные символы, или

$$\begin{aligned} -dS_{33} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ -dS_{11} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ -dS_{22} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ -dS_{23} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ -dS_{31} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ -dS_{12} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

Это известные формулы Сен-Венана, широко применяемые в механике деформируемого твердого тела. Их часто называют условиями сплошности. Сами уравнения были опубликованы в 1864 г. Сен-Венаном в издании одной книги Навье.

Компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ в декартовой системе координат могут быть найдены также в виде

$$-dS_{il} = (\partial_j \partial_j d\varepsilon_{kk} - \partial_j \partial_k d\varepsilon_{jk}) \delta_{il} + \partial_i \partial_k d\varepsilon_{lk} + \partial_l \partial_k d\varepsilon_{ki} - \partial_j \partial_j d\varepsilon_{li} - \partial_i \partial_l d\varepsilon_{kk}.$$

Сделаем ряд существенных замечаний, касающихся числа независимых уравнений совместности малых деформаций¹⁴. Обычно считается, что независимых уравнений совместности должно быть шесть (так как тензор $-d\mathbf{S} = \nabla \times d\mathbf{P}$ симметричен). И это неверное утверждение воспроизводится во всех руководствах по механике деформируемого твердого тела. На самом деле ситуация несколько сложнее. Действительно, тензор $d\mathbf{S}$ удовлетворяет, как это следует из его определения, уравнению¹⁵

$$\nabla \cdot (d\mathbf{S}) = \mathbf{0}. \quad (6.8)$$

Следовательно, независимых условий должно быть всего три. Используя приведенные выше выражения для компонент тензора $d\mathbf{S}$ в декартовой системе координат, прямым подсчетом можно показать, что векторное уравнение (6.8) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{aligned} \partial_1(dS_{11}) + \partial_2(dS_{12}) + \partial_3(dS_{31}) &= 0, \\ \partial_1(dS_{12}) + \partial_2(dS_{22}) + \partial_3(dS_{23}) &= 0, \\ \partial_1(dS_{31}) + \partial_2(dS_{23}) + \partial_3(dS_{33}) &= 0. \end{aligned}$$

На первый взгляд может показаться, что три независимых условия в декартовой системе координат могут составить либо три уравнения $dS_{11} = 0$, $dS_{22} = 0$, $dS_{33} = 0$, либо три уравнения $dS_{23} = 0$, $dS_{31} = 0$, $dS_{12} = 0$. Однако ни три условия первой группы, ни три условия второй группы по отдельности использовать нельзя [9]. Известно [10], что если три условия первой группы удовлетворяются внутри некоторой односвязной области, а вторая тройка условий — на границе этой области, то все три условия второй группы будут удовлетворяться внутри области. Аналогичное утверждение будет справедливо, если поменять группы условий местами.

Опираясь на формулы (6.5), (6.6), запишем уравнение совместности для приращений пластических деформаций в изостатической сетке. Мы будем (как принято всюду в настоящей работе) пренебрегать упругими деформациями: $d\varepsilon = d\varepsilon^P$.

¹⁴Хотя условия совместности деформаций были известны уже Сен-Венану, в настоящее время нет полной ясности в вопросе о числе независимых условий совместности.

¹⁵Приводимое ниже уравнение в тензорном анализе традиционно называется тождеством Бианки (L. Bianchi) (см.: Схуттен А.Я. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. С. 146, 147).



Поскольку в силу ассоциированного закона течения тензоры σ и $d\varepsilon^P$ соосны, то в сетке изостат матрица тензора $d\varepsilon^P$ диагональна

$$\left\| \begin{array}{ccc} d\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{array} \right\|,$$

т.е.

$$d\varepsilon = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}d\varepsilon_3,$$

и в физических компонентах имеем

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & -d_2d_2d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_2 + (\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3(\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)) - \\ & - d_2(\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)) - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ & - \kappa_{31}d_2d\varepsilon_3 - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_3, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} dS_{\langle 12 \rangle} = & d_2d_1d\varepsilon_3 + d_2[\kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)] + \kappa_{31}d_1(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \\ & \kappa_{23}d_2d\varepsilon_3 + \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)(\kappa_{32} - \kappa_{23}), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где, как и ранее, компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.9), а компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.10).

Для ясного понимания условий применимости полученных выше выражений для физических компонент тензора несовместности еще раз повторим следующее. Ассоциированный закон течения устанавливает соосность тензора напряжений σ и тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$. При использовании критерия текучести Треска следует различать течение на грани (в этом случае уникальный триэдр \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} будет однозначно указывать также и главные оси тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$) и течение на ребре, когда равны два главных напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$. В случае течения на ребре равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. Поэтому при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска есть известная доля произвола при выборе собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}). Следовательно, векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} уже могут и не быть собственными векторами тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$. Следовательно, возможно существование триортогональной сетки линий главных напряжений с локальным триэдром \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , таким, что векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} не являются собственными для тензора $d\varepsilon^P$, но тогда формулы (6.9), (6.10) подлежат модификации с целью учета недиагональности матрицы тензора $d\varepsilon = d\varepsilon^P$ в базисе \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} :

$$\left\| \begin{array}{ccc} d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} & d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} & 0 \\ d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} & d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{array} \right\|.$$

Подобного рода модификация без труда осуществляется с помощью полученных выше формул для физических компонент тензора несовместности (6.5), (6.6)¹⁶.

Сначала несколько упростим запись формул для физических компонент тензора несовместности (см. (6.5), (6.6))

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & 2\kappa_{23}\kappa_{32}d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\ & + [\kappa_{31}^2 - \kappa_{21}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_2\kappa_{31}) - (d_3\kappa_{21}) + \kappa_{31}d_2 - \kappa_{32}d_1 - 2\kappa_{21}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\ & + [\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_3\kappa_{21}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 - \kappa_{23}d_1 - 2\kappa_{31}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\ & + [\kappa_{31}\kappa_{32} + \kappa_{23}\kappa_{31} + 2\kappa_{32}\kappa_{13} + (d_2\kappa_{32}) + 2\kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\ & + [\kappa_{21}\kappa_{23} + \kappa_{32}\kappa_{21} + 2\kappa_{23}\kappa_{12} + (d_3\kappa_{23}) + 2\kappa_{23}d_3]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\ & + [4\kappa_{31}\kappa_{21} + \kappa_{21}\kappa_{23} + 2(d_2\kappa_{21}) + (d_2\kappa_{31}) + (d_3\kappa_{31}) + \\ & + 3\kappa_{21}d_2 + 2\kappa_{31}d_3 + \kappa_{31}d_2 + d_2d_3 + d_3d_2]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle}, \end{aligned}$$

¹⁶Она не требуется в плоском и осесимметричном случаях.



$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 22 \rangle} = & 2\kappa_{31}\kappa_{13}d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}^2 - \kappa_{32}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_3\kappa_{12}) - (d_1\kappa_{32}) + \kappa_{12}d_3 - \kappa_{13}d_2 - 2\kappa_{32}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_1\kappa_{32}) - (d_3\kappa_{12}) + \kappa_{32}d_1 - \kappa_{31}d_2 - 2\kappa_{12}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}\kappa_{13} + \kappa_{31}\kappa_{12} + 2\kappa_{13}\kappa_{21} + (d_3\kappa_{13}) + 2\kappa_{13}d_3]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}\kappa_{31} + \kappa_{13}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{23} + (d_1\kappa_{31}) + 2\kappa_{31}d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\
 & + [4\kappa_{12}\kappa_{32} + \kappa_{32}\kappa_{31} + 2(d_3\kappa_{32}) + (d_3\kappa_{12}) + (d_1\kappa_{12}) + \\
 & + 3\kappa_{32}d_3 + 2\kappa_{12}d_1 + \kappa_{12}d_3 + d_3d_1 + d_1d_3]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 33 \rangle} = & 2\kappa_{12}\kappa_{21}d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}^2 - \kappa_{13}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_1\kappa_{23}) - (d_2\kappa_{13}) + \kappa_{23}d_1 - \kappa_{21}d_3 - 2\kappa_{13}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_2\kappa_{13}) - (d_1\kappa_{23}) + \kappa_{13}d_3 - \kappa_{12}d_3 - 2\kappa_{23}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}\kappa_{21} + \kappa_{12}\kappa_{23} + 2\kappa_{21}\kappa_{32} + (d_1\kappa_{21}) + 2\kappa_{21}d_1]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}\kappa_{12} + \kappa_{21}\kappa_{13} + 2\kappa_{12}\kappa_{31} + (d_2\kappa_{12}) + 2\kappa_{12}d_2]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [4\kappa_{23}\kappa_{13} + \kappa_{13}\kappa_{12} + 2(d_1\kappa_{13}) + (d_1\kappa_{23}) + (d_2\kappa_{23}) + \\
 & + 3\kappa_{13}d_1 + 2\kappa_{23}d_2 + \kappa_{23}d_1 + d_1d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 12 \rangle} = & -\kappa_{31}d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + [\kappa_{31}(\kappa_{23} - \kappa_{32}) - (d_2\kappa_{32}) - \kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}(\kappa_{32} - \kappa_{23}) + (d_2\kappa_{32}) + \kappa_{31}d_1 + (\kappa_{32} - \kappa_{23})d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{13} + 2\kappa_{21}\kappa_{12} - \kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 + (d_3\kappa_{12}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 + \\
 & + \kappa_{12}d_3 + d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{21}(\kappa_{31} + \kappa_{13}) - 2\kappa_{31}\kappa_{12} + \kappa_{21}d_2 - \kappa_{31}d_3 - 2(d_2\kappa_{12}) - 2\kappa_{12}d_2 - d_2d_3]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{21}(\kappa_{23} + \kappa_{32}) - (d_3\kappa_{32}) + (\kappa_{23} - \kappa_{32})d_3 - 2\kappa_{21}d_1 - d_3d_1]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 13 \rangle} = & -\kappa_{23}d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + [\kappa_{23}(\kappa_{12} - \kappa_{21}) - (d_1\kappa_{21}) - \kappa_{21}d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) + (d_1\kappa_{21}) + \kappa_{23}d_3 + (\kappa_{21} - \kappa_{12})d_1 + d_1d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}\kappa_{21} + 2\kappa_{23}\kappa_{32} + 2\kappa_{13}\kappa_{31} - \kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2 + (d_2\kappa_{31}) - (d_1\kappa_{23}) + \kappa_{13}d_2 + \\
 & + \kappa_{31}d_2 + d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}(\kappa_{23} + \kappa_{32}) - 2\kappa_{23}\kappa_{31} + \kappa_{13}d_1 - \kappa_{23}d_2 - 2(d_1\kappa_{31}) - 2\kappa_{31}d_1 - d_1d_2]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - (d_3\kappa_{21}) + (\kappa_{12} - \kappa_{21})d_2 - 2\kappa_{13}d_3 - d_2d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 23 \rangle} = & -\kappa_{12}d_2d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + [\kappa_{12}(\kappa_{31} - \kappa_{13}) - (d_3\kappa_{13}) - \kappa_{13}d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}(\kappa_{13} - \kappa_{31}) + (d_3\kappa_{13}) + \kappa_{12}d_2 + (\kappa_{13} - \kappa_{31})d_3 + d_3d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}\kappa_{13} + 2\kappa_{12}\kappa_{21} + 2\kappa_{32}\kappa_{23} - \kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 + (d_1\kappa_{23}) - (d_3\kappa_{12}) + \kappa_{32}d_1 + \\
 & + \kappa_{23}d_1 + d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - 2\kappa_{12}\kappa_{23} + \kappa_{31}d_3 - \kappa_{12}d_1 - 2(d_3\kappa_{23}) - 2\kappa_{23}d_3 - d_3d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}(\kappa_{31} + \kappa_{13}) - (d_1\kappa_{13}) + (\kappa_{31} - \kappa_{13})d_1 - 2\kappa_{32}d_2 - d_1d_2]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}.
 \end{aligned}$$

Затем положим в них $d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} = 0$, $d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} = 0$. В результате приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 11 \rangle} = & 2\kappa_{23}\kappa_{32}d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}^2 - \kappa_{21}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_2\kappa_{31}) - (d_3\kappa_{21}) + \kappa_{31}d_2 - \kappa_{32}d_1 - 2\kappa_{21}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_3\kappa_{21}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 - \kappa_{23}d_1 - 2\kappa_{31}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}\kappa_{32} + \kappa_{23}\kappa_{31} + 2\kappa_{32}\kappa_{13} + (d_2\kappa_{32}) + 2\kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 22 \rangle} = & 2\kappa_{31}\kappa_{13}d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}^2 - \kappa_{32}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_3\kappa_{12}) - (d_1\kappa_{32}) + \kappa_{12}d_3 - \kappa_{13}d_2 - 2\kappa_{32}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_1\kappa_{32}) - (d_3\kappa_{12}) + \kappa_{32}d_1 - \kappa_{31}d_2 - 2\kappa_{12}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}\kappa_{31} + \kappa_{13}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{23} + (d_1\kappa_{31}) + 2\kappa_{31}d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 33 \rangle} = & 2\kappa_{12}\kappa_{21}d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}^2 - \kappa_{13}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_1\kappa_{23}) - (d_2\kappa_{13}) + \kappa_{23}d_1 - \kappa_{21}d_3 - 2\kappa_{13}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_2\kappa_{13}) - (d_1\kappa_{23}) + \kappa_{13}d_3 - \kappa_{12}d_3 - 2\kappa_{23}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [4\kappa_{23}\kappa_{13} + \kappa_{13}\kappa_{12} + 2(d_1\kappa_{13}) + (d_1\kappa_{23}) + (d_2\kappa_{23}) + \\
 & + 3\kappa_{13}d_1 + 2\kappa_{23}d_2 + \kappa_{23}d_1 + d_1d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
dS_{\langle 12 \rangle} = & -\kappa_{31}d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + [\kappa_{31}(\kappa_{23} - \kappa_{32}) - (d_2\kappa_{32}) - \kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
& + [\kappa_{31}(\kappa_{32} - \kappa_{23}) + (d_2\kappa_{32}) + \kappa_{31}d_1 + (\kappa_{32} - \kappa_{23})d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
& + [\kappa_{23}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{13} + 2\kappa_{21}\kappa_{12} - \kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 + (d_3\kappa_{12}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 + \\
& + \kappa_{12}d_3 + d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}, \tag{6.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 13 \rangle} = & -\kappa_{23}d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + [\kappa_{23}(\kappa_{12} - \kappa_{21}) - (d_1\kappa_{21}) - \kappa_{21}d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
& + [\kappa_{23}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) + (d_1\kappa_{21}) + \kappa_{23}d_3 + (\kappa_{21} - \kappa_{12})d_1 + d_1d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
& + [\kappa_{13}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - (d_3\kappa_{21}) + (\kappa_{12} - \kappa_{21})d_2 - 2\kappa_{13}d_3 - d_2d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 23 \rangle} = & -\kappa_{12}d_2d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + [\kappa_{12}(\kappa_{31} - \kappa_{13}) - (d_3\kappa_{13}) - \kappa_{13}d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
& + [\kappa_{12}(\kappa_{13} - \kappa_{31}) + (d_3\kappa_{13}) + \kappa_{12}d_2 + (\kappa_{13} - \kappa_{31})d_3 + d_3d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
& + [\kappa_{32}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - 2\kappa_{12}\kappa_{23} + \kappa_{31}d_3 - \kappa_{12}d_1 - 2(d_3\kappa_{23}) - 2\kappa_{23}d_3 - d_3d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}.
\end{aligned}$$

Приведенные выражения должны использоваться, когда пластическое течение происходит на ребре призмы Кулона – Треска. Компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ *нельзя* получить циклической перестановкой индексов в уравнении (6.11). То же самое относится к компонентам $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ и уравнению (6.12). Вывод этих уравнений следует осуществлять, как это было сделано, исходя непосредственно из формул (6.5), (6.6) для физических компонент тензора несовместности.

В качестве примера применения уравнений совместности деформаций выясним аналитическую классификацию и найдем характеристики пространственных кинематических уравнений в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$. Для этого выпишем главные части уравнений совместности деформаций

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_2d_2d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_1d_1d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_2d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_1d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + (d_1d_2 + d_2d_1)d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 12 \rangle} &= d_2d_1d\varepsilon_3 + d_3d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 23 \rangle} &= d_3d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_3d_1d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 13 \rangle} &= d_1d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} - d_2d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Пользуясь соотношением несжимаемости

$$d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d\varepsilon_3 = 0,$$

устраним из полученной системы уравнений $d\varepsilon_3$. В результате приходим к системе

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= d_2d_2d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d_2d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= d_1d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d_1d_1d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_2d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_1d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + (d_1d_2 + d_2d_1)d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 12 \rangle} &= -d_2d_1d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_2d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d_3d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 23 \rangle} &= d_3d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_3d_1d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 13 \rangle} &= d_1d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} - d_2d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Только три из этих уравнений независимы, причем а priori неизвестно какие. Однако соображения симметрии позволяют быстро обнаружить нужные уравнения. Искомые уравнения есть $dS_{\langle 12 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$, т.е. выбираются такие уравнения, чтобы индексы у компонент тензора несовместности $d\mathbf{S}$ не включали номер 3. Эти уравнения следует рассматривать как систему уравнений в частных производных относительно $d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}$, $d\varepsilon_{\langle 22 \rangle}$, $d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}$.

Найдем характеристики построенной системы. Составляя характеристический определитель, приходим к характеристическому уравнению ($N_{\langle j \rangle}$ – физические компоненты единичного вектора нормали к характеристике относительно ортонормированного базиса собственных векторов тензора напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n}):

$$\begin{vmatrix} -N_{\langle 2 \rangle}N_{\langle 1 \rangle} & -N_{\langle 2 \rangle}N_{\langle 1 \rangle} & N_{\langle 3 \rangle}^2 \\ N_{\langle 2 \rangle}^2 & N_{\langle 2 \rangle}^2 - N_{\langle 3 \rangle}^2 & 0 \\ N_{\langle 1 \rangle}^2 - N_{\langle 3 \rangle}^2 & N_{\langle 1 \rangle}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.15}$$



или

$$N_{<3>}^4(N_{<1>}^2 + N_{<2>}^2 - N_{<3>}^2) = 0.$$

Учитывая условие нормировки

$$N_{<1>}^2 + N_{<2>}^2 + N_{<3>}^2 = 1,$$

преобразуем характеристическое уравнение к виду

$$N_{<3>}^4(1 - 2N_{<3>}^2) = 0,$$

откуда сразу же становится ясно, что оно имеет три различных вещественных корня:

$$N_{<3>} = 0, \quad N_{<3>} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

причем кратность нулевого корня равна четырем, т.е. система дифференциальных уравнений в частных производных

$$dS_{<12>} = 0, \quad dS_{<11>} = 0, \quad dS_{<22>} = 0 \quad (6.16)$$

гиперболична, а ее характеристики идентичны характеристикам поля напряжений¹⁷.

Выясним, зависимы ли остальные уравнения совместности для приращений деформаций

$$dS_{<33>} = 0, \quad dS_{<13>} = 0, \quad dS_{<23>} = 0 \quad (6.17)$$

от трех уравнений совместности (6.16). Для этого рассмотрим тождество Бианки для тензора несовместности $d\mathbf{S}$. В изостатической координатной сетке оно представляется в форме

$$\begin{aligned} d_1 dS_{<11>} + \kappa_{23}(dS_{<11>} - dS_{<22>}) + \kappa_{32}(dS_{<11>} - dS_{<33>}) + \\ + (2\kappa_{13} + \kappa_{31} + d_2)dS_{<12>} + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)dS_{<13>} = 0, \\ d_2 dS_{<22>} + \kappa_{31}(dS_{<22>} - dS_{<33>}) + \kappa_{13}(dS_{<22>} - dS_{<11>}) + \\ + (2\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1)dS_{<21>} + (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3)dS_{<23>} = 0, \\ d_3 dS_{<33>} + \kappa_{12}(dS_{<33>} - dS_{<11>}) + \kappa_{21}(dS_{<33>} - dS_{<22>}) + \\ + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)dS_{<31>} + (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2)dS_{<32>} = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Учитывая (6.16), уравнения (6.18) приводим к виду

$$\begin{aligned} (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)dS_{<13>} - \kappa_{32}dS_{<33>} = 0, \\ (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3)dS_{<23>} - \kappa_{31}dS_{<33>} = 0, \\ d_3 dS_{<33>} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})dS_{<33>} + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)dS_{<13>} + (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2)dS_{<23>} = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Отсюда видно, что эта система линейных уравнений в частных производных относительно трех компонент $dS_{<33>}$, $dS_{<13>}$, $dS_{<23>}$ тензора несовместности $d\mathbf{S}$ нормальна по изостатической переменной ξ^3 , ибо приводится к нормальной форме Коши по этой переменной

$$\begin{aligned} \frac{\partial dS_{<13>}}{\partial \xi^3} = \dots, \\ \frac{\partial dS_{<23>}}{\partial \xi^3} = \dots, \\ \frac{\partial dS_{<33>}}{\partial \xi^3} = \dots. \end{aligned} \quad (6.20)$$

¹⁷Указанная система дифференциальных уравнений в частных производных, как нетрудно заметить, не является ξ^3 -гиперболической (или строго гиперболической относительно переменной ξ^3), так как ее характеристическое уравнение имеет кратный корень. Поэтому проблема корректности постановки задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.16) с начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} нуждается в дополнительном исследовании. Заметим, что многие важные уравнения математической физики имеют характеристическую форму с кратными корнями. Можно даже сказать, что условие строгой гиперболичности очень редко выполняется для линейных систем первого порядка.



Следовательно, задача Коши для системы уравнений (6.19) с начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} поставлена корректно. В частности, поставлена корректно задача Коши с нулевыми начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 23 \rangle} = 0 \quad (\xi^3 = \text{const}). \quad (6.21)$$

Такая задача Коши имеет, очевидно, единственное нулевое решение. В случае, когда коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.19) являются аналитическими функциями изостатических координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и слой $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} есть аналитическая поверхность, единственность аналитического решения рассматриваемой задачи Коши прямо следует из теоремы Коши – Ковалевской (см., например, [11], с. 30–37), поскольку как мы покажем далее слой $\xi^3 = \text{const}$ не является характеристической поверхностью для системы (6.19).

Единственность нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений (6.19) (если по-прежнему считать коэффициенты этой системы аналитическими функциями изостатических координат ξ^1, ξ^2, ξ^3) с нулевыми начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$ в классе непрерывно дифференцируемых функций гарантируется теоремой Хольмгрена (Holmgren, 1901) (см., например, [12]–[15])¹⁸ поскольку слой $\xi^3 = \text{const}$ не является характеристической поверхностью для системы (6.19). Действительно, составляя характеристическое уравнение, имеем ($N_{\langle j \rangle}$ — физические компоненты вектора нормали к плоскому характеристическому элементу относительно базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$)

$$\begin{vmatrix} N_{\langle 3 \rangle} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\langle 3 \rangle} & 0 \\ N_{\langle 1 \rangle} & N_{\langle 2 \rangle} & N_{\langle 3 \rangle} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. находится корень $N_{\langle 3 \rangle}^3 = 0$ кратности 3, а сама характеристическая форма вырождается, что говорит о параболическом вырождении системы уравнений (6.19) и что нормали к характеристикам располагаются в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} ¹⁹. Поэтому всюду в области достижимости слоя $\xi^3 = \text{const}$ будут выполняться три оставшихся условия совместности (6.17), если они выполняются на слое.

Итак, если три уравнения совместности

$$dS_{\langle 12 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 11 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 22 \rangle} = 0$$

выполнены, то три оставшихся

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 23 \rangle} = 0$$

также выполняются, если они выполняются на каком-либо слое $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} , причем гарантировать выполнение трех оставшихся условий совместности можно в области достижимости слоя $\xi^3 = \text{const}$ или в более широком смысле в той области пространства, где начальные данные (6.21) однозначно определяют решение системы уравнений (6.20)²⁰. Поскольку характеристические поверхности системы уравнений в частных производных (6.20) составляются из векторных линий

¹⁸Теорема Хольмгрена имеет весьма общий характер и применяется к *линейным* системам дифференциальных уравнений в частных производных любого аналитического типа (гиперболического, эллиптического, параболического). В условной части теоремы Хольмгрена можно не требовать аналитичности поверхности, на которой выставляются начальные данные. Теорема Хольмгрена указывает также и форму области, где решение задачи Коши единственным образом определяется начальными данными: это «линзообразная» область, ограниченная начальной поверхностью и частью пространства, заполненного семейством аналитических поверхностей, представляющим собой аналитическую деформацию начального слоя при фиксированном его крае, причем на всех поверхностях этого семейства характеристический определитель должен быть отделен от нуля одной и той же для всех поверхностей семейства постоянной. Насколько далеко удастся продвинуться этим методом от начального слоя зависит от геометрии характеристических поверхностей.

¹⁹Поэтому поверхности, составленные из векторных линий поля \mathbf{n} , будут характеристическими для системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.19). Такие же поверхности являются характеристическими и для уравнений равновесия в случае состояний на ребре призмы Треска (см. уравнение (1.10)) $\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{divn} = \mathbf{0}$.

²⁰Этот важный результат проливает свет на отмеченную выше проблему о том, какие именно три уравнения составляют независимую систему условий совместности малых деформаций.



поля \mathbf{n} , то область достижимости слоя $\xi^3 = \text{const}$ будет, по-видимому, ограничена векторными линиями поля \mathbf{n} , выпущенными из точек контура, являющегося краем слоя $\xi^3 = \text{const}$. Ясно, что в приведенных формулировках слой $\xi^3 = \text{const}$ может быть заменен любой поверхностью, не являющейся характеристической для параболически вырожденной системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.19).

Укажем еще на одно интересное обстоятельство. Если часть границы тела свободна от контактных усилий, то в качестве граничного условия здесь можно принять условие касания вектора \mathbf{n} . Следовательно, указанная часть границы тела будет характеристической поверхностью для системы уравнений в частных производных (6.19). Если дополнить ее произвольной нехарактеристической поверхностью так, чтобы образовалась «линзообразная» пространственная область, то три условия совместности

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 23 \rangle} = 0 \quad (6.22)$$

будут выполнены всюду в образованной области, если они выполняются на дополняющей поверхности и если три других условия совместности выполняются всюду в указанной области.

Дальнейшие уточнения выполнимости условий (6.22) требует более детального анализа системы уравнений в частных производных

$$d_1 \begin{pmatrix} dS_{\langle 13 \rangle} \\ dS_{\langle 23 \rangle} \\ dS_{\langle 33 \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_{\langle 13 \rangle} \\ dS_{\langle 23 \rangle} \\ dS_{\langle 33 \rangle} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(2\kappa_{12} + \kappa_{21}) & 0 & \kappa_{32} \\ 0 & -(2\kappa_{21} + \kappa_{12}) & \kappa_{31} \\ -(2\kappa_{32} + \kappa_{23}) & -(2\kappa_{31} + \kappa_{13}) & -(\kappa_{21} + \kappa_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_{\langle 13 \rangle} \\ dS_{\langle 23 \rangle} \\ dS_{\langle 33 \rangle} \end{pmatrix}.$$

7. КИНЕМАТИКА ПЛОСКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Опираясь на полученные в предыдущем параграфе статьи результаты, можно исследовать кинематику плоского пластического течения.

Любое условие пластичности в случае плоского деформированного состояния приводится к виду $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$. В плоскости течения $x_1 x_2$ имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое — номером 2. В условиях плоского деформированного состояния имеем $d_3 = 0$, $du_{\langle 3 \rangle} = 0$, $d\varepsilon_3^P = 0$, $\kappa_{31} = 0$, $\kappa_{32} = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{13}$, $\kappa_2 = \kappa_{23}$.

Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = \kappa_{13} = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = \kappa_{23} = d_2\theta. \quad (7.1)$$

Имеется всего одно дериационное соотношение, связывающее кривизны изостатических траекторий, которое имеет вид (см. [3])

$$d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0 \quad (7.2)$$

и удовлетворяется тождественно в силу $\kappa_1 = -d_1\theta$, $\kappa_2 = d_2\theta$.

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе – Максвелла

$$d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) = 0, \quad d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) = 0, \quad (7.3)$$

или

$$d_1\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0, \quad (7.4)$$

где ρ_1 , ρ_2 — радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается



произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Так как в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, то уравнения (7.4) приобретают следующий вид:

$$d_1\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_1} = 0. \quad (7.5)$$

Эта система гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений. Вводя в систему (7.5) производные вдоль характеристических направлений (примем, что первая характеристика отклоняется от первого главного направления напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки)

$$\bar{d}_1 = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{d}_2 = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \quad (7.6)$$

складывая, а затем вычитая уравнения этой системы, получим интегрируемые соотношения Генки (Н. Генски) вдоль характеристик:

$$\bar{d}_1(\sigma_1 - 2k\theta) = 0, \quad \bar{d}_2(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \quad (7.7)$$

Интересно заметить, что в случае плоской деформации единственная ненулевая компонента $dS_{\langle 33 \rangle}$ тензора несовместности $d\mathbf{S} = \nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla$ может быть вычислена по формуле

$$dS_{\langle 33 \rangle} = \nabla \cdot (\nabla \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta d\varepsilon_{jj}.$$

Поэтому в случае плоской деформации условия совместности в приращениях деформаций сводятся к одному уравнению (см. [3])

$$dS_{\langle 33 \rangle} = -d_1d_1d\varepsilon_2 - d_2d_2d\varepsilon_1 - (d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_2d_1(2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1d_2(2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \quad (7.8)$$

Соотношения Коши в случае плоского деформированного состояния:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_1 + d_2 & -\kappa_2 + d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.10)$$

Следовательно, условие несжимаемости и соосности тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций в сетке линий главных напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\kappa_2 + d_1)du_{\langle 1 \rangle} + (\kappa_1 + d_2)du_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ (-\kappa_1 + d_2)du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_2 + d_1)du_{\langle 2 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

С помощью условия несжимаемости $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$ из уравнения (7.8) исключается $d\varepsilon_2$, поэтому получается уравнение только относительно $d\varepsilon_1$. По главной части этого уравнения

$$d_1d_1d\varepsilon_1 - d_2d_2d\varepsilon_1 + \dots = 0$$

легко устанавливается, что кинематические уравнения принадлежат к гиперболическому типу, и характеристики являются линиями скольжения.

Ясно, что уравнение второго порядка для $d\varepsilon_1$ может быть заменено системой двух уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$u = \ln |d\varepsilon_1|, \quad p = d_1u, \quad q = d_2u. \quad (7.12)$$

Переменная u — логарифмическое приращение деформации.



Принимая во внимание, что

$$d_1 d\varepsilon_1 = p e^u, \quad d_2 d\varepsilon_1 = q e^u, \quad d_1 d_1 d\varepsilon_1 = e^u d_1 p + e^u p^2, \quad d_2 d_2 d\varepsilon_1 = e^u d_2 q + e^u q^2,$$

уравнение совместности деформаций представим в форме

$$d_2 q - d_1 p = p^2 - q^2 + 3(\kappa_2 p - \kappa_1 q) + 2(d_1 \kappa_2 - d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2). \quad (7.13)$$

Заметим далее, что в силу

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = -\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2 \quad (7.14)$$

справедливо соотношение

$$d_2 p - d_1 q = -\kappa_1 p + \kappa_2 q. \quad (7.15)$$

Следовательно, относительно величин p и q имеем систему уравнений первого порядка (7.13), (7.15).

Вводя обозначения $P = d_1 \theta$, $Q = d_2 \theta$, систему кинематических уравнений можно привести к следующему симметричному виду:

$$\begin{aligned} d_2 q - d_1 p &= p^2 - q^2 + 3(pQ + qP) + 2(d_1 Q + d_2 P + Q^2 - P^2), \\ d_2 p - d_1 q &= pP + qQ. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Напомним, что здесь величины p и q — производные вдоль линий главных напряжений от логарифмического приращения деформации.

Уравнения статики также преобразуются к симметричной форме относительно величин P и Q . Действительно, уравнения равновесия (7.5) с помощью обозначений $P^* = d_1 \sigma_1 / (2k)$, $Q^* = d_2 \sigma_1 / (2k)$ представляются как

$$P^* = -Q, \quad Q^* = -P. \quad (7.17)$$

На основании (7.14) находим

$$d_2 P^* - d_1 Q^* = -\kappa_1 P^* + \kappa_2 Q^* = PP^* + QQ^*$$

и в силу (7.17) —

$$d_1 P - d_2 Q = -2PQ.$$

Переписывая в новых обозначениях дериационную формулу (7.2), имеем

$$d_2 P - d_1 Q = P^2 + Q^2.$$

Таким образом, получаем систему статических уравнений плоской задачи в форме:

$$\begin{aligned} d_1 P - d_2 Q &= -2PQ, \\ d_2 P - d_1 Q &= P^2 + Q^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Последняя система уравнений позволяет сформулировать ряд новых результатов, касающихся геометрии поля изостат (см. также [16]).

Преобразуя систему уравнений (7.18) к характеристическим переменным (см. (7.6)), находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \bar{d}_1 (P + Q) &= -(P + Q)^2, \\ \sqrt{2} \bar{d}_2 (P - Q) &= (P - Q)^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 \frac{1}{P + Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \bar{d}_2 \frac{1}{P - Q} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (7.19)$$



Вспоминая определение величин P и Q , получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \bar{d}_2 \frac{1}{\kappa_2 + \kappa_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}\quad (7.20)$$

т.е. обратная разность (сумма) кривизн изостатических линий при продвижении вдоль первой (второй) характеристики изменяется пропорционально пройденному пути²¹.

Не представляет труда и вывод соотношений для приращений перемещений вдоль характеристических направлений. Складывая уравнения (7.11), а затем вычитая одно из другого, с учетом (7.6) находим

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\bar{d}_2(du_{<1>} + du_{<2>}) + (\kappa_2 - \kappa_1)(du_{<1>} - du_{<2>}) &= 0, \\ \sqrt{2}\bar{d}_1(du_{<1>} - du_{<2>}) + (\kappa_2 + \kappa_1)(du_{<1>} + du_{<2>}) &= 0.\end{aligned}\quad (7.21)$$

Замечая далее, что при повороте осей главных напряжений 1, 2 на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки получаем характеристические оси $\bar{1}$, $\bar{2}$, так что физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно указанных осей вычисляются в виде $(du_{<\bar{1}>}, du_{<\bar{2}>})$ — физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно характеристических осей)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}du_{<\bar{1}>} &= du_{<1>} - du_{<2>}, \\ \sqrt{2}du_{<\bar{2}>} &= du_{<1>} + du_{<2>}.\end{aligned}$$

Следовательно, для физических компонент²² приращения вектора перемещений имеем

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 du_{<\bar{1}>} + \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}} du_{<\bar{2}>} &= 0, \\ \bar{d}_2 du_{<\bar{2}>} + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}} du_{<\bar{1}>} &= 0.\end{aligned}\quad (7.22)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}} = \frac{d_2 + d_1}{\sqrt{2}}\theta = \bar{d}_2\theta, \quad \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}} = \frac{d_2 - d_1}{\sqrt{2}}\theta = -\bar{d}_1\theta,$$

из (7.22) получаем соотношения Гейрингера (H. Geiringer) вдоль характеристик

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 du_{<\bar{1}>} - du_{<\bar{2}>} \bar{d}_1\theta &= 0, \\ \bar{d}_2 du_{<\bar{2}>} + du_{<\bar{1}>} \bar{d}_2\theta &= 0\end{aligned}\quad (7.23)$$

или на основании $\bar{\kappa}_1 = -\bar{d}_1\theta$, $\bar{\kappa}_2 = \bar{d}_2\theta$

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 du_{<\bar{1}>} + \bar{\kappa}_1 du_{<\bar{2}>} &= 0, \\ \bar{d}_2 du_{<\bar{2}>} + \bar{\kappa}_2 du_{<\bar{1}>} &= 0.\end{aligned}\quad (7.24)$$

Напомним, что производные по характеристическим направлениям $\bar{1}$, $\bar{2}$ связаны с производными по главным направлениям 1, 2 следующими соотношениями:

$$\sqrt{2}\bar{d}_1 = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial S_1} = d_1 - d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} - \frac{\partial}{\partial S_2},$$

²¹Этот результат — аналог второй теоремы Генки о геометрии поля скольжения в состоянии плоской деформации (см., например [17, с. 218]). Вторая теорема Генки непосредственно следует из (7.20). Действительно, применяя (7.6) к θ , находим

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}},$$

где $\bar{\kappa}_1 = -\bar{d}_1\theta$, $\bar{\kappa}_2 = \bar{d}_2\theta$ — кривизны характеристических линий, что означает

$$\bar{d}_1 \frac{1}{\bar{\kappa}_2} = 1, \quad \bar{d}_2 \frac{1}{\bar{\kappa}_1} = 1,$$

а эти соотношения как раз и составляют содержание второй теоремы Генки.

²²Относительно характеристических направлений.



$$\sqrt{2} \bar{d}_2 = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial S_2} = d_1 + d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} + \frac{\partial}{\partial S_2}.$$

Следовательно, соотношения Гейрингера (7.23) могут быть представлены в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial du_{\langle \bar{1} \rangle}}{\partial S_1} - du_{\langle \bar{2} \rangle} \frac{\partial \theta}{\partial S_1} &= 0, \\ \frac{\partial du_{\langle \bar{2} \rangle}}{\partial S_2} + du_{\langle \bar{1} \rangle} \frac{\partial \theta}{\partial S_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Вводя в уравнения (7.23) вместо приращений перемещений $du_{\langle \bar{1} \rangle}$, $du_{\langle \bar{2} \rangle}$ физические компоненты скорости $v_{\langle \bar{1} \rangle}$, $v_{\langle \bar{2} \rangle}$ относительно ортогональной сетки характеристических линий, имеем

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 v_{\langle \bar{1} \rangle} - v_{\langle \bar{2} \rangle} \bar{d}_1 \theta &= 0, \\ \bar{d}_2 v_{\langle \bar{2} \rangle} + v_{\langle \bar{1} \rangle} \bar{d}_2 \theta &= 0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Соотношения Гейрингера (7.26) устанавливают, что скорости удлинений прямолинейных элементов, касающихся линий скольжения, равны нулю (см., например: *Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. С. 267, 272, 273*). Если через $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle}$ обозначить физические компоненты тензора скорости деформаций $\dot{\epsilon}$ в характеристической системе координат, то соотношения Гейрингера будут эквивалентны уравнениям

$$\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} = 0.$$

Связывая с помощью тензорного закона преобразования декартовы компоненты $\dot{\epsilon}_{11}$, $\dot{\epsilon}_{22}$, $\dot{\epsilon}_{12}$ тензора $\dot{\epsilon}$ с его компонентами относительно характеристической координатной системы $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle}$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= \dot{\epsilon}_{11} \cos^2(\theta - \frac{\pi}{4}) + 2\dot{\epsilon}_{12} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \dot{\epsilon}_{22} \sin^2(\theta - \frac{\pi}{4}), \\ \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= \dot{\epsilon}_{11} \cos^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 2\dot{\epsilon}_{12} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \dot{\epsilon}_{22} \sin^2(\theta + \frac{\pi}{4}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \right) + \\ &+ \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \right), \\ \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \right) + \\ &+ \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \right). \end{aligned}$$

Записывая полученные уравнения с помощью операторов дифференцирования по характеристическим направлениям, находим

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_2, \\ \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_2, \end{aligned}$$

что при условиях $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} = 0$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} = 0$ позволяет сразу же найти соотношения вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_2 &= 0, \\ \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Рассмотрим далее физические компоненты скорости $v_{\langle \bar{1} \rangle}$, $v_{\langle \bar{2} \rangle}$ относительно характеристической координатной системы, связав их с декартовыми компонентами скорости с помощью тензорного закона преобразования

$$v_{\langle \bar{1} \rangle} = v_1 \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + v_2 \sin(\theta - \frac{\pi}{4}),$$



$$v_{\langle \bar{2} \rangle} = v_1 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + v_2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Дифференцируя последние уравнения вдоль первого и второго характеристических направлений соответственно и учитывая

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{\langle \bar{1} \rangle} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - v_{\langle \bar{2} \rangle} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \\ v_2 &= -v_{\langle \bar{1} \rangle} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + v_{\langle \bar{2} \rangle} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 v_{\langle \bar{1} \rangle} &= \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_1 v_1 + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_1 v_2\right) + v_{\langle \bar{2} \rangle} \bar{d}_1 \theta, \\ \bar{d}_2 v_{\langle \bar{2} \rangle} &= \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_2 v_1 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_2 v_2\right) - v_{\langle \bar{1} \rangle} \bar{d}_2 \theta, \end{aligned}$$

и, принимая во внимание, что выражения в скобках в правых частях равны нулю на основании (7.27), снова приходим к соотношениям Гейрингера в форме (7.26).

Соотношения Гейрингера, как показывает внимательный анализ их вывода, остаются справедливыми при плоской несжимаемой деформации любого изотропного тела²³. Их появление в рамках теории плоской задачи математической теории пластичности — не более чем дань традиции.

8. КИНЕМАТИКА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа²⁴: 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k . Первый случай исследуется сравнительно элементарными средствами. Второй случай — состояние «полной пластичности» Хаара – Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему состояние «полной пластичности»

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

В осесимметричном случае линии главных напряжений образуют триортогональную координатную сетку ξ^i . При этом ξ^2 — угловая координата. Кроме того, имеем: $d_2 = 0$, $du_{\langle 2 \rangle} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $\kappa_{31} = 0$. Поэтому приходим к более простым, по сравнению с общим пространственным случаем, соотношениям, описывающим распределения напряжений и скоростей.

Деривационные соотношения выражаются группой уравнений:

$$\begin{aligned} d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{12}^2 + \kappa_{32}^2 &= 0, \\ d_1 \kappa_{23} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{12} \kappa_{21} &= 0, \\ d_3 \kappa_{21} + \kappa_{21}^2 + \kappa_{23} \kappa_{32} &= 0, \\ d_3 \kappa_{23} &= \kappa_{21} (\kappa_{32} - \kappa_{23}). \end{aligned}$$

Уравнения равновесия, сформулированные относительно изостатической сетки, есть

$$\begin{aligned} d_1 \sigma_1 + \kappa_{23} (\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32} (\sigma_1 - \sigma_3) &= 0, \\ d_3 \sigma_3 + \kappa_{21} (\sigma_3 - \sigma_2) + \kappa_{12} (\sigma_3 - \sigma_1) &= 0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

и при догружении вдоль ребра призмы Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ в этих уравнениях следует положить $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$.

²³Поскольку для их вывода в рамках теории плоского деформированного состояния достаточно условия несжимаемости и условия коориентированности главных осей тензора напряжений и тензора скоростей деформаций.

²⁴Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии.



Условия совместности приращений деформаций выражаются тремя уравнениями относительно изостатических координат

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}^2 (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3 [\kappa_{21} (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23} \kappa_{32} (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\
 &\quad - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 = 0, \\
 dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2) (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + d_1 [\kappa_{32} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \\
 &\quad - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_3 - d_3 [\kappa_{12} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] = 0, \\
 dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - d_1 [\kappa_{23} (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} \kappa_{12} (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\
 &\quad - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$

из которых, в силу тождества Бианки $\nabla \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0}$, независимы только два, например, первое и третье. Действительно, условия $dS_{\langle 12 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 23 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 31 \rangle} = 0$ удовлетворяются тождественно в силу $\kappa_{31} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $d_2 = 0$. Это означает, что тензор $d\mathbf{S}$ соосен тензору напряжений и $dS_{\langle 11 \rangle} = dS_1$, $dS_{\langle 22 \rangle} = dS_2$, $dS_{\langle 33 \rangle} = dS_3$. Тождества Бианки при этом сводятся к двум уравнениям:

$$\begin{aligned}
 d_1 dS_1 + \kappa_{23} (dS_1 - dS_2) + \kappa_{32} (dS_1 - dS_3) &= 0, \\
 d_3 dS_3 + \kappa_{12} (dS_3 - dS_1) + \kappa_{21} (dS_3 - dS_2) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

Следовательно, если хотя бы одна из кривизн κ_{23} или κ_{21} отлична от нуля, то из условий $dS_1 = 0$, $dS_3 = 0$ необходимо $dS_2 = 0$.

Независимыми можно также считать два условия $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$. Если кривизна κ_{32} отлична от нуля, то из уравнений (8.3) необходимо следует $dS_{\langle 33 \rangle} = 0$.

Независимые условия совместности $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ после исключения из них величины $d\varepsilon_2$ с помощью условия несжимаемости позволяют сформулировать систему двух уравнений второго порядка относительно $d\varepsilon_1$ и $d\varepsilon_3$. Главная часть этой системы есть

$$d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 d_3 d\varepsilon_3 + \dots = 0, \quad -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + \dots = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} N_{\langle 3 \rangle}^2 & N_{\langle 3 \rangle}^2 \\ -N_{\langle 3 \rangle}^2 & N_{\langle 1 \rangle}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $N_{\langle j \rangle}$ — физические компоненты вектора нормали \mathbf{N} к характеристическому элементу относительно базиса \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} при условии $N_{\langle 1 \rangle}^2 + N_{\langle 3 \rangle}^2 = 1$ приобретает вид

$$N_{\langle 3 \rangle}^2 (N_{\langle 3 \rangle}^2 - N_{\langle 1 \rangle}^2) = 0$$

и имеет четыре действительных корня: $N_{\langle 3 \rangle} = 0$ (корень кратности два), $N_{\langle 3 \rangle} = 1/\sqrt{2}$, $N_{\langle 3 \rangle} = -1/\sqrt{2}$, т.е. система уравнений $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ принадлежит к гиперболическому типу; направления, ортогональные третьей главной оси напряжений, — характеристические, а остальные характеристические направления делят пополам углы между главными осями напряжений 1 и 3. Следовательно, характеристиками системы уравнений совместности приращений деформаций $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ будут изостаты, ортогональные третьему главному направлению, и линии скольжения.

В осесимметричном случае соотношения Коши, связывающие приращения тензора малых деформаций с приращениями перемещений, в криволинейной ортогональной координатной сетке линий главных напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \\ d\varepsilon_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & 0 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix},
 \tag{8.4}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0.
 \tag{8.5}$$



Следовательно, условие несжимаемости и соосности тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций в сетке линий главных напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1)du_{\langle 1 \rangle} + (\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ (-\kappa_{12} + d_3)du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_{32} + d_1)du_{\langle 3 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$N_{\langle 1 \rangle}^2 - N_{\langle 3 \rangle}^2 = 0$$

при условии

$$N_{\langle 1 \rangle}^2 + N_{\langle 3 \rangle}^2 = 1$$

имеет два действительных различных корня, что указывает на гиперболичность приведенной выше системы уравнений. Характеристические линии являются линиями скольжения.

9. КИНЕМАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрим, следуя [18]–[20], кинематику пространственного пластического течения на поверхности скольжения. Исключительный интерес здесь будут представлять соотношения, связывающие скачки тангенциальных приращений перемещений при переходе через линии сильного разрыва, расположенные на самой поверхности максимальной скорости сдвига. Указанные линии, как будет доказано, являются асимптотическими линиями поверхности максимальной скорости сдвига, а соотношения вдоль них, связывающие скачки, оказываются интегрируемыми. Изложение в основном следует статье: Радаев Ю.Н. Кинематика пространственного идеально пластического течения на поверхностях скольжения // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. 2006. №9(49). С. 30–41.

Поверхность скольжения в идеально пластическом теле суть поверхность разрыва касательных составляющих приращений перемещений $d\mathbf{u}$.

Как показывает анализ, данный в [18], [19], на поверхности разрыва касательных составляющих приращений перемещений реализуется чисто сдвиговое течение, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям

$$d\varepsilon_i^P = 0, \quad d\varepsilon_j^P + d\varepsilon_l^P = 0 \quad (i \neq j, j \neq l, l \neq i). \quad (9.1)$$

Действительно, если считать, что поверхность сильного разрыва касательных составляющих приращений перемещений заменяется тонким слоем, внутри которого вектор $d\mathbf{u}$ изменяется непрерывно (рис. 1), то можно получить (\mathbf{N} — единичный вектор, ортогональный рассматриваемой поверхности)

$$d\varepsilon = \psi([d\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes [d\mathbf{u}]),$$

где ψ — некоторая функция, определенная на поверхности разрыва приращений перемещений.

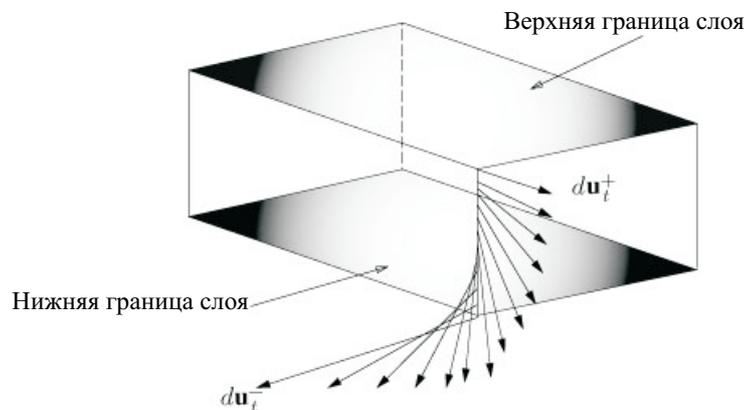


Рис. 1. Слой скольжения внутри идеально пластического тела (касательная составляющая приращений перемещений $d\mathbf{u}_t$ непрерывно переходит внутри слоя из положения $d\mathbf{u}_t^-$ в положение $d\mathbf{u}_t^+$)



Привлекая затем соотношение совместности для скачка вектора $d\mathbf{u}$ при переходе через поверхность разрыва приращений перемещений

$$\mathbf{N} \cdot [d\mathbf{u}] = 0,$$

следующее из условия несжимаемости²⁵, сразу же приходим к уравнению

$$\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \psi [d\mathbf{u}], \quad (9.2)$$

с помощью которого получаем следующее представление приращений деформаций на поверхности разрыва касательных составляющих приращений перемещений:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (9.3)$$

Соотношения (9.1) без труда устанавливаются с помощью (9.3).

Ассоциированный закон течения, сформулированный для грани призмы Кулона – Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций:

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Видно, что характер пластического течения, если реализуется напряженное состояние на грани призмы Кулона – Треска, оказывается чисто сдвиговым. Сдвиг происходит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} (рис. 2). Направления максимальной скорости сдвига расположены в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , и делят пополам прямые углы, образованные направленными вдоль векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} пересекающимися прямыми.

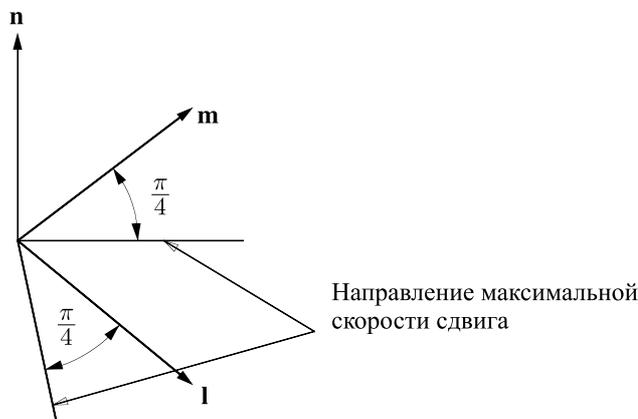


Рис. 2. Положение направлений максимальной скорости сдвига относительно триэдра главных осей напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} (течение на грани призмы Кулона – Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$)

Чисто сдвиговое течение (9.1) характерно для состояний на грани призмы Треска, и тогда необходимо совместное рассмотрение уравнений (3.3), (3.8), дополненных соотношениями Коши. Однако чисто сдвиговое течение (9.1) возможно и на ребре призмы Треска тогда, когда вектор, представляющий приращения пластических деформаций в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя – Вестергарда, занимает одно из крайних своих возможных положений между нормальными к граням

²⁵Последнее, поскольку речь идет о сильных разрывах приращений перемещений, следует брать в интегральной форме $\oint_S \boldsymbol{\nu} \cdot d\mathbf{u} = 0$, где S – произвольная замкнутая поверхность, расположенная внутри тела и не изменяющаяся в процессе нагружения, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор нормали к указанной поверхности.



призмы, пересечением которых образуется само ребро²⁶. В любом случае в дальнейшем при анализе течения вдоль поверхностей скольжения мы будем, помимо (9.3), использовать лишь условия несжимаемости и соотношения Коши.

Деформация в нормальных сечениях поверхности скольжения представляет собой сдвиг одной стороны поверхности относительно другой. В одном из нормальных сечений поверхности скольжения скорость деформации сдвига максимальна²⁷. Линия пересечения этого нормального сечения с касательной плоскостью указывает направление максимальной скорости сдвига²⁸. Действительно, рассмотрим произвольную нормальную к поверхности скольжения плоскость, опирающуюся на единичные векторы \mathbf{t} , \mathbf{N} . Вектор \mathbf{t} касается поверхности скольжения. Согласно (9.2) скорость деформации сдвига в этой плоскости вычисляется как

$$\mathbf{N} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{t} = \psi [d\mathbf{u}] \cdot \mathbf{t}. \tag{9.4}$$

Ясно, что максимум эта величина достигает тогда, когда вектор \mathbf{t} становится коллинеарным вектору $[d\mathbf{u}]$. Проведенное рассуждение показывает также, что на поверхности максимальной скорости сдвига удобно ввести локальный ортогональный триэдр, состоящий из ортов \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{N} (орт \mathbf{t}_1 имеет направление $[d\mathbf{u}]$, орт \mathbf{t}_2 ортогонален $[d\mathbf{u}]$, а орт \mathbf{N} нормален поверхности (рис. 3)).

В базисе \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{N} матрица тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ на основании (9.3) имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} \\ 0 & 0 & 0 \\ d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

где $d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}$ — единственная ненулевая физическая компонента тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в указанном базисе. Следовательно, можно сразу же вычислить собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$: $0, \pm d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}$.

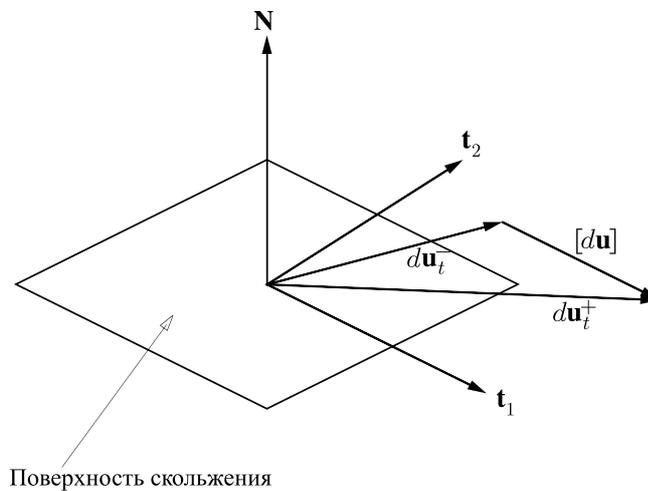


Рис. 3. Ориентация локального репера \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{N} на поверхности скольжения

²⁶Здесь мы говорим о *ребре* призмы Треска, хотя, по существу, сдвиговое течение (9.1) соответствует *грани*, с тем, чтобы оперировать с правильно определенной гиперболической системой кинематических уравнений (2.19) и ее решениями, подчиняющимися ограничениям (9.1). Мы пользуемся возможностью трактовать состояния на ребре как предельные случаи состояний на гранях, пересечением которых образовано ребро. Действительное течение на грани, помимо кинематических связей (9.1), ограничивается еще и жестким предписанием триэдра главных осей тензора приращений пластических деформаций (он предписан триэдром главных осей тензора напряжений). На ребре призмы Треска предписывается лишь одно из трех главных направлений тензора приращений пластических деформаций.

²⁷Это нормальное сечение имеет направление вектора разности векторов тангенциальных приращений вектора перемещения с двух сторон поверхности.

²⁸Именно поэтому поверхность скольжения мы будем называть также поверхностью максимальной скорости сдвига.



Из ассоциированного закона течения следует, что касательное напряжение на поверхности максимальной скорости сдвига также имеет максимальное значение²⁹. Следовательно, если допускать отмеченную выше возможность реализации сдвигового течения вида (9.1) для состояний на ребре призмы Треска, то поверхность максимальной скорости сдвига — характеристическая для правильно определенной системы уравнений кинематики течения на ребре. Поясним сказанное примером. Рассмотрим грань призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и две ее крайние точки, расположенные в девиаторной плоскости, соответствующие ребрам (рис. 4)

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k.$$

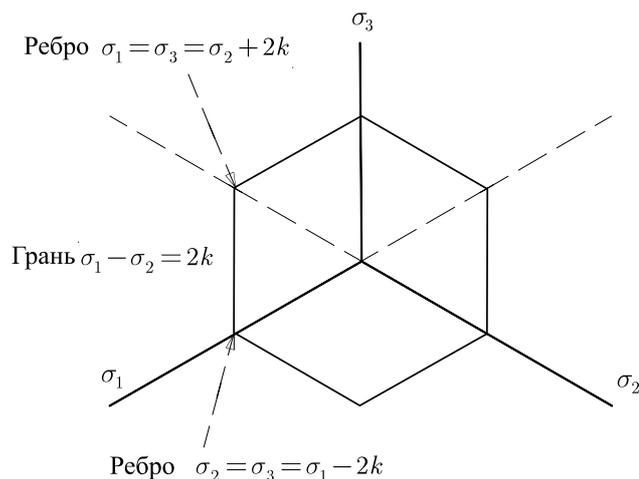


Рис. 4. Крайние состояния для грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ в девиаторной плоскости пространства главных напряжений

Обобщенный ассоциированный закон течения допускает реализацию для таких состояний чисто сдвигового течения вида

$$d\varepsilon_3 = 0, \quad d\varepsilon_1 = -d\varepsilon_2.$$

Направления максимальной скорости сдвига для рассматриваемых состояний ортогональны вектору \mathbf{n} и делят пополам угол между векторами \mathbf{l} и \mathbf{m} .

Вектор \mathbf{N} (единичная нормаль к поверхности скольжения), поскольку он нормален характеристической площадке, должен для состояния $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k$ удовлетворять соотношению

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а для состояния $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k$ —

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая еще, что вектор \mathbf{N} ортогонален направлению максимальной скорости сдвига, удается однозначно определить его ориентацию относительно локального триэдра $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ (рис. 5). Заметим, что в каждом из двух состояний $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k$ вектор \mathbf{N} ортогонален вектору \mathbf{n} , а вектор \mathbf{n} касается поверхности скольжения.

²⁹Можно показать (см. [19], с. 47–49), что только условие пластичности Треска обеспечивает существование в идеально пластических телах поверхностей разрыва касательных составляющих приращений перемещений с чисто сдвиговой картиной деформирования (9.1).

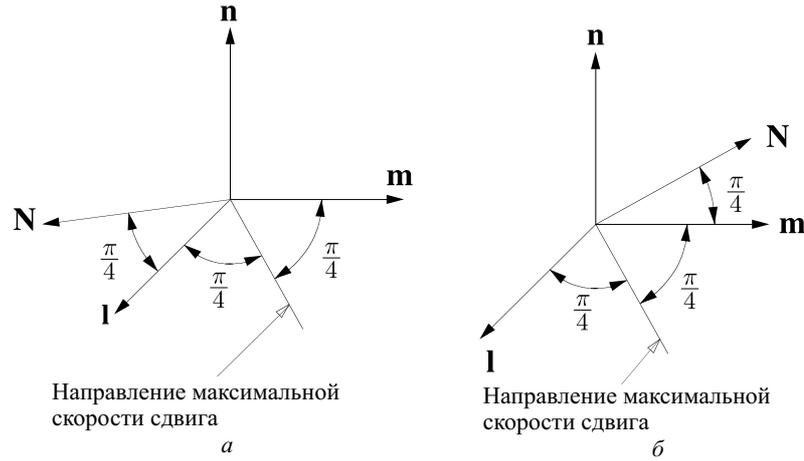


Рис. 5. Ориентация вектора \mathbf{N} относительно локального репера $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ для состояния $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k$ (а) и $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k$ (б)

Итак, поверхность максимальной скорости сдвига есть, вообще говоря, поверхность сильного разрыва приращений перемещений. Нормальная составляющая вектора $d\mathbf{u}$ должна быть непрерывной при переходе через поверхность максимальной скорости сдвига, а касательная составляющая разрывна. Все последующие соотношения поэтому следует интерпретировать как выполняющиеся на каждой из двух сторон поверхности.

Как было установлено выше, на поверхности максимальной скорости сдвига выполняется соотношение

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}),$$

т.е. сдвиги происходят в плоскостях, содержащих вектор \mathbf{N}^{30} , а в касательной плоскости сдвигов не происходит. Кроме него имеются также соотношение Коши и условие несжимаемости:

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T, \quad (9.5)$$

$$\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \quad (9.6)$$

Введем на поверхности скольжения Гауссовы координаты τ^1, τ^2 . Обозначим через \mathbf{i}_α локальные базисные векторы, соответствующие параметризации τ^1, τ^2 . Разложим тензор $\nabla \otimes d\mathbf{u}$ на рассматриваемой поверхности, используя триэдр $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{N}$:

$$\nabla \otimes d\mathbf{u} = \mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} + a^{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta}, \quad (9.7)$$

где $a^{\alpha\beta}$ — компоненты фундаментального тензора поверхности. В справедливости этого соотношения нетрудно убедиться, производя внутреннее умножение слева на векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{N}$.

Опираясь на условие несжимаемости и (9.5), (9.7), заключаем, что

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} = -a^{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta}. \quad (9.8)$$

Умножая (9.5) слева на \mathbf{N} и учитывая (9.7) и (9.8), находим

$$(\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} = 2\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + a^{\alpha\beta} \left(\left(\mathbf{i}_\alpha \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta} \right) \mathbf{N} - \mathbf{i}_\beta \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) \right). \quad (9.9)$$

Умножая тензорно обе части полученного уравнения справа и слева на вектор \mathbf{N} , складывая и используя (9.3),

$$\mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} = \nabla \otimes d\mathbf{u} - a^{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta},$$

³⁰Точнее, в одной из нормальных плоскостей (опирающейся на векторы \mathbf{t}_2, \mathbf{N}) скорость деформации сдвига равна нулю, а во всех остальных нормальных плоскостях она будет отлична от нуля.



а также (9.5), приходим к

$$2a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \cdot \mathbf{i}_\beta \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \otimes \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\beta \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) = a^{\alpha\beta} \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) (\mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{i}_\beta). \quad (9.10)$$

Переходя в этом уравнении к следу, имеем $a^{\alpha\beta} \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \cdot \mathbf{i}_\beta = 0$, что позволяет несколько упростить уравнение (9.10)

$$a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \otimes \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\beta \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) = a^{\alpha\beta} \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) (\mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{i}_\beta). \quad (9.11)$$

Приращения перемещений на поверхности максимальной скорости сдвига должны удовлетворять тензорному уравнению (9.11). Оно дает лишь три независимых скалярных уравнения, так как умножение обеих его частей на вектор \mathbf{N} приводит к тождеству. Независимые соотношения получаются умножением обеих частей уравнения (9.11) на вектор \mathbf{i}_μ слева, что приводит к

$$\left(\mathbf{i}_\mu \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) \mathbf{i}^\alpha + \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\mu} = \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\mu} \right) \mathbf{N},$$

а затем — на вектор \mathbf{i}_λ , что дает

$$\mathbf{i}_\mu \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\lambda} + \mathbf{i}_\lambda \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\mu} = 0. \quad (9.12)$$

Поскольку уравнение (9.12) должно удовлетворяться на каждой из сторон поверхности максимальной скорости сдвига, то для скачков приращений перемещений имеем следующее соотношение:

$$\mathbf{i}_\mu \cdot \frac{\partial [d\mathbf{u}]}{\partial \tau^\lambda} + \mathbf{i}_\lambda \cdot \frac{\partial [d\mathbf{u}]}{\partial \tau^\mu} = 0.$$

Для дальнейшего анализа разложим вектор $d\mathbf{u}$ по векторам локального триэдра $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{N}$:

$$d\mathbf{u} = (dU)\mathbf{N} + du^\alpha \mathbf{i}_\alpha.$$

Ясно, что dU, du^α не являются действительными приращениями и служат для сокращенной записи проекций вектора $d\mathbf{u}$ на указанный триэдр.

На основании формулы Вейнгартена $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \tau^\gamma} = -a^{\omega\sigma} b_{\omega\gamma} \mathbf{i}_\sigma$ ($b_{\omega\gamma}$ — компоненты второй квадратичной формы поверхности максимальной скорости сдвига) можно получить следующие выражения для частных производных вектора $d\mathbf{u}$ по Гауссовым параметрам поверхности:

$$\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\gamma} = -(dU)a^{\omega\sigma} b_{\omega\gamma} \mathbf{i}_\sigma + \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\gamma} \mathbf{i}_\alpha + (du^\alpha) \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \mathbf{i}_\sigma + \mathbf{N} \frac{\partial dU}{\partial \tau^\gamma},$$

внося которые в (9.12) и учитывая $\Gamma_{\alpha\lambda,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu,\lambda} = \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha}$, приходим к уравнению

$$-2b_{\mu\lambda}(dU) + a_{\mu\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\lambda} + a_{\lambda\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\mu} + du^\alpha \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} = 0. \quad (9.13)$$

Поскольку уравнение (9.13) должно удовлетворяться на каждой из сторон поверхности максимальной скорости сдвига, а нормальная составляющая dU непрерывна при переходе через эту поверхность, то скачки касательных составляющих приращений перемещений связаны посредством следующего соотношения:

$$a_{\mu\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\lambda} + a_{\lambda\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\mu} + [du^\alpha] \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} = 0. \quad (9.14)$$

Сворачивая обе части уравнения (9.13) с $g^{\lambda\mu}$, имеем

$$4H(dU) + 2 \frac{\partial du^\lambda}{\partial \tau^\lambda} + a^{\lambda\mu} \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} du^\alpha = 0, \quad (9.15)$$

где H — средняя кривизна поверхности максимальной скорости сдвига:

$$H = -\frac{1}{2} b_{\mu\lambda} a^{\lambda\mu}.$$



Для скачков (принимая во внимание, что $[dU] = 0$) соответственно находим уравнение

$$2 \frac{\partial [du^\lambda]}{\partial \tau^\lambda} + a^{\lambda\mu} \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} [du^\alpha] = 0. \quad (9.16)$$

Исключая затем с помощью соотношения (9.15) из (9.13) нормальную составляющую dU , получаем

$$-H a_{\mu\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\lambda} - H a_{\lambda\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\mu} - b_{\mu\lambda} \frac{\partial du^\beta}{\partial \tau^\beta} = 0. \quad (9.17)$$

Это уравнение³¹ собственно и определяет пластическое скольжение вдоль поверхности максимальной скорости сдвига и должно удовлетворяться на каждой из двух ее сторон (касательные составляющие du^α могут иметь различные значения на разных сторонах поверхности; нормальная составляющая dU непрерывна при переходе через эту поверхность, если не допускать нарушения сплошности тела).

Для анализа кинематики течения на поверхности максимальной скорости сдвига исследуем уравнение (9.17) на предмет существования действительных характеристических направлений. Можно воспользоваться стандартной техникой Адамара – Томаса [5] геометрических условий совместности слабых разрывов касательных составляющих приращений перемещений. Слабый разрыв характеризуется скачками производных, в поперечных по отношению к характеристическим линиям направлениях, величина которых вычисляется согласно

$$\left[\frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\lambda} \right] = A^\alpha \nu_\lambda,$$

где ν_λ — единичный вектор нормали к характеристической линии на поверхности максимальной скорости сдвига³². Ясно, что

$$\nu_\lambda \nu^\lambda = 1, \quad A^\alpha A_\alpha > 0.$$

Из уравнений (9.17) выводятся соотношения для скачков касательных составляющих приращений перемещений. В результате находим, что компоненты ν_λ должны определяться из условий нетривиальной разрешимости относительно A_α ($A^\alpha A_\alpha > 0$) системы уравнений

$$-H(A_\mu \nu_\lambda + A_\lambda \nu_\mu) - (A^\beta \nu_\beta) b_{\mu\lambda} = 0. \quad (9.18)$$

Несложные рассуждения показывают, что вещественные характеристические направления существуют, только когда главные нормальные кривизны поверхности максимальной скорости сдвига κ_1 , κ_2 имеют разный знак (т.е. Гауссова кривизна поверхности K отрицательна). При этом характеристики представляют собой асимптотические линии на поверхности максимальной скорости сдвига³³. Действительно, система уравнений (9.18) в ортогональной Гауссовой сетке имеет вид

$$\begin{aligned} -2H A_1 \nu_1 - (a^{11} A_1 \nu_1 + a^{22} A_2 \nu_2) b_{11} &= 0, \\ -2H A_2 \nu_2 - (a^{11} A_1 \nu_1 + a^{22} A_2 \nu_2) b_{22} &= 0, \\ -H(A_1 \nu_2 + A_2 \nu_1) - (a^{11} A_1 \nu_1 + a^{22} A_2 \nu_2) b_{12} &= 0. \end{aligned}$$

³¹Вместе с соответствующим уравнением, связывающим скачки касательных составляющих приращений перемещений

$$-H a_{\mu\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\lambda} - H a_{\lambda\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\mu} - b_{\mu\lambda} \frac{\partial [du^\beta]}{\partial \tau^\beta} = 0.$$

³²Вектор ν расположен в касательной к поверхности плоскости ортогонально характеристической линии.

³³Напомним, что асимптотическими линиями на поверхности называются линии, нормальная кривизна которых равна нулю. Если t есть касательный вектор к асимптотической линии, то

$$b_{\mu\lambda} t^\mu t^\lambda = 0.$$

На поверхности отрицательной гауссовой кривизны асимптотические линии образуют координатную сетку. Угол ι между асимптотическими линиями вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\iota}{2} = \sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}.$$



Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2H\nu_1 - a^{11}b_{11}\nu_1 & -a^{22}b_{11}\nu_2 \\ -H\nu_2 - a^{11}b_{12}\nu_1 & -H\nu_1 - a^{22}b_{12}\nu_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(2H_1 + a^{11}b_{11})(H\nu_1 + a^{22}b_{12}\nu_2)\nu_1 = a^{22}b_{11}(H\nu_2 + a^{11}b_{12}\nu_1)\nu_2,$$

принимает наиболее простую форму

$$b_{22}\nu_1^2 + b_{11}\nu_2^2 = 0,$$

когда криволинейная сетка на поверхности совпадает с сеткой линий кривизны (в этом случае $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, $-b_{11}/a_{11} = \kappa_1$, $-b_{22}/a_{22} = \kappa_2$). Переходя в последнем уравнении к физическим компонентам $\nu_{\langle 1 \rangle}$, $\nu_{\langle 2 \rangle}$ относительно локального базиса сетки линий кривизны согласно $\nu_1 = \sqrt{a_{11}}\nu_{\langle 1 \rangle}$, $\nu_2 = \sqrt{a_{22}}\nu_{\langle 2 \rangle}$, получим

$$\kappa_2\nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \kappa_1\nu_{\langle 2 \rangle}^2 = 0, \quad \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \nu_{\langle 2 \rangle}^2 = 1,$$

откуда следует, что система уравнений (9.17) гиперболична, только если главные кривизны поверхности имеют разные знаки. Из этого же уравнения на основании формулы Эйлера для нормальной кривизны кривой на поверхности, составляющей угол ω с первой линией кривизны,

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \omega + \kappa_2 \sin^2 \omega$$

заключаем, что нормальная кривизна характеристик системы уравнений (9.17) равна нулю, т.е. характеристики есть асимптотические линии поверхности максимальной скорости сдвига. Этот факт сразу же позволяет сделать вывод о том, что пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Поэтому результатом такого рода необратимого деформирования должны быть мозаичные узоры, составленные из отрезков линий микроскольжения, ориентированных в асимптотических направлениях. Даже локально поверхность отрицательной Гауссовой кривизны имеет довольно сложную форму. Любая окрестность точки поверхности отрицательной Гауссовой кривизны имеет седлообразную форму и делится асимптотическими направлениями на четыре части, причем две из них являются вогнутыми и две выпуклыми.

Предположим, что Гауссова кривизна поверхности максимальной скорости сдвига K отрицательна. Выберем параметризацию поверхности максимальной скорости сдвига так, чтобы координатные линии $\tau^1 = \text{const}$, $\tau^2 = \text{const}$ были асимптотическими линиями. Поскольку в этом случае

$$b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad K = -\frac{b_{12}^2}{a}, \quad H = \frac{a_{12}b_{12}}{a}, \quad -\frac{H}{K} = \frac{a_{12}}{b_{12}},$$

то из системы уравнений (9.17) можно получить два независимых уравнения³⁴

$$a_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + a_{12} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} + a_{12} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} = 0. \quad (9.19)$$

Здесь $a_{\mu\lambda}$ — компоненты метрического тензора поверхности, вычисленные в асимптотической координатной сетке. Система уравнений (9.19) записана в характеристических координатах. Каждое из уравнений этой системы есть соотношение вдоль характеристики.

В случае, когда система уравнений (9.17) эллипична, в координатной сетке линий кривизны имеем

$$\begin{aligned} 2Ha_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + b_{11} \left(\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} \right) &= 0, \\ 2Ha_{22} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + b_{22} \left(\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} \right) &= 0, \\ Ha_{22} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} + Ha_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned}$$

³⁴При $\mu = 1$, $\lambda = 1$ и $\mu = 2$, $\lambda = 2$. Уравнение, соответствующее $\mu = 1$, $\lambda = 2$, не дает нового независимого соотношения.



откуда получаем два независимых уравнения

$$\kappa_2 \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} - \kappa_1 \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} = 0, \quad a_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} + a_{22} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} = 0. \quad (9.20)$$

Здесь, подчеркнем еще раз, координатная сетка τ^1, τ^2 совпадает с сеткой линий кривизны поверхности максимальной скорости сдвига. Второе уравнение приведенной системы можно преобразовать, переходя к физическим компонентам приращений перемещений и лонгальным параметрам s_1, s_2 вдоль линий кривизны. В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial s_2} + \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial s_1} + \gamma_1 du_{\langle 1 \rangle} + \gamma_2 du_{\langle 2 \rangle} = 0,$$

где γ_1, γ_2 — геодезические кривизны линий кривизны поверхности максимальной скорости сдвига

$$\gamma_1 = -\frac{\partial \ln \sqrt{a_{11}}}{\partial s_2}, \quad \gamma_2 = -\frac{\partial \ln \sqrt{a_{22}}}{\partial s_1}.$$

Заметим, что главные кривизны и геодезические кривизны линий кривизны связаны уравнениями Гаусса и Кодацци:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_2}{\partial s_1} + (\kappa_1 - \kappa_2) \gamma_2 &= 0, \\ \frac{\partial \kappa_1}{\partial s_2} - (\kappa_1 - \kappa_2) \gamma_1 &= 0, \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 &= K. \end{aligned}$$

В итоге главная часть системы дифференциальных уравнений (9.20) приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} \kappa_2 \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial s_1} - \kappa_1 \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial s_2} + \dots &= 0, \\ \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial s_2} + \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial s_1} + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Исследуем, наконец, соотношения для сильных разрывов касательных (по отношению к асимптотическим линиям поверхности максимальной скорости сдвига), составляющих приращения вектора перемещений. Поскольку уравнения (9.17) должны выполняться на поверхности максимальной скорости сдвига с каждой стороны соответствующей асимптотической линии, то для скачков имеем соотношения

$$a_{11} \frac{\partial [du^1]}{\partial \tau^1} + a_{12} \frac{\partial [du^2]}{\partial \tau^1} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial [du^2]}{\partial \tau^2} + a_{12} \frac{\partial [du^1]}{\partial \tau^2} = 0.$$

Так как нормальные (по отношению к асимптотическим линиям поверхности максимальной скорости сдвига) составляющие приращения вектора перемещений непрерывны, то вдоль каждой из двух асимптотических линий справедливо соотношение

$$\nu_1 [du^1] + \nu_2 [du^2] = 0.$$

Принимая во внимание, что для ковариантных компонент нормалей к асимптотическим линиям

$$\begin{aligned} \nu_1 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_1 = 0, \quad \nu_2 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_2 = \sqrt{a_{22}} \sin \iota; \\ \nu_2 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \nu_1 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_1 = -\sqrt{a_{11}} \sin \iota, \end{aligned}$$

приходим к следующим соотношениям вдоль асимптотических линий:

$$\begin{aligned} [du^2] = 0, \quad \frac{\partial [du^1]}{\partial \tau^1} = 0 \quad \text{вдоль } \tau^1\text{-линии;} \\ [du^1] = 0, \quad \frac{\partial [du^2]}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{вдоль } \tau^2\text{-линии;} \end{aligned}$$



интегрируя которые получаем четыре конечных соотношения:

$$\begin{aligned} [du^2] &= 0, & [du^1] &= \text{const} & \text{вдоль } \tau^1\text{-линии;} \\ [du^1] &= 0, & [du^2] &= \text{const} & \text{вдоль } \tau^2\text{-линии.} \end{aligned}$$

Таким образом, вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига соотношения для скачков контравариантных (относительно локального базиса, который образует асимптотическая координатная сеть) компонент приращения вектора перемещений интегрируются. Два из четырех интегралов устанавливают непрерывность нормальных к асимптотическим линиям (и располагающихся в касательной плоскости к поверхности максимальной скорости сдвига) составляющих приращения вектора перемещений. Два других интеграла указывают на сохранение вдоль асимптотических линий одного семейства скачков тех контравариантных компонент приращения вектора перемещений, которые соответствуют базисным векторам, нормальным асимптотическим линиям другого семейства.

Библиографический список

1. *Ивлев Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 3. С. 546–549; *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 15–20.
2. *Ивлев Д.Д.* О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. №3. С. 137; *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 20–21.
3. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарск. гос. ун-та, 2004. 147 с.
4. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.; *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
5. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
6. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
7. *Быковцев Г.И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сб. статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. С. 153.
8. *Malvern L.* Introduction to the Mechanics of Continuous Medium. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1969. 714 p.
9. *Washizu K.* A note on the conditions of compatibility// J. Math. Phys. 1958. V. 36. P. 306–312.
10. *Moriguti S.* Fundamental theory of dislocations of elastic bodies // Oyo Sugaku Rikigaku. 1947. V.1. P. 87–90.
11. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высш. шк., 1964. 560 с.
12. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. С. 259–261.
13. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. С. 58–63.
14. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. С. 239–241.
15. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. С. 49–54.
16. *Радаев Ю.Н.* Дополнительные теоремы теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности// Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучная сер. 2004. № 2(32). С. 41–61.
17. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
18. *Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М.* О поверхностях скольжения в трехмерных жесткопластических телах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 6. С. 1260–1262.
19. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
20. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мяснянкин Ю.М.* О кинематических соотношениях на поверхностях скольжения в идеальных жесткопластических телах// Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 32, вып. 4. С. 623–631.