



## Библиографический список

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Овчинникова Н.В., Павлов Д.Г., Чеботаревский Ю.В. Модельная задача для исследования процессов поверхностного упрочнения пластическим деформированием с применением ультразвуковых воздействий // Вестн. СГТУ. 2007. № 4(28), вып. 1. С. 14–18.
3. Динник А.Н. Избранные труды. Т. I. Киев: Изд-во АН Укр. ССР, 1952. 152 с.
4. ABAQUS Analysis User's Manual Version 6.4 / Hibbit: Karlsson Sorensen, Inc. USA, 2002.

УДК 532.5; 532.135

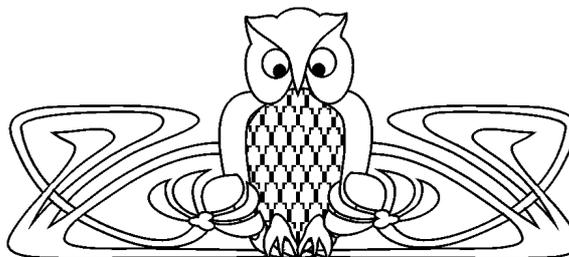
# ТОРМОЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ О СЛОЙ «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ» ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ

М.И. Сафрончик

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук  
E-mail: safronchikmi@yandex.ru

Рассматривается неустойчившееся течение вязкопластичной среды между параллельными плоскостями, одна из которых остается неподвижной, а другая начинает движение из состояния покоя под действием постоянной силы. Течение вязкопластичной среды развивается постепенно. Граница области течения заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. Сила приложенная к верхней пластине, выбирается таким образом, чтобы с течением времени проявился так называемый эффект «проскальзывания» вдоль обеих плоскостей. Постановка задачи дается в рамках пятипараметрической модели вязкопластичной среды, позволяющей учесть различие в поведении материала при нагружении и разгрузке, а также возможное проскальзывание вдоль твердых стенок. Гистерезис деформаций учитывается с помощью модели Слибара – Паслая. Для учета возможного пристенного скольжения предлагается гипотеза, аналогичная известной гипотезе проф. Н.П. Петрова для вязкой жидкости, но позволяющая описать естественное физическое условие плавного перехода от «прилипания» к «проскальзыванию», а входящие в неё параметры могут быть определены опытным путем. Для решения задачи с искомой границей используется модифицированный метод Колоднера.

**Ключевые слова:** вязкопластичная среда, неустойчившееся течение вязкопластичной среды, модель Слибара – Паслая, пристенное скольжение, метод Колоднера.



## Plate Braking Against the Layer of «Delayed» Viscoplastic Fluid with Regard to Wall Sliding

M.I. Safronchik

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Cybernetics and Computer Sciences  
E-mail: safronchikmi@yandex.ru

The paper presents the problem of unstable viscoplastic fluid flow between parallel planes, one of which is fixed, while the other one is put in motion from a standstill under the influence of constant force. Viscoplastic fluid flow develops gradually. The border of the flow is not known in advance and is to be determined in the process of solving the task. The force applied to the upper plate is chosen so as to cause the effect of sliding along the two plates in the course of time. The task definition is given within the limits of five-parameter model, which permits to take up the difference between behavior under stress and without stress as well as possible sliding along the solid walls. Hysteresis of deformation is considered by means of Slibar – Pasy hypothesis. To take the possible sliding along the walls into account, a hypothesis, analogical to the well-known hypothesis for viscous fluid of Prof. N.P. Petrov, is suggested. The offered hypothesis also allows to describe the natural physical condition of smooth transition from «sticking» to «sliding». Moreover, the parameters included into it can be defined empirically. To solve the task with the required border, a modified method of Kolodner is used.

**Key words:** viscoplastic fluid, unstable viscoplastic fluid flow, Slibar – Pasy hypothesis, wall sliding, the method of Kolodner.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим две неограниченные горизонтальные пластины, находящиеся на расстоянии  $H$  друг от друга, пространство между которыми заполнено вязкопластичным материалом. Нижняя пластина остается все время в покое, а верхняя начинает движение из состояния покоя под действием приложенной к ней в момент  $t = 0$  постоянной силы. Обозначим величину силы, приходящейся на единицу площади пластины через  $q_1$ , а массу единицы площади пластины толщины  $H_1$  через  $m$ . В этом случае уравнение движения пластины можно записать в виде

$$m \frac{dU}{dt} = q_1 - \tau(0, t), \quad (1)$$



где  $U(t)$ —скорость пластины, а  $\tau(0, t)$ —напряжение на её поверхности. Система координат выбрана так как показано на (рис.1).

Постановка задачи дается в рамках пятипараметрической модели Слибара – Паслая, которая для случая чистого сдвига имеет вид [1]

Нагружение	Разгрузка
$\tau - \tau_d = \eta \left  \frac{\partial V}{\partial n} \right  \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \tau > \tau_s,$ $0 = \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \tau \leq \tau_s,$	$\tau - \tau_d = \eta \left  \frac{\partial V}{\partial n} \right  \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \tau > \tau_d,$ $0 = \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \tau \leq \tau_d.$

Здесь  $\tau_s$  и  $\tau_d$  — статический и динамический пределы текучести соответственно,  $\eta$  — структурная вязкость,  $V$  — скорость,  $n$  — нормаль к направлению скорости.

Для учета возможного пристенного скольжения предлагается гипотеза, аналогичная известной гипотезе проф. Н.П. Петрова для вязкой жидкости, которая для вязкопластичной среды записывается в виде

$$\tau - \tau^* = \lambda |V_{vf} - V_s|, \quad \tau > \tau^*,$$

$$V_{vf} = V_s, \quad \tau \leq \tau^*,$$

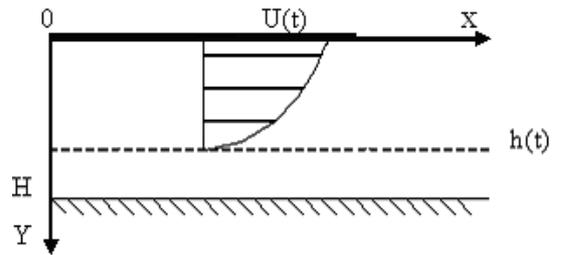


Рис.1

где  $\lambda$  — коэффициент «внешнего» трения (по терминологии Н.П. Петрова),  $\tau^*$  — предельное напряжение при котором начинается «проскальзывание» вдоль твердой стенки,  $V_{vf}$  и  $V_s$  — скорость вязкопластичной жидкости у стенки и скорость самой стенки, соответственно.

В отличие от общепринятого подхода к учету пристенного скольжения путем введения вязкого пристенного слоя с меньшей вязкостью, чем вязкость основной среды, предлагаемый подход не требует знания толщины пристенного слоя и его вязкости. Существующие в настоящее время гипотезы возникновения аномалии в сопротивлении за счет «проскальзывания» не позволяют связать толщину и свойства пристенного слоя с остальными параметрами процесса. Поэтому известные решения задач о совместном движении вязкой и вязкопластичной жидкостей дают лишь качественную оценку этому явлению.

Предлагаемая гипотеза позволяет описать естественное физическое условие плавного перехода от «прилипания» к «проскальзыванию», а входящие в неё параметры могут быть определены опытным путем.

В отличие от вязкой и обычной бингамовской жидкостей ( $\tau_s = \tau_d = \tau_0$ ) течение «запаздывающей» вязкопластичной среды развивается постепенно. Граница области течения  $h(t)$  заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи.

Математическая постановка задачи на этапе разрушения структуры имеет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad 0 < y < h(t), \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

$$h(0) = 0, \quad h(T) = H, \quad \lim_{y \rightarrow h(t)-0} V_x(y, t) = 0. \tag{4}$$

В зависимости от соотношений между параметрами процесса условие на движущейся пластине может быть двух видов:

$$V_x(0, t) = U(t), \quad 0 < t < T, \tag{5}$$

т.е. весь этап разрушения структуры происходит без скольжения и

$$V_x(0, t) = \begin{cases} U(t), & 0 < t \leq t^*, \\ U(t) - \frac{1}{\lambda}(\tau(0, t) - \tau^*), & t^* < t < T, \end{cases} \tag{6}$$



когда этап разрушения структуры проходит частично без скольжения, а затем со скольжением. Момент  $t^*$  соответствует  $\tau(0, t^*) = \tau^*$ . И еще два соотношения, следующие из формулы (2):

$$\lim_{y \rightarrow h(t) - 0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\tau_s - \tau_d}{\eta}, \quad \lim_{y \rightarrow 0 + 0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\tau(0, t) - \tau_d}{\eta}. \quad (7)$$

При постановке задачи предполагается следующее соотношение параметров  $\tau_d < \tau_s < \tau^* < q_1$ , что обеспечивает не только возможность возникновения движения, но и наличие пристенного скольжения.

Вводя безразмерные переменные по формулам:  $y = H\bar{y}$ ,  $h(t) = H\bar{h}(\bar{t})$ ,  $t = H^2/\nu\bar{t}$ ,  $U(t) = U_0\bar{U}(\bar{t})$ ,  $\tau(t) = \tau_d\bar{\tau}(\bar{t})$ ,  $\tau_s = \alpha\tau_d$ ,  $\tau^* = \gamma\tau_d$ ,  $q = a\gamma$ ,  $\lambda = \bar{\lambda}/\eta H$ , параметр Сен – Венана  $\text{Sen}_d = \tau_d H / U_0 \eta$  сформулируем задачу в безразмерном виде.

В безразмерных переменных уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} = R \text{Sen}_d (a\gamma - \bar{\tau}(0, \bar{t})), \quad R = \frac{\rho H}{\rho_1 H_1}, \quad (8)$$

где  $\rho$  и  $H$  — плотность и толщина вязкопластичной среды, а  $\rho_1$  и  $H_1$  — плотность и толщина пластины. Задача (3)–(8) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2}, & 0 < \bar{y} < \bar{h}(\bar{t}), & \quad 0 < \bar{t} < \bar{T}, \\ \bar{h}(0) &= 0, \quad \bar{h}(\bar{T}) = 1, & \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{h}(\bar{t}) - 0} \bar{V}_x(\bar{y}, \bar{t}) &= 0, \\ \bar{V}_x(0, \bar{t}) &= \begin{cases} \bar{U}(\bar{t}), & 0 < \bar{t} \leq \bar{t}^*, \\ \bar{U}(\bar{t}) - \frac{\text{Sen}_d}{\lambda} (\bar{\tau}(0, \bar{t}) - \gamma), & \bar{t}^* < \bar{t} < \bar{T}, \end{cases} & (9) \\ \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{h}(\bar{t}) - 0} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} &= -\text{Sen}_d (\alpha - 1), & \lim_{\bar{y} \rightarrow 0 + 0} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} &= -\text{Sen}_d (\bar{\tau}(0, \bar{t}) - 1). \end{aligned}$$

В дальнейшем для простоты записи черточки опускаем.

Заметим, что сформулированная задача не вполне корректна, так как в начальный момент область течения отсутствует. Этим свойством обладают все известные автомодельные задачи стефановского типа. Для решения этой задачи с неизвесной подвижной границей предлагается модификация аналитического метода Колоднера.

Данная задача при заданной скорости пластины и отсутствии пристенного скольжения рассмотрена нами в работе [2].

## 2. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОЛОДНЕРА

В соответствии с модифицированным методом Колоднера строится вспомогательное решение в области  $0 < y \neq h(t) < \infty$ ,  $0 < t < \infty$  в виде комбинации тепловых потенциалов простого слоя для следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \\ V_x(y, 0) &= 0, \quad h(0) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow h(t) + 0} V_x(y, t) - \lim_{y \rightarrow h(t) - 0} V_x(y, t) &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow h(t) + 0} \frac{\partial V_x}{\partial y} - \lim_{y \rightarrow h(t) - 0} \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \text{Sen}_d (\alpha - 1), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0 + 0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\text{Sen}_d (\tau(0, t) - 1). \quad (11)$$



Мощности источников подбираются так, чтобы скачек производной функции на кривой  $h(t)$  совпадал с правой частью условия (10), а в нуле с условием (11).

$$V_x(y, t) = \frac{\text{Sen}_d}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^t \frac{\tau(0, \xi) - 1}{\sqrt{t - \xi}} e^{-\frac{y^2}{4(t-\xi)}} d\xi - \frac{\alpha - 1}{2} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(y-h(\xi))^2}{4(t-\xi)}} + e^{-\frac{(y+h(\xi))^2}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t - \xi}} d\xi \right) \quad (12)$$

Для единственности решения необходимо выполнение следующих условий:

$$|V_x(y, t)| \leq \text{const} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial V_x(y, t)}{\partial y} \right| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{t}}.$$

Выражение (12) не зависит от конкретного вида функций  $h(t)$  и  $\tau(0, t)$ . Потребовав, чтобы  $\lim_{y \rightarrow h(t)+0} V_x = 0$ , получим уравнение для определения  $h(t)$ .

$$\int_0^t \frac{\tau(0, \xi) - 1}{\sqrt{t - \xi}} e^{-\frac{h^2(t)}{4(t-\xi)}} d\xi - \frac{\alpha - 1}{2} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(h(t)-h(\xi))^2}{4(t-\xi)}} + e^{-\frac{(h(t)+h(\xi))^2}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t - \xi}} d\xi = 0. \quad (13)$$

В работах [3, 4] для подобных уравнений показано, что если  $h(t)$  является решением уравнения (13), то  $V_x(y, t) \equiv 0$  в области  $h(t) < y < \infty$  и, следовательно будет выполняться условие  $\lim_{y \rightarrow h(t)+0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$ . В этом случае функция  $V_x(y, t)$  в интервале  $0 < y < h(t)$  будет удовлетворять всем условиям поставленной задачи. Удовлетворив условию (9), получим еще одно уравнение, связывающее  $h(t)$  и  $\tau(0, t)$ :

$$\frac{\text{Sen}_d}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^t \frac{\tau(0, \xi) - 1}{\sqrt{t - \xi}} d\xi - (\alpha - 1) \int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t - \xi}} d\xi \right) = \begin{cases} U(t), & 0 < t \leq t^*, \\ U(t) - \frac{\text{Sen}_d}{\lambda} (\tau(0, t) - \gamma), & t^* < t < T. \end{cases} \quad (14)$$

Интегрируя (8), находим выражение для скорости пластины и подставляя его в (14), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi)}{\sqrt{t - \xi}} d\xi + R \int_0^t \tau(0, \xi) d\xi - \frac{\alpha - 1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t - \xi}} d\xi - Ra\gamma t - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} = \\ & = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq t^*, \\ \frac{1}{\lambda} (\gamma - \tau(0, t)), & t^* < t < T. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение (15) имеет особую точку при  $t = 0$ , поэтому его удобнее представить в другом виде, выделив эту особенность. Совершим над уравнением (15) операцию:  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{\theta-t}}$ , изменив порядок интегрирования и вычислив интегралы, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tau(0, \xi) d\xi + R \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{t - \xi} \tau(0, \xi) d\xi + \frac{2}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_{t^*}^t \tau'(0, \xi) \sqrt{t - \xi} d\xi - \\ & - t - R \frac{4a\gamma t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} - (\alpha - 1) \int_0^t \text{erfc} \left( \frac{h(\xi)}{2\sqrt{t - \xi}} \right) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Здесь использовано известное значение интеграла:  $\int_0^1 \frac{e^{-\sigma^2/x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = \pi \text{erfc}(\sigma)$ . Далее дифференцируя по  $t$ , получаем:

$$\tau(0, t) + \frac{R}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi)}{\sqrt{t - \xi}} d\xi + \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_{t^*}^t \frac{\tau'(0, \xi) d\xi}{\sqrt{t - \xi}} - 1 - 2Ra\gamma \sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(\xi) e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}}}{(t - \xi)^{3/2}} d\xi = 0.$$

Преобразуем последнее слагаемое, выделив разрыв:

$$\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(\xi) e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}}}{(t - \xi)^{3/2}} d\xi = \frac{2(\alpha - 1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \frac{h(\xi)}{4\sqrt{(t - \xi)^3}} - \frac{h'(\xi)}{2\sqrt{t - \xi}} + \frac{h'(\xi)}{2\sqrt{t - \xi}} \right) e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}} d\xi.$$



Обозначим  $z(t, \xi) = \frac{h(\xi)}{2\sqrt{t-\xi}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{h(\xi)}{4\sqrt{(t-\xi)^3}} + \frac{h'(\xi)}{2\sqrt{t-\xi}}$ ,  $z(t, t) = \infty$ ;  $z(t, 0) = 0$ ,

$$\frac{2(\alpha - 1)}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^t e^{-z^2} \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}} d\xi \right) = (\alpha - 1) - \frac{(\alpha - 1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}} d\xi.$$

Получим уравнение:

$$\tau(0, t) + \frac{R}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi + \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_{t^*}^t \frac{\tau'(0, \xi) d\xi}{\sqrt{t-\xi}} = \alpha + 2Ra\gamma\sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{\alpha - 1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h'(\xi) e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi. \quad (16)$$

Уравнение (16) относительно  $\tau(0, t)$  является линейным интегральным уравнением Абеля и допускает точное решение. Ввиду сложности получаемых при этом расчетных формул, мы его не используем.

Для нахождения подвижной границы, а следовательно, и распределения скоростей в области течения требуется численно решить систему двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ) относительно двух неизвестных функций  $\tau(0, t)$  и  $h(t)$ :

$$\begin{cases} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi) - 1}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}} d\xi - \frac{\alpha - 1}{2} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(h(t)-h(\xi))^2}{4(t-\xi)}} + e^{-\frac{(h(t)+h(\xi))^2}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi = 0, \\ \tau(0, t) + \frac{R}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi + \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_{t^*}^t \frac{\tau'(0, \xi) d\xi}{\sqrt{t-\xi}} = \alpha + 2Ra\gamma\sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{\alpha - 1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h'(\xi) e^{-\frac{h^2(\xi)}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi, \end{cases} \quad (17)$$

где  $h(0) = 0, h(T) = 1, \tau(0, 0) = \alpha, \tau(0, t^*) = \gamma$ .

В зависимости от параметров возможны следующие варианты развития течения:

1. Весь этап разрушения структуры проходит без скольжения и тогда последний интеграл в левой части второго уравнения (17) отсутствует, а счет прекращается в момент  $t = T$ , при котором  $h(T) = 1$ .
2. Сначала разрушение структуры происходит без скольжения вдоль подвижной границы до момента  $t = t^*$ , при котором  $\tau(t^*) = \gamma$ , а затем со скольжением вдоль неё.

Решение строится на основе обобщенного метода квадратур [5], суть которого состоит в замене интегральных уравнений аппроксимирующей системой алгебраических уравнений относительно дискретных значений искомых функций. В основе такой замены лежит приближение интегралов обобщенными квадратурными формулами.

Вводим равномерные совпадающие сетки узлов по  $t$  и  $\xi$ :

$$t_n = n\Delta t, \quad \xi_k = t_k = k\Delta t, \quad k, n = 0, 1, \dots, N, \quad t_0 = \xi_0 = 0, \quad N\Delta t = T,$$

где  $\Delta t = \Delta \xi = \text{const}$  — шаг дискретизации. На некотором промежутке  $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , полагаем

$$f(\xi) = f(\xi_k) = \text{const}. \quad (18)$$

При условии (18) согласно теореме о среднем имеет место равенство:

$$\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \frac{f(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi = 2(\sqrt{t_k - \xi_{k-1}} - \sqrt{t_k - \xi_k}) f_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где  $f_k \equiv f(\xi_k)$ ,  $0 \leq \xi_{k-1} < \xi_k \leq t$ .

Формула (19) называется обобщенной формулой правых прямоугольников для сингулярности  $\frac{1}{\sqrt{t-\xi}}$ , а множители  $2(\sqrt{t_k - \xi_{k-1}} - \sqrt{t_k - \xi_k})$  — квадратурными коэффициентами этой формулы. Интегралы в (17) заменяем интегральными суммами:

$$\int_0^t \frac{f(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi = \sum_{k=1}^n \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \frac{f(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} d\xi = 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{t_k - \xi_{k-1}} - \sqrt{t_k - \xi_k}) f_k, \quad n = 1, \dots, N.$$

В результате численное решение системы СИУ выражается следующими рекуррентными соотношениями:

$$\sum_{k=1}^n (\tau_{k-1} - 1) \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \frac{e^{-\frac{h^2(t)}{4(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi - \frac{\alpha - 1}{2} \sum_{k=1}^n \left( e^{-\frac{(h_n - h_k)^2}{4(n-k)\Delta t}} + e^{-\frac{(h_n + h_k)^2}{4(n-k)\Delta t}} \right) P_{kn} = 0. \quad (20)$$



После вычисления интеграла входящего в (20), получим

$$\sum_{k=1}^n (\tau_{k-1} - 1) \left[ 2\sqrt{(n-k+1)\Delta t} e^{\frac{-h_n^2}{4(n-k+1)\Delta t}} - 2\sqrt{(n-k)\Delta t} e^{\frac{-h_n^2}{4(n-k)\Delta t}} - h_n \sqrt{\pi} \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{h_n}{2\sqrt{(n-k+1)\Delta t}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{h_n}{2\sqrt{(n-k)\Delta t}} \right) \right) \right] - \frac{\alpha - 1}{2} \sum_{k=1}^n \left( e^{\frac{-(h_n - h_k)^2}{4(n-k)\Delta t}} + e^{\frac{-(h_n + h_k)^2}{4(n-k)\Delta t}} \right) P_{kn} = 0,$$

$$\tau_n = \frac{1}{1 + 2R\sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}} + \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi\Delta t}}} \left( \alpha + 2Ra\gamma\sqrt{\frac{n\Delta t}{\pi}} - \frac{\alpha - 1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{h_k - h_{k-1}}{\Delta t} e^{-\frac{h_{k-1}^2}{4(n-k+1)\Delta t}} P_{kn} - \frac{R}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k P_{kn} + \frac{2\tau_{n-1}}{\lambda\sqrt{\pi\Delta t}} - \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}} \sum_{k=i}^{n-1} \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{\Delta t} P_{kn} \right). \quad (21)$$

В формуле (21) до момента проскальзывания  $t = t^*$  члены содержащие  $\lambda$  отсутствуют, а  $i\Delta t = t^*$ ,  $\tau(i\Delta t) = \gamma$ .

На рис. 2 и 3 показана зависимость толщины зоны вязкопластичного течения и напряжения на движущейся пластине от приложенной силы. На рис. 3 пунктирной линией показан момент начала проскальзывания вдоль подвижной пластины,  $\tau(t^*) = \gamma$ .

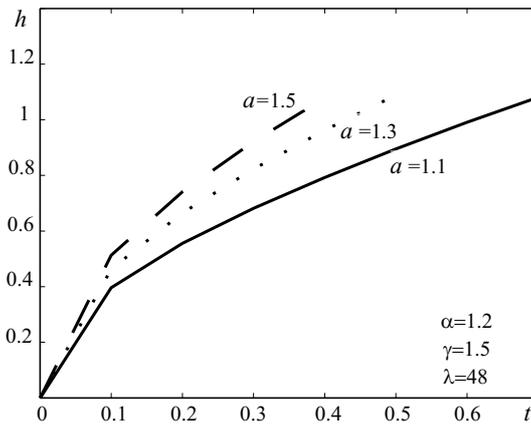


Рис. 2

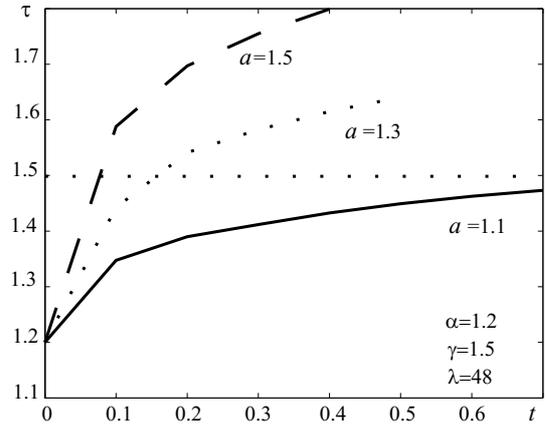


Рис. 3

В момент  $t = T$  закончился этап разрушения структуры материала. Решение задачи уже строится в области с постоянными границами в виде рядов Фурье. Отметим, что при  $t \rightarrow \infty$  течение стабилизируется, а профиль скорости приобретает вид

$$V_x(y) = \frac{q - \tau_d}{\eta} (H - y) + \frac{1}{\lambda} (q - \tau^*),$$

а скорость пластины будет равна

$$U = \frac{q - \tau_d}{\eta} H + \frac{2}{\lambda} (q - \tau^*).$$

### Библиографический список

1. Slibar A., Paslay P.R. Retarded Flow of Bingham Materials // J. of Appl. Mech. 1959. March. P. 107–112.
2. Сафрончик А.И., Сафрончик М.И., Неустойчившееся «запаздывающее» течение Куэтта вязкопластичной среды между параллельными стенками // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2003. Вып. 5. С. 177–180.
3. Kolodner J.I. Free boundary problem for the heat equation with applications of change of phase // Com. on Pure and Appl. Math. 1956. V. IX, № 1.
4. Сафрончик А.И. Некоторые задачи неустойчившегося течения вязкопластичных сред: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.
5. Сизиков В.С., Смирнов А.В., Федоров Б.А. Численное решение сингулярного интегрального уравнения Абеля обобщенным методом квадратур // Изв. вузов. Математика. 2004. № 8. С. 62–70.