

МЕХАНИКА

УДК 517.958

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ — ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ

Ю. Э. Сеницкий

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра сопротивления материалов и строительной механики
E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

Показано, что структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований является обобщением классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям. Рассматриваются начально-краевые задачи, описываемые гиперболической системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Доказывается, что в общем случае несамосопряженного оператора решение путем разложения по собственным вектор-функциям возможно лишь в результате применения биортогональных конечных интегральных преобразований. В частности, для самосопряженных начально-краевых задач решения, полученные методом конечных интегральных преобразований и классической процедурой разложения по собственным вектор-функциям тождественно совпадают, хотя первая из них является предпочтительней. Приведенные утверждения иллюстрируются на примере замкнутого решения динамической задачи для трехслойной анизотропной упругой цилиндрической оболочки при общих условиях ее загрузки и закрепления на контуре.

Ключевые слова: метод, обобщенный алгоритм, конечные интегральные преобразования, многокомпонентность, биортогональность, спектральные разложения, собственные вектор-функции, краевые задачи, самосопряженность, несамосопряженность, гиперболические системы уравнений, существование решения, сходимости, единственность, полнота, цилиндрические оболочки, трехслойность, уточненная теория, замкнутое решение.

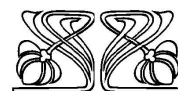
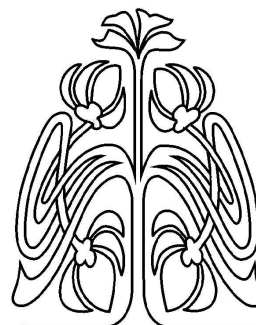
Finite Integral Transformations Method — Generalization of Classic Procedure for Eigenvector Decomposition

Yu. E. Senitsky

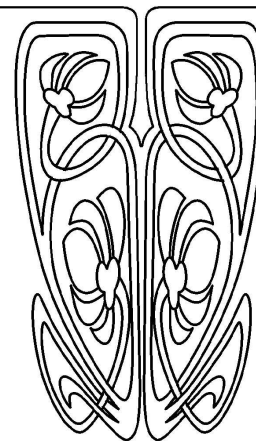
Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
Chair of Resistance of Materials and Construction Mechanics
E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

The structural algorithm of the finite integral transformation method is presented as a generalization of the classical procedure of eigenvector decomposition. The initial-boundary problems described with a hyperbolic system of linear partial second order differential equations are considered. The general case of non-self adjoint solution by expansion in the vector-functions is possible only by the use of biorthogonal of finite integral transformations. In particular, for self-adjoint initial-boundary problems solutions obtained by the method of finite integral transforms and the classic procedure of eigenvector decomposition expansion are identical, although the first of these is preferable. These statements are illustrated by the example of a closed solution of the dynamic problem for a three-layer anisotropic elastic cylindrical shell under the general conditions of loading and fastening on the circuit.

Key words: method, generalized algorithm, finite integral transformations, multicomponent ability, biorthogonality, special decomposition, vector-functions, boundary value problems, self-adjoint, non-self adjointness, hyperbolic equations, solution existence, convergency, singularity, integrality, cylindrical shell, tri-plyes, refined theory, closed solution.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Известно [1, 2], что обычная процедура разложения по собственным функциям представляет эффективный математический аппарат решения линейных краевых задач математической физики. Действительно, в результате разделения переменных, в соответствии с методом Фурье, формируется задача на собственные значения. Окончательное решение записывается в виде спектральных разложений в сходящихся рядах, а для бесконечных областей — в интегральной форме [3] по найденной таким образом системе собственных функций. Следует отметить, что необходимое при этом условие обобщенной ортогональности собственных функций ограничило возможности применения этого метода таким классом задач, математические модели которых порождались самосопряженными дифференциальными операторами.

Более простая процедура построения решений в аналогичной форме основывалась на конечных интегральных преобразованиях (КИП) с наперед заданными ядровыми функциями, представляющими частные решения однородной краевой задачи Штурма – Лиувилля [4] (преобразования Фурье, Ханкеля, Лежандра). Вместе с тем такой подход при всей своей простоте оказался весьма ограниченным, так как ядра преобразований в этом случае выбирались априори в зависимости от вида канонических областей и соответствующих им координатных поверхностей, операторов дифференциальных уравнений и краевых условий задачи. Вследствие этого, результаты были получены для относительно простых граничных условий.

При исследовании краевых задач желательно сохранить относительный произвол выбора компонентов, входящих в формулу обращения КИП, т.е. конструировать конечные интегральные преобразования в процессе их решения. Такой алгоритм, в процедуре которого предусматривалось определение ядра преобразования при решении скалярных краевых задач¹, был применен в книге [5], и изложен в руководстве [2].

В работе автора [6], в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом, построено обобщенное, а в статье [7] — многокомпонентное КИП, и сформулирован матричный структурный алгоритм, предназначенный для решения самосопряженных краевых задач, описываемых системами линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными (постоянными) коэффициентами. Здесь же приведено вырожденное КИП с различным числом компонент ядровой вектор-функции в выражении трансформанты и формуле обращения. В монографии [6] и статье [8] доказана сходимости и единственность представлений, определяемых формулой обращения введенных КИП, а в [9] сформулированы условия, при которых рассматриваемый метод тождественен процедуре Бубнова – Галеркина. Процедурная часть структурного метода предусматривает при этом определение всех компонентов решения (трансформанты-изображения, вектор-функции ядра, матрицы весовых функций, соотношения обобщенной ортогональности).

Метод КИП и его структурный алгоритм получил дальнейшее развитие, связанное с необходимостью решения несамосопряженных начально-краевых задач, описываемых несимметричными системами дифференциальных уравнений. Для этой цели в работах автора [10, 11] в метрике пространства \bar{L}_2 был введен новый класс векторных КИП, основанный на многокомпонентном соотношении биортогональности собственных вектор-функций двух однородных краевых задач, связанных известным тождеством Лагранжа [12]. Здесь же приведено доказательство интегральной сходимости и единственности построенного биортогонального КИП и сформулирован обобщенный структурный алгоритм, в процедуре которого выделяются две системы собственных вектор-функций, определяющих ядра КИП².

Эффективность структурного метода КИП продемонстрирована на примерах построения замкнутых решений целого ряда сложных начально-краевых задач механики, например [6, 7, 10, 11, 13–19]. Обстоятельный обзор, посвященный основным этапам развития метода КИП и перспективам его применения при решении краевых задач механики и математической физики приведен в работе автора [20].

¹Скалярными являются такие краевые задачи, математические модели которых представляют одно разрешающее дифференциальное уравнение для скалярной функции.

²Наряду с биортогональными в работе [13] построены несимметричные интегральные преобразования, порождаемые пучками несамосопряженных дифференциальных операторов, описывающих диссипативные свойства рассматриваемых математических моделей.



Существенным моментом рассматриваемого алгоритма метода КИП является процедура выделения сопряженного оператора, что позволяет в дальнейшем построить две независимых системы собственных вектор-функций, определяющих структуру решения.

Все отмеченное выше подчеркивает тот факт, что наступило время, когда необходимо разобраться и определить то место, которое занимает метод КИП при исследовании краевых и начально-краевых задач математической физики. Настоящая работа и посвящена этому важному вопросу.

1. ИССЛЕДУЕМАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Будем рассматривать в области $D = \{[a, b] \times [0, T]\}$, $T < \infty$ начально-краевую задачу в стандартной форме [21]³:

$$A[\bar{U}(x, t)] - H \frac{\partial^2 \bar{U}(x, t)}{\partial t^2} = \bar{f}(x, t), \quad (1.1)$$

$$l_a \frac{\partial \bar{U}(x, t)}{\partial x} + C_a \bar{U}(x, t) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \frac{\partial \bar{U}(x, t)}{\partial x} + C_b \bar{U}(x, t) = 0 \quad \text{при } x = b, \quad (1.2)$$

$$\bar{U}(x, t) = \bar{U}_0(x), \quad \frac{\partial \bar{U}(x, t)}{\partial t} = \dot{\bar{U}}_0(x) \quad \text{при } t = 0. \quad (1.3)$$

Здесь

$$A[\bar{U}(x, t)] = \sum_{r=0}^2 a_r(x) \frac{\partial^{2-r} \bar{U}(x, t)}{\partial x^{2-r}}, \quad (1.4)$$

$f(x, t)$, $\bar{U}_0(x)$, $\dot{\bar{U}}_0(x)$, $\bar{U}(x, t)$ — соответственно заданные и искомая вектор-функции размерности $(m \times 1)$, т.е. $\bar{f}(x, t)$, $\bar{U}_0(x)$, $\dot{\bar{U}}_0(x)$, $\bar{U}(x, t) \in R^m$, $x \in I = [a, b]$, $t \in [0, T]$, $a_r(x)$, l_a , l_b , C_a , C_b — матрицы размерностью $(m \times m)$, элементы которых l_{ks}^a , l_{ks}^b , C_{ks}^a , C_{ks}^b ($k, s = 1, \dots, m$), причем l_a , l_b — невырожденные, $H = E$ — единичная матрица той же размерности. Элементы $a_{ks}^r(x)$ ($k, s = 1, \dots, m$) матриц $a_r(x)$ — соответствующее число раз непрерывно дифференцируемые функции.

Система уравнений (1.1) с диагональной матрицей H путем умножения на H^{-1} приводится к соответствующей системе, когда $H = E$. Этот случай и рассматривается ниже (см. пример разд. 5), хотя в общем H может быть и недиагональной матрицей.

Решение $\bar{U}(x, t)$ задачи строится в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом по переменной x и дважды дифференцируемых по переменной t , т.е. $\bar{U}(x, t)$ и $\bar{f}(x, t)$ принадлежат пространству $\bar{L}_2(I)$ с метрикой, определяемой скалярным произведением

$$(\bar{U}, \bar{W})_p = \int_a^b (p\bar{U})^T \bar{W} dx = \int_a^b \bar{U}^T p\bar{W} dx, \quad (1.5)$$

где $\bar{W} \in \bar{L}_2(I)$, а $p(x)$ — симметричная матрица весовых функций $(m \times m)$, т.е.

$$p(x) = p^T(x). \quad (1.6)$$

Здесь T — знак транспонирования.

Соотношения (1.1) представляют гиперболическую систему линейных дифференциальных уравнений, а (1.2), (1.3) — соответствующие краевые (граничные и начальные) условия.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ ПРИ УДОВЛЕТВОРЕНИИ УСЛОВИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Рассмотрим решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) так, как это принято в классическом методе разложения по собственным вектор-функциям, в два этапа.

а) сначала определяются собственные значения и собственные функции из соответствующей (1.1) - (1.2) однородной краевой задачи, т.е.

$$A\bar{U}_*(x, t) - E \frac{\partial^2 \bar{U}_*(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

³В случае, когда граничные условия неоднородные, линейная краевая задача всегда может быть приведена к стандартной форме [21]. Многочисленные примеры такого приведения содержатся в работах автора, например [15, 19].



и условий (1.2), сформулированных для $\bar{U}_*(x, t)$. Используя процедуру разделения переменных, вводим представление

$$\bar{U}_*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) T_i(t), \quad (2.2)$$

где $T_i(t)$ — дважды дифференцируемая скалярная, а $\bar{\vartheta}_i(x)$ — вектор-функция из $\bar{L}_2(I)$ размерности $(m \times 1)$.

В результате подстановки (2.2) в равенства (2.1), (1.2) имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x) \right] T_i(t) - E \bar{\vartheta}_i(x) \ddot{T}_i(t) \right\} = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left[l_a \bar{\vartheta}_i'(x) T_i(t) + C_a \bar{\vartheta}_i(x) T_i(t) \right] &= 0 \quad \text{при } x = a, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left[l_b \bar{\vartheta}_i'(x) T_i(t) + C_b \bar{\vartheta}_i(x) T_i(t) \right] &= 0 \quad \text{при } x = b. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(Здесь штрих означает производную по x , а точка берется по t .)

Если представить матрицу-столбец $\bar{\vartheta}_i(x)$ в виде диагональной $\text{diag } \bar{\vartheta}_i(x)$ размерности $(m \times m)$ и обратить ее:

$$\bar{\vartheta}_i^{-1}(x) = \left\| \begin{array}{ccc} \vartheta_{1i}^{-1}(x) & 0 \dots & 0 \\ 0 & \vartheta_{2i}^{-1}(x) \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \vartheta_{mi}^{-1}(x) \end{array} \right\|,$$

то после умножения (2.3) на $E^{-1} \bar{\vartheta}_i^{-1}(x) T_i^{-1}(t)$, ($T_i(t) \neq 0$) и введения параметров разделения λ_i , немедленно получаем для каждого i такое соотношение:

$$\left[a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x) \right] E^{-1} \bar{\vartheta}_i^{-1}(x) = \ddot{T}_i(t) T_i^{-1}(t) = -\lambda_i^2, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (2.5)$$

Соответственно из (2.4) находим:

$$l_a \bar{\vartheta}_i'(x) + C_a \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \bar{\vartheta}_i'(x) + C_b \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = b. \quad (2.6)$$

Равенство (2.5) позволяет сформулировать два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\ddot{T}_i(t) + \lambda_i^2 T_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (2.7)$$

$$a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + [a_2(x) + \lambda_i^2 E^{-1}] \bar{\vartheta}_i(x) = 0. \quad (2.8)$$

Решение первого из них (2.7) представляется в виде

$$T_i(t) = T_i^{(1)}(t) = A_i \cos \lambda_i t + B_i \sin \lambda_i t. \quad (2.9)$$

Замечание 1. Подробно определение функции $T_i(t)$ приводится на втором этапе решения.

Уравнение (2.8) совместно с граничными условиями (2.6) представляет однородную краевую задачу на собственные значения. Если система уравнений интегрируемая, то считая известными ее частные решения

$$\psi_1^i(x), \psi_2^i(x), \dots, \psi_{2m}^i(x), \quad (2.10)$$

формируется квадратная $(2m \times 2m)$ матрица $\Lambda_i(x)$, элементы которой $\psi_{ln}^i(x)$ ($l, n = 1, \dots, 2m$) представляют линейные комбинации (2.10) [12]. Вектор-функция $\bar{\vartheta}_i(x)$ теперь определяется таким равенством:

$$\bar{\vartheta}_i(x) = \Lambda_i(x) \times \bar{C}^i, \quad (2.11)$$

где

$$\left(\bar{C}^i \right)^T = \| C_1^i C_2^i \dots C_{2m}^i \| ^T \quad (2.12)$$

— матрица-столбец произвольных постоянных интегрирования.



Собственные значения λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) простого спектра и произвольные постоянные (2.12) находятся путем подстановки выражения (2.11) в граничные условия (2.6):

$$\left\| \begin{array}{l} \left[l_a \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_a \Lambda_i(x) \right]_{x=a} \\ \left[l_b \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_b \Lambda_i(x) \right]_{x=b} \end{array} \right\| \times \overline{C}^i = 0. \quad (2.13)$$

Разыскивая нетривиальные решения полученной однородной системы алгебраических уравнений (2.13), приравняем ее главный детерминант к нулю. Имеем:

$$D(\lambda_i) = \left| \begin{array}{l} \left[l_a \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_a \Lambda_i(x) \right]_{x=a} \\ \left[l_b \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_b \Lambda_i(x) \right]_{x=b} \end{array} \right| = 0. \quad (2.14)$$

Равенство (2.14) представляет собой трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_i . Имея в виду, что дефект матрицы (2.13) равен единице, составляем $(2m - 1)$ уравнение системы, из которой выражаются постоянные $C_1^i, C_2^i, \dots, C_{2m-1}^i$ через C_{2m}^i . Это возможно, поскольку при условии простоты спектра оператора A полученная система уравнений $(2m - 1)$ порядка невырождена [22]⁴. Принимая без потери общности рассуждений, что последний элемент \overline{C}_{2m}^i вектора \overline{C}^i равен, например, единице, определяем окончательно все компоненты \overline{C}^i ⁵. В соответствии с (2.10), (2.11) тем самым построена система собственных вектор-функций $\overline{\vartheta}_i(x)$.

б) на втором этапе переходим к решению неоднородной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3). Для этой цели сформулируем сначала два утверждения.

Теорема 1. Если весовая матрица $p(x)$ является частным решением дифференциального уравнения:

$$2(pa_0)' - pa_1 - a_1^T p = 0, \quad (2.15)$$

а матрицы $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ и $l(x)|_{x=a,b}, c(x)|_{x=a,b}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{array}{l} 1) a_0^T p = pa_0; \\ 2) (pa_1 - a_1^T p)' = 2(pa_2 - a_2^T p); \\ 3) \{(pa_0)' - pa_1 - pa_0 \Gamma + \Gamma^T pa_0\}|_{x=a,b} = 0; \quad \Gamma = \Gamma|_{x=a,b} = -l^{-1}c|_{x=a,b}, \end{array} \quad (2.16)$$

то собственные вектор-функции $\{\overline{\vartheta}_i(x)\}, i = \overline{1, \infty}$ образуют обобщенно ортогональную систему в метрике (1.5), т. е.

$$(\overline{\vartheta}_i, \overline{\vartheta}_j)_p = \int_a^b \overline{\vartheta}_i^T(x) p(x) \overline{\vartheta}_j(x) dx = \delta_i^j \|\overline{\vartheta}_i(x)\|^2. \quad (2.17)$$

Здесь $\overline{\vartheta}_i(x) = \overline{\vartheta}(\lambda_i, x), \overline{\vartheta}_j(x) = \overline{\vartheta}(\lambda_j, x),$

$$\|\overline{\vartheta}_i\|^2 = \int_a^b \overline{\vartheta}_i^T(x) p(x) \overline{\vartheta}_i(x) dx \quad (2.18)$$

— квадрат нормы собственных вектор-функций $\overline{\vartheta}_i(x)$, а δ_i^j — символ Кронекера.

Доказательство. Представим дифференциальные уравнения (2.8) для индексов i и j в следующем виде:

$$\left(\overline{\vartheta}_i^T\right)'' a_0^T + \left(\overline{\vartheta}_i^T\right)' a_1^T + \overline{\vartheta}_i^T a_2^T - \lambda_i^2 \overline{\vartheta}_i^T = 0, \quad a_0 \overline{\vartheta}_j'' + a_1 \overline{\vartheta}_j' + a_2 \overline{\vartheta}_j - \lambda_j^2 \overline{\vartheta}_j = 0.$$

⁴В дальнейшем все рассуждения проводятся по отношению к простой точке спектра λ_i оператора A и это не оговаривается. Случай кратного спектра рассматривается в работах [13, 18].

⁵В общем случае собственные функции могут определяться с точностью до постоянной C_{2m}^i , что не влияет на дальнейшее решение.



Умножая теперь первое из них справа на $p\bar{\vartheta}_j dx$, а второе соответственно слева на $\bar{\vartheta}_i^T p dx$, интегрируя полученные равенства на сегменте $I = [a, b]$, выполняем затем квадратуры по частям и вычитаем из первого результата второй. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T p \bar{\vartheta}_j dx &= \left\{ \left(\bar{\vartheta}_i^T \right)' p a_0 \bar{\vartheta}_j - \bar{\vartheta}_i^T p a_0 \bar{\vartheta}_j' + \bar{\vartheta}_i^T [(p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}_j \right\} \Big|_{x=a,b} + \\ &+ \int_a^b \left(\bar{\vartheta}_i^T \right)'' [a_0^T p - p a_0] \bar{\vartheta}_j dx + \int_a^b \left(\bar{\vartheta}_i^T \right)' [p a_1 + a_1^T p - 2(p a_0)'] \bar{\vartheta}_j dx + \\ &+ \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T [a_2^T p - p a_2 + (p a_1)' - (p a_0)''] \bar{\vartheta}_j dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из граничных условий (2.6) следует:

$$\bar{\vartheta}_j' \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{\vartheta}_j \Big|_{x=a,b}, \quad \left(\bar{\vartheta}_i^T \right)' \Big|_{x=a,b} = \bar{\vartheta}_i^T \Gamma^T \Big|_{x=a,b}, \quad (2.20)$$

где

$$\Gamma = -l^{-1} c \Big|_{x=a,b}. \quad (2.21)$$

Учитывая соотношения (2.20), внеинтегральные члены в правой части равенства (2.19) принимают следующий вид:

$$\left\{ \bar{\vartheta}_i^T [\Gamma^T p a_0 - p a_0 \Gamma + (p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}_j \right\} \Big|_{x=a,b}. \quad (2.22)$$

Очевидно, что когда $i \neq j$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$) правая часть выражения (2.19) при наличии (2.22) обращается в нуль, если выполняются равенства (2.15), (2.16). Следует отметить, что соотношение

$$a_2^T p - p a_2 + (p a_1)' - (p a_0)'' = 0$$

тождественно совпадает со вторым равенством (2.16), если принять во внимание уравнение (2.15). Теорема доказана.

Вводим непрерывную переменную $\eta \in [a, b]$, полагая при этом, что на счетном множестве $i = \overline{1, \infty}$, $\eta = \eta_i = \xi_i$, причем $\xi_i = \lambda_i^2$, $\xi_j = \lambda_j^2$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1, если λ_i — простая точка спектра оператора A , квадрат нормы его собственной вектор-функции $\bar{\vartheta}_i(x)$ определяется выражением

$$\|\bar{\vartheta}_i(x)\|^2 = (\bar{\vartheta}_i, \bar{\vartheta}_i)_p = \left\{ \left[\bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) S \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x \partial \eta} - \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) T \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\xi_i} \right\} \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (2.23)$$

Доказательство. При условиях (2.15), (2.16) теоремы 1 в случае, когда $i = j$ ($\lambda_i = \lambda_j$) из (2.19) следует, что интеграл (2.18) обращается в неопределенность $0/0$. Преобразуем выражение (2.19), имея в виду (2.20):

$$\begin{aligned} (\bar{\vartheta}_i, \bar{\vartheta}_i)_p &= \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T p \bar{\vartheta}_i dx = (\xi_i - \xi_j)^{-1} \left\{ \left(\bar{\vartheta}_i^T \right)' p a_0 \bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_i^T p a_0 \bar{\vartheta}_i' + \bar{\vartheta}_i^T [(p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}_i \right\} \Big|_{x=a,b} = \\ &= (\xi_i - \eta)^{-1} \left\{ \bar{\vartheta}_i^T [\Gamma^T p a_0 + (p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}(\eta, x) - \bar{\vartheta}_i^T p a_0 \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x} \right\} \Big|_{x=a,b}. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$T = (p a_0)' + \Gamma^T p a_0 - p a_1, \quad S = p a_0,$$

а затем перейти к пределу при $\eta = \eta_i \rightarrow \xi_i$ и применить правило Лопиталья, то в результате находим

$$\|\bar{\vartheta}_i(x)\|^2 = \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T p \bar{\vartheta}_i dx = \lim_{\eta \rightarrow \xi_i} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) T \bar{\vartheta}(\eta, x) - \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) S \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x} \right\} \Big|_{x=a,b}}{\frac{\partial}{\partial \eta} (\xi_i - \eta)}$$



$$= \left\{ \left[\bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) S \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x \partial \eta} - \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) T \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\xi_i} \right\}_{x=a}^{x=b},$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат является исключительно важным. Действительно, поскольку система (1.1) (точнее, (2.8)) представляет дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, то, как правило, решение $\bar{\vartheta}_i(x)$ или $\psi_1^i(x), \psi_2^i(x), \dots, \psi_{2m}^i(x)$ соответствующих начально-краевых задач выражается в специальных функциях. В силу этого операция непосредственного интегрирования при вычислении нормы $\|\bar{\vartheta}_i\|$ является весьма затруднительной. Однако эта процедура становится всегда выполнимой, так как в соответствии с (2.23) определение $\|\bar{\vartheta}_i\|^2$ сводится к простому дифференцированию. Следует отметить, что полученные результаты имеют самостоятельное значение и могут оказаться полезными при вычислении интегралов от специальных функций [23–25], причем в [25] квадрат нормы определяется методом возмущений.

Возвращаемся теперь к начально-краевой задаче (1.1)–(1.3). Разложим сначала правые части $\bar{f}(x, t), \bar{U}_0(x), \dot{\bar{U}}_0(x)$ уравнений (1.1), (1.3) по найденной выше обобщенно ортогональной системе функций $\{\bar{\vartheta}_i(x)\}$, т.е. представим их в виде

$$\bar{f}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^*(t) \bar{\vartheta}_i(x), \quad \bar{U}_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\vartheta}_i(x), \quad \dot{\bar{U}}_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \bar{\vartheta}_i(x), \quad (2.24)$$

где $F_i^*(t), \alpha_i, \beta_i$ — скалярные величины.

Составляем теперь скалярные произведения в метрике (1.5), учитывая при этом (2.17). Имеем

$$\begin{aligned} (\bar{\vartheta}_j, \bar{f})_p &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) F_i^*(t) \bar{\vartheta}_i(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^*(t) \int_a^b \bar{\vartheta}_j(x) p(x) \bar{\vartheta}_i(x) dx = \\ &= F_i^*(t) \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) \vartheta_j(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично

$$(\bar{\vartheta}_j, \bar{U}_0)_p = \alpha_j \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) \bar{\vartheta}_j(x) dx, \quad (\bar{\vartheta}_j, \dot{\bar{U}}_0)_p = \beta_j \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) \bar{\vartheta}_j(x) dx.$$

Возвращаясь к индексу i и принимая во внимание (2.18), окончательно находим:

$$F_i^*(t) = F(\lambda_i, t) \|\vartheta_i\|^{-2}, \quad \alpha_i = W_0(\lambda_i) \|\vartheta_i\|^{-2}, \quad \beta_i = \dot{W}_0(\lambda_i) \|\vartheta_i\|^{-2}. \quad (2.25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(\lambda_i, t) &= \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T(x) p(x) \bar{f}(x, t) dx, \quad W_0(\lambda_i) = \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T(x) p(x) \bar{U}_0(x) dx, \\ \dot{W}_0(\lambda_i) &= \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T(x) p(x) \dot{\bar{U}}_0(x) dx. \end{aligned}$$

В соответствии с процедурой разделения переменных принимаем, как и выше (2.2), вектор-функцию $\bar{U}(x, t)$ в виде спектрального разложения по собственным вектор-функциям $\{\bar{U}_i(x)\}$:

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) T_i^*(t). \quad (2.26)$$

Подстановка выражений (2.24), (2.26) в систему дифференциальных уравнений (1.1) и краевые условия (1.2), (1.3) приводит к таким соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x) \right] T_i^*(t) - E \bar{\vartheta}_i(x) \dot{T}_i^*(t) - \bar{\vartheta}_i(x) F_i^*(t) \right\} = 0, \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[l_a \bar{\vartheta}_i'(x) + c_a \bar{\vartheta}_i(x) \right] T_i^*(t) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad (2.28)$$



$$\sum_{i=1}^{\infty} [l_b \bar{\vartheta}'_i(x) + c_b \bar{\vartheta}_i(x)] T_i^*(t) = 0 \quad \text{при } x = b, \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) [T_i^*(t) - \alpha_i] = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) [\dot{T}_i^*(t) - \beta_i] = 0. \quad (2.31)$$

Принимая во внимание выражение (2.5), равенства (2.27)–(2.31) для каждого i записываются следующим образом:

$$\ddot{T}_i^*(t) + \lambda_i^2 T_i^*(t) = -F_i^*(t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (2.32)$$

$$T_i^*(t) = \alpha_i, \quad \dot{T}_i^*(t) = \beta_i \quad \text{при } t = 0, \quad (2.33)$$

$$l_a \bar{\vartheta}'_i(x) + c_a \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \bar{\vartheta}'_i(x) + c_b \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = b. \quad (2.34)$$

Граничные условия (2.34) естественно совпадают с (2.6).

Рассматриваем сначала задачу Коши (2.32), (2.33). Имея в виду общее решение (2.9) соответствующего (2.32) однородного дифференциального уравнения и определяя затем его частное решение методом вариации произвольных постоянных при начальных условиях (2.33) и соотношениях (2.25), окончательно находим:

$$T_i^*(t) = \|\vartheta_i\|^{-2} \left[W_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{W}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right]. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.5), точнее (2.8), совместно с граничными условиями (2.34) представляет задачу определения собственных значений λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) (2.14) и собственных функций $\bar{\vartheta}_i(x)$ (2.11)–(2.13).

Располагая компонентами $T_i^*(t)$ и λ_i , $\bar{\vartheta}_i(x)$ (2.11)–(2.14), (2.35), разложение (2.26) и представляет теперь общее решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Полнота, сходимости и единственность построенного решения, т.е. разложения (2.26) будут обсуждаться в следующем разделе статьи, а его существование следует из сформулированной ниже теоремы.

Теорема 3. Если $\{\bar{\vartheta}_i(x)\}$, λ_i , ($i = \overline{1, \infty}$) – собственные вектор-функции и соответствующие им собственные значения однородной краевой задачи (2.8), (2.34), а $T_i^*(t)$ представляют общее решение счетного множества задач Коши (2.32), (2.33), то разложение (2.26) является решением начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Доказательство. Полагая $T_i^*(t)$ и $\bar{\vartheta}_i(x)$ соответствующее число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов, подставляем разложение (2.26) в левые части равенств (1.1)–(1.3). Принимая во внимание при этом соотношения (2.8), (2.24), (2.32), (2.33), (2.34). В результате получаем:

$$A [\bar{U}(x, t)] - E \frac{\partial^2 \bar{U}(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x)] T_i^*(t) - E \bar{\vartheta}_i(x) \dot{T}_i^*(t) \right\} = - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) [\ddot{T}_i^*(t) + \lambda_i^2 T_i^*(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) F_i^*(t) = \bar{f}(x, t),$$

что и требовалось доказать.

При $x = a, b$

$$\left[l_{a,b} \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, t) + c_{a,b} \bar{U}(x, t) \right] \Big|_{x=a,b} = \sum_{i=1}^{\infty} [l_{a,b} \bar{\vartheta}_i'(x) + c_{a,b} \bar{\vartheta}_i(x)] \Big|_{x=a,b} T_i^*(t) = 0,$$

при $t = 0$

$$\bar{U}(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) T_i^*(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) \alpha_i = \bar{U}_0(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(x, t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) \dot{T}_i^*(t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) \beta_i = \dot{\bar{U}}_0(x),$$

что и требовалось показать. Теорема доказана.



3. СТРУКТУРНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КИП ПРИМЕНИТЕЛЬНО К САМОСОПРЯЖЕННЫМ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Рассмотрим решение структурным методом КИП начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в случае, когда дифференциальный оператор A является самосопряженным. Метод КИП назван так в связи с тем, что все компоненты получающейся структуры решения этим способом определяются непосредственно в процессе применения алгоритмической процедуры без какой-либо априорной информации. Вектор-матричные КИП были введены и математически обоснованы в работах автора [6–8, 10, 11, 13, 20]. Здесь же был сформулирован структурный матричный алгоритм метода, предназначенный для решения задач математической физики, описываемых системами линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Выбор того или иного КИП определяется видом матрицы H рассматриваемой математической модели. В случае, когда матрица H системы (1.1) является диагональной, справедливо следующее представление [6]:

$$\varphi(\lambda_i, t) = \int_a^b [p\bar{U}(x, t)]^T \bar{G}(\lambda_i, t) dx = \int_a^b \bar{U}^T(x, t)p(x)\bar{G}(\lambda_i, t) dx, \quad (3.1)$$

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t)\bar{G}(\lambda_i, t)\|G_i\|^{-2}, \quad \|G_i\|^2 = \int_a^b \bar{G}^T(\lambda_i, x)p(x)\bar{G}(\lambda_i, x) dx. \quad (3.2)$$

Равенство (3.1) определяет прямое КИП на сегменте $I = [a, b]$ (трансформанту), а (3.2) соответственно формулу обращения, справедливую при выполнении обобщенного соотношения ортогональности (2.17):

$$\int_a^b \bar{G}^T(\lambda_i, x)p(x)\bar{G}^T(\lambda_j, x) dx = \delta_i^j \|G_i\|^2. \quad (3.3)$$

Здесь $\|G_i\|$ — норма ядра преобразования, $\bar{G}^T(\lambda_i, x)$, $p(x)$ — весовая положительно-определенная функция, заданная диагональной матрицей $(m \times m)$.

Вектор-функции размерности $(m \times 1)$ $\{\bar{U}(x, t), \bar{G}(\lambda_i, x)\} \in \bar{L}_2(I)$, т.е. принадлежат сепарабельному пространству $\bar{L}_2(I)$ с метрикой (1.5) и определены в области $D = \{I \times t > 0\}$, λ_i , $(i = \overline{1, \infty})$ — параметры, образующие счетное множество.

Необходимо отметить, что для симметричной матрицы $p(x)$ (1.6) скалярное произведение является коммуникативным, т.е.

$$\int_a^b \bar{U}^T p \bar{G} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx. \quad (3.4)$$

В матрице H соответственно $p(x)$ ряд элементов могут оказаться нулевыми, т.е. не все уравнения (1.1) содержат производные по t . Интегральное преобразование (3.1), (3.2) в этом случае называется вырожденным [6]⁶.

Замечание 2. Следует иметь в виду, что все дальнейшее рассмотрение с некоторыми дополнениями в процедурной части метода справедливо также при исследовании начально-краевых задач (1.1) с симметричной матрицей H и соответственно $p(x)$ [7]. В этом случае конечное интегральное преобразование основано на расширенном по отношению к (3.3) соотношении ортогональности и существенно обобщает (3.1) и (3.2). Подобное КИП представляет многокомпонентное интегральное преобразование. Оно введено и подробно исследовано автором в работах [7, 8]. В разд. 5 настоящей статьи замкнутое решение начально-краевой задачи динамики для анизотропной трехслойной цилиндрической оболочки как раз и построено путем применения алгоритмической процедуры многокомпонентного КИП.

Применяем к дифференциальному уравнению (1.1) и начальным условиям (1.3) КИП (3.1) по переменной x , т.е. умножаем все члены на $\bar{G}^T(\lambda_i, x)p(x)$ и интегрируем в пределах $[a, b]$. Имеем

$$\begin{aligned} (\bar{G}, A[\bar{U}])_p - \left(\bar{G}, \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}\right)_p &= \int_a^b \bar{G}^T p a_0 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} dx + \int_a^b \bar{G}^T p a_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} dx + \int_a^b \bar{G}^T p a_2 \bar{U} dx - \\ &- E \int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{f} dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

⁶Однокомпонентное ($m = 1$) КИП является частным случаем (3.1), (3.2) и при заданных ядровых функциях из него следуют все известные интегральные преобразования с конечными пределами [4].



$$\int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U}_0 dx, \quad \int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \dot{\bar{U}}_0 dx \quad \text{при } t = 0. \quad (3.6)$$

Принимая во внимание непрерывность $\bar{U}(x, t)$ в D и существование частных производных $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}$ как непрерывных функций обеих переменных, справедливо представление

$$\int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx, \quad \int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx. \quad (3.7)$$

Интегрируя первые две квадратуры (3.5) по частям и учитывая равенства (3.7), (3.4), а также выражение для трансформанты (3.1), уравнение (3.5) и условия (3.6) принимают следующий вид:

$$\phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [p\bar{G}], \bar{U}) - E\dot{\varphi}(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{f}(x, t) dx, \quad (3.8)$$

$$\varphi(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U}_0 dx, \quad \dot{\varphi}(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{G}^T p \dot{\bar{U}}_0 dx \quad \text{при } t = 0. \quad (3.9)$$

Здесь A^* — сопряженное к A в метрике (1.5) дифференциальное выражение:

$$A^* [p\bar{G}] = (\bar{G}^T)'' pa_0 + (\bar{G}^T)' [2(pa_0)' - pa_1] + \bar{G}^T [(pa_0)'' - (pa_0)' + pa_2], \quad (3.10)$$

$\phi(\bar{G}, \bar{U})$ — билинейная форма вектор-функций \bar{U} и \bar{G} , т.е.

$$\phi(\bar{G}, \bar{U}) = \bar{G}^T pa_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \left\{ (\bar{G}^T)' pa_0 - \bar{G}^T [(pa_0)' - pa_1] \right\} \bar{U}. \quad (3.11)$$

Приведенная выше операция (3.5)–(3.11) структурного алгоритма метода КИП по существу представляет процедуру выделения сопряженного к A дифференциального оператора [12], что является не только важным конструктивным этапом в процессе решения начально-краевых задач, но позволяет также использовать свойства линейных дифференциальных операторов для более глубокого понимания сути метода разложения по собственным вектор-функциям.

Действительно, в результате применения КИП (3.1) из равенства (3.8) следует, что

$$(\bar{G}, A[\bar{U}])_p = \phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [p\bar{G}], \bar{U}). \quad (3.12)$$

С другой стороны, известно [12], что для сопряженного к A дифференциального оператора A^* справедливо тождество Лагранжа:

$$(\bar{G}, A[\bar{U}])_p = (\bar{G}^T, pA[\bar{U}]) = (A^* [p\bar{G}], \bar{U}). \quad (3.13)$$

Принимая во внимание коммутативность скалярного произведения (1.5), из (3.13) находим

$$(A^T [\bar{U}] p, \bar{G}) = (A^* [p\bar{G}], \bar{U}), \quad (3.14)$$

где

$$A^T [\bar{U}] p = (\bar{U}^T)'' a_0^T p + (\bar{U}^T)' a_1^T p + \bar{U}^T a_2^T p. \quad (3.15)$$

Таким образом, из операторного равенства (3.13), а точнее (3.14), следует, что дифференциальное выражение A является самосопряженным, если

$$A^T[\dots]p = A^*[p\dots]. \quad (3.16)$$

Подставляя соотношения (3.10), (3.15) в (3.16) немедленно получаем условия, при которых выражение A является самосопряженным. Имеем:

$$pa_0 = a_0^T p, \quad 2(pa_0)' - pa_1 = a_1^T p, \quad (pa_0)'' - (pa_1)' + pa_2 = a_2^T p. \quad (3.17)$$



Третье равенство (3.17) может быть преобразовано с помощью второго, и в этом случае соотношения (3.17) тождественно совпадают с (2.15), (2.16).

Сопоставляя операторные равенства (3.12) и (3.13), замечаем, что условием выделения сопряженного оператора A^* в процедуре структурного метода КИП является обращение в нуль билинейной формы (3.11) на концах интервала $x = a, b$, т.е.

$$1) \quad \phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b = \left\{ G^T p a_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \left[(\bar{G}^T)' p a_0 - \bar{G}^T ((p a_0)' - p a_1) \right] \bar{U} \right\} \Big|_a^b = 0. \quad (3.18)$$

Вторым условием, определяющим возможность разделения переменных в дифференциальном уравнении (1.1), является следующее операционное свойство:

$$2) \quad (A^* [p \bar{G}], \bar{U}) = \int_a^b \left\{ (\bar{G}^T)'' p a_0 + (+\bar{G}^T)' [2(p a_0)' - p a_1] + \right. \\ \left. + \bar{G}^T [(p a_0)'' - (p a_1)' + p a_2] \right\} \bar{U} dx = -\lambda_i^2 \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx. \quad (3.19)$$

По определению Л. Коллатца [26], равенство (3.19) приводит к одночленному классу краевых задач на собственные значения для ядровой вектор-функции $\bar{G}(\lambda_i, x)^7$. Следует отметить, что спектральный параметр λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) в равенстве (3.19) имеет размерность, обратную размерности переменной x , по которой осуществляется интегральное преобразование (3.1).

Самосопряженное дифференциальное выражение $A[\dots]$ представляет самосопряженный дифференциальный оператор, если у $A[\bar{U}]$ и $A^*[\bar{G}]$ совпадают области определения. Это значит, что помимо удовлетворения критериальных соотношений (3.13), (3.17) вектор-функции \bar{U} и \bar{G} должны подчиняться одним и тем же граничным условиям, т.е. аналогично (1.2) имеем

$$l_a \bar{G}'(\lambda_i, x) + c_a \bar{G}(\lambda_i, x) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \bar{G}'(\lambda_i, x) + c_b \bar{G}(\lambda_i, x) = 0 \quad \text{при } x = b. \quad (3.20)$$

Выражая из (1.2) $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$ и (3.20) \bar{G}' , получаем соответственно

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{U} \Big|_{x=a,b}, \quad \bar{G}' \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{G} \Big|_{x=a,b} \quad \text{или} \quad (\bar{G}^T)' \Big|_{x=a,b} = \bar{G}^T \Gamma^T \Big|_{x=a,b}. \quad (3.21)$$

В результате подстановки равенств (3.21) в (3.18) находим

$$\left\{ \bar{G}^T [p a_0 \Gamma - \Gamma^T p a_0 - (p a_0)' + p a_1] \bar{U} \right\} \Big|_a^b = 0.$$

Отсюда следует такое критериальное соотношение:

$$\left\{ (p a_0)' - p a_1 - p a_0 \Gamma + \Gamma^T p a_0 \right\} \Big|_{x=a,b} = 0, \quad (3.22)$$

которое полностью совпадает с третьим равенством (2.16).

Из равенств (3.17), (3.22) следует утверждение.

Теорема 4. Если выполняются условия (3.17), (3.22) для весовой матрицы p , матриц переменных коэффициентов a_r ($r = 0, 1, 2$) и матриц l_a, l_b, c_a, c_b , то A — самосопряженный дифференциальный оператор в \bar{L}_2 .

Аналогичная теорема приведена в статье автора [25]. Из теорем 1 и 4 вытекает такое следствие.

Собственные вектор-функции, порождаемые самосопряженным дифференциальным оператором A , образуют обобщенно ортогональную систему $\{\vartheta_i\}$.

Приведенные результаты (теоремы 1, 4 и следствие) представляют конструктивное подтверждение известных положений спектральной теории линейных дифференциальных операторов [12, 22, 28].

⁷Решение начально-краевой задачи методом КИП с использованием в операторном равенстве (3.19) полиномиального пучка приведено в работе автора [27].



Продолжая решение, наряду с (3.18), воспользуемся теперь вторым условием (3.19). Тогда дифференциальное уравнение (3.8) и равенства (3.9) образуют счетное множество задач Коши для трансформанты $\varphi(\lambda_i, t)$, т.е.

$$\ddot{\varphi}(\lambda_i, t) + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = F(\lambda_i, t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (3.23)$$

$$\varphi(\lambda_i, t) = W_0(\lambda_i), \quad \dot{\varphi}(\lambda_i, t)|_{t=0} = \dot{W}_0(\lambda_i). \quad (3.24)$$

Здесь $F(\lambda_i, t)$, $W_0(\lambda_i)$, $\dot{W}_0(\lambda_i)$ – трансформанты соответствующих функций:

$$F(\lambda_i, t) = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \overline{f}(x, t) dx, \quad (3.25)$$

$$W_0(\lambda_i) = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \overline{U}_0(x) dx, \quad \dot{W}_0(\lambda_i) = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \dot{\overline{U}}_0(x) dx.$$

С другой стороны, операционное свойство позволяет сформулировать дифференциальное уравнение для ядровой вектор-функции $\overline{G}(\lambda_i, x)$. Имеем

$$\left(\overline{G}^T\right)'' pa_0 + \left(\overline{G}^T\right)' [2(pa_0)' - pa_1] + \left(\overline{G}^T\right) [2(pa_0)'' - (pa_1)' + pa_2 + \lambda_i^2 p] = 0. \quad (3.26)$$

Подставляя в (3.26) равенства (3.17), транспонируя затем полученное матричное уравнение и учитывая, что $p(x)$ – неособенная матрица, находим:

$$a_0(x) \overline{G}''(\lambda_i, x) + a_1(x) \overline{G}'(\lambda_i, x) + [a_2(x) + \lambda_i^2] \overline{G}(\lambda_i, x) = 0. \quad (3.27)$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача (1.1)–(1.3) распалась на две подзадачи, а именно (3.23), (3.24) для трансформанты $\varphi(\lambda_i, t)$ и (3.20), (3.27) для вектор-функции ядра преобразования $\overline{G}(\lambda_i, x)$, т.е. произошло разделение переменных. Однородное дифференциальное уравнение (3.27) и соответствующие граничные условия (3.20) представляют краевую задачу определения собственных значений λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) и собственных функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$. Замечаем, что она с точностью до обозначений тождественно совпадает с (2.8), (2.34), а задача (3.23), (3.24) при наличии связей (2.25) – с (2.32), (2.33). Решения обеих подзадач подробно рассмотрены во втором разделе статьи. Располагая функциями $\varphi(\lambda_i, t)$, $\overline{G}(\lambda_i, x)$ и параметрами λ_i ($i = \overline{1, \infty}$), по формуле обращения (3.2) определяется искомое решение, т.е.

$$\overline{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[W_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{W}_0(\lambda_i) \lambda_1^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_1^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right] \overline{G}(\lambda_i, x) \|G_i\|^{-2}. \quad (3.28)$$

Приведенные в разд. 2,3 результаты позволяют утверждать, что общее решение рассматриваемой начально-краевой задачи, построенное методами классического разложения по собственным вектор-функциям (2.26) и конечных интегральных преобразований (3.28), в случае, когда оператор A является самосопряженным, тождественно совпадают. Существование построенного решения (3.2) обосновано теоремой 3.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. Если трансформанты $\varphi(\lambda_1, t)$, $\varphi(\lambda_2, t)$, $\varphi(\lambda_3, t)$, ... являются ограниченными функциями, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_i, t)|^2 < \infty, \quad (3.29)$$

то существует вектор-функция $\overline{U}(x, t) \in \overline{L}_2$ такая, что $\varphi(\lambda_i, t)$ ($i = \overline{1, \infty}$) представляют коэффициенты Фурье соответствующего (3.2) ортонормального разложения и для нее справедливо условие замкнутости:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|\overline{S}_l - \overline{U}\| = 0,$$

т.е. ряд сходится в среднем квадратичном, а функция $\overline{U}(x, t)$, определяемая рядом (3.2), является единственной.



Здесь $\bar{S}_l(x, t)$ — частная сумма, т.е.

$$\bar{S}_l(x, t) = \sum_{i=1}^l \varphi(\lambda_i, t) \bar{K}(\lambda_i, x),$$

$\bar{K}(\lambda_i, x)$ — нормированные собственные функции ядра преобразования

$$\bar{K}(\lambda_i, x) = \bar{G}(\lambda_i, x) \|G_i\|^{-1},$$

$\|G_i\|$ — норма ядровой вектор-функции, определяемая по формуле (2.23).

Подробное доказательство теоремы приведено в работе [8]. По существу, она представляет обобщенный векторный аналог известной теоремы Рисса – Фишера [29]. Поточечная сходимость разложения (3.28) зависит от вида вектор-функции $\bar{f}(x, t)$.

Замечание 3. В статье автора [30] приводится доказательство аналогичной теоремы разложения по собственным вектор-функциям для линейных дифференциальных операторов динамической теории упругости.

Для частного случая весовой матрицы $p(x)$ легко формулируется конструктивное условие полноты ядровых вектор-функций $\bar{G}(\lambda_i, x)$ или $\bar{K}(\lambda_i, x)$.

Теорема 6. В случае, когда весовая матрица вырождается в скаляр $p(x) = p_0(x)E$, то собственные ядровые вектор-функции $\bar{K}(\lambda_i, x)$ ортонормального разложения, определяемого формулой обращения КИП

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, x) \bar{K}(\lambda_i, x), \quad (3.30)$$

образуют полную систему, если выполняется соотношение

$$p_0(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \bar{K}(\lambda_i, x_1) K(\lambda_i, x_1) = \delta(x_1 - x). \quad (3.31)$$

Доказательство. При доказательстве, следуя [31], используем физические представления для построенного решения. Для скалярной функции $p(x)$ трансформанта $\varphi(\lambda_i, t)$ записывается в виде

$$\varphi(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{K}^T(\lambda_i, x) p(x) \bar{U}(x, t) dx = \int_a^b p_0(x) \bar{U}^T(x, t) \bar{K}(\lambda_i, x) dx. \quad (3.32)$$

Искомая вектор-функция (3.30) может рассматриваться как отклик (реакция) в точке x на сосредоточенное воздействие, приложенное в точке x_1 . Тогда разложение (3.30) с учетом выражения (3.32) представляется следующим образом:

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^b p_0(x_1) \bar{U}^T(x_1, t) \bar{K}(\lambda_i, x_1) dx \right] \bar{K}(\lambda_i, x).$$

Транспонируя это равенство, имеем

$$\bar{U}^T(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^b p_0(x_1) \bar{U}^T(x_1, t) \bar{K}(\lambda_i, x_1) dx \right] \bar{K}^T(\lambda_i, x). \quad (3.33)$$

С другой стороны, принимая во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$\bar{U}(x, t) = \int_a^b \bar{U}(x_1, t) \delta(x_1 - x) dx \quad \text{или} \quad \bar{U}^T(x, t) = \int_a^b \bar{U}^T(x_1, t) \delta(x_1 - x) dx, \quad (3.34)$$

где $\delta(\dots)$ — дельта-функция П.А. Дирака.

Приравнявая выражения (3.33) и (3.34), находим

$$\int_a^b \bar{U}^T(x_1, t) p_0(x_1) dx \sum_{i=1}^{\infty} \bar{K}(\lambda_i, x_1) \cdot \bar{K}(\lambda_i, x) = \int_a^b \bar{U}^T(x_1, t) \delta(x_1 - x) dx.$$

Откуда немедленно следует соотношение (3.31), что и требовалось показать.



4. ОБОБЩЕННЫЙ СТРУКТУРНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КИП ПРИ РЕШЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим теперь решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в общем виде, без каких-либо ограничений, накладываемых на коэффициенты $a_r(x)$ дифференциального оператора A . Для этой цели воспользуемся разработанным автором методом биортогональных конечных интегральных преобразований и матричным структурным алгоритмом [10, 11, 20]. В классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом в метрике (1.5) сепарабельного пространства $\bar{L}_2(I)$, в области $D : \{I \times t > 0\}$ справедливо следующее представление [10, 11]:

$$\varphi(\lambda_i, t) = (\bar{G}, \bar{U})_p = (\bar{G}^T p, \bar{U}) = \int_a^b \bar{U}^T(x, t) p(x) \bar{G}(\lambda_i, t) dx = \int_a^b \bar{G}^T(\lambda_i, t) p(x) \bar{U}(x, t) dx, \quad (4.1)$$

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \cdot \bar{K}(\mu_i, x) \cdot (\bar{G}_i^T p, \bar{K}_i)^{-1}. \quad (4.2)$$

Здесь, как и прежде, $\bar{U}(x, t)$ — искомая вектор-функция $m \times 1$, а $\bar{G}(\lambda_i, x)$, $\bar{K}(\mu_i, x)$ — две ядровые вектор-функции того же порядка, λ_i, μ_i — соответствующие им собственные значения сопряженной и инвариантной однородных краевых задач, формирующихся в процессе решения. Разложение (4.2) справедливо при выполнении такого соотношения биортогональности

$$(\bar{G}_i, K_j)_p = \int_a^b \bar{G}^T(\lambda_i, t) p(x) \bar{K}(\mu_j, x) dx = \delta_i^j (\bar{G}_i^T p, K_j).$$

Равенства (4.1), (4.2) представляют соответственно прямое и обратное биортогональные конечные интегральные преобразования, т.е. $\varphi(\lambda_i, t)$ является трансформантой, а разложение (4.2) — формулой обращения.

Компоненты вектор-функций $\bar{U}(x, t)$, $\bar{G}(\lambda_i, x)$, $\bar{K}(\mu_i, x)$ — элементы пространства $L_2(I)$ с метрикой (1.5).

$$\{U_k(x, t), G_k(\lambda_i, x), K_k(\mu_i, x)\} \in \bar{L}_2(I) \quad (k = 1, \dots, m).$$

Следует отметить, что в частном случае, когда $\bar{G} = \bar{K}$, $\lambda_i = \mu_i$, то соотношения (4.1), (4.2) становятся обычным векторно-матричным КИП (3.1), (3.2).

Скалярное произведение $(\bar{G}_i^T p, \bar{K}_i)$ представляет аналог квадрата нормы в разложении (3.2).

Для ядровых вектор-функций \bar{K} и \bar{G} существует и другое альтернативное представление биортогонального КИП в метрике (1.5), соответствующее разложению $\bar{U}(x, t)$ в ряд по собственным функциям $\bar{G}(\lambda_i, x)$ [10, 11], т.е.

$$\Omega(\mu_i, t) = (\bar{U}^T, p \bar{K}) = \int_a^b \bar{U}^T(x, t) p(x) \bar{K}(\mu_i, x) dx = \int_a^b \bar{K}^T(\mu_i, x) p(x) \bar{U}(x, t) dx, \quad (4.3)$$

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega(\mu_i, t) \bar{G}(\lambda_i, x) (\bar{K}_i^T p, \bar{G}_i)^{-1}. \quad (4.4)$$

Равенства (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4) являются равноправными.

Для биортогональных преобразований справедливы утверждения, аналогичные теоремам 5 и 6.

Теорема 7. Если трансформанты $\varphi(\lambda_1, t)$, $\varphi(\lambda_2, t)$, ... и $\Omega(\mu_1, t)$, $\Omega(\mu_2, t)$, ... — ограниченные функции, причем таковы, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \cdot \Omega(\mu_i, t) < \infty,$$

то существует вектор-функция $\bar{U}(x, t) \in \bar{L}_2(I)$, для которой $\varphi(\lambda_i, t)$ и $\Omega(\mu_i, t)$ являются коэффициентами Фурье соответственно разложений (4.2) и (4.4). Для ее представлений (4.2), (4.4) справедлива интегральная сходимость:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\bar{S}_l - \bar{U}, \bar{s}_l - \bar{U}) = 0.$$

Вектор-функция $\bar{U}(x, t)$, определяемая рядами (4.2), (4.4), является единственной.



В формулировке теоремы $\bar{S}_l(x, t)$ и $\bar{s}_l(x, t)$ представляют частные суммы

$$\bar{S}_l(x, t) = \sum_{i=1}^l \varphi(\lambda_i, t) \bar{K}(\mu_i, x) \left(\bar{G}_i^T p, \bar{K}_i \right)^{-1}, \quad \bar{s}_l(x, t) = \sum_{i=1}^l \Omega(\mu_i, t) \bar{G}(\lambda_i, x) \left(\bar{K}_i^T p, \bar{G}_i \right)^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично приведенному в работе автора [8].

Теорема 8. Если весовая матрица

$$p(x) = p_0(x) \cdot E,$$

то ядровые вектор-функции $\bar{G}(\lambda_i, x)$, $\bar{K}(\mu_i, x)$ разложений (4.2), (4.4) образуют полные системы, когда справедливо равенство

$$p_0(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \bar{G}(\lambda_i, t) \bar{K}(\mu_i, x) \left(\bar{K}_i^T p, \bar{G}_i \right) = \delta(x_1 - x).$$

Здесь, как и выше, $\delta(\dots)$ — дельта-функция П. А. Дирака.

Доказательство, аналогично приведенному ранее (теорема 6).

Ниже приводится разработанная автором алгоритмическая процедура применения биортогонального КИП (4.1), (4.3) к начально-краевой задаче (1.1)–(1.3).

Замечание 4. Структурный алгоритм биортогональных конечных интегральных преобразований впервые сформулирован в работах [10, 11] и подробно описан в статье [32] при исследовании нестационарных задач динамики оболочек вращения.

Подвергаем дифференциальное уравнение (1.1) и начальные условия (1.3) интегральному преобразованию (4.1) по переменной x с ядровой вектор-функцией $\bar{G}(\lambda_i, x)$ и весовой матрицей $p(x)$. Имеем:

$$\left(\bar{G}^T p, A [\bar{U}] \right) - E \left(\bar{G}^T p, \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} \right) = \left(\bar{G}^T p, \bar{f}(x, t) \right), \quad (4.5)$$

$$\left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right) = \left(\bar{G}^T p, \bar{U}_0(x) \right), \quad \left(\bar{G}^T p, \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right) = \left(\bar{G}^T p, \dot{\bar{U}}_0(x) \right) \quad \text{при } t = 0. \quad (4.6)$$

Интегрируем по частям скалярное произведение $\left(\bar{G}^T p, A [\bar{U}] \right)$, в результате чего, как и прежде (п.3), выделяем сопряженное дифференциальное выражение $A^* [p\bar{G}]$:

$$\left(\bar{G}^T p, A [\bar{U}] \right) = \Phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [p\bar{G}], \bar{U})_p. \quad (4.7)$$

Здесь $A^* [p\bar{G}]$ и $\Phi(\bar{G}, \bar{U})$ определяются соотношениями (3.10), (3.11), т.е.

$$\begin{aligned} A^* [p\bar{G}] &= \left(\bar{G}^T p a_0 \right)'' - \left(\bar{G}^T p a_1 \right)' + \bar{G}^T p a_2 = \\ &= \left(\bar{G}^T \right)'' p a_0 + \left(\bar{G}^T \right)' [2(p a_0)' - p a_1] + \bar{G}^T [(p a_0)'' - (p a_1)' + p a_2], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Phi(\bar{G}, \bar{U}) = \bar{G}^T p a_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \left\{ \left(\bar{G}^T \right)' p a_0 - \bar{G}^T [(p a_0)' - p a_1] \right\} \bar{U}. \quad (4.9)$$

Имея в виду выражения (4.7) и (3.7), т.е.

$$\left(\bar{G}^T p, \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right), \quad \left(\bar{G}^T p, \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right),$$

и аналогичные (4.1) обозначения трансформант (3.25), равенства (4.5), (4.6) принимают следующий вид:

$$\Phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [\bar{G}], \bar{U})_p - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right) = F(\lambda_i, t), \quad (4.10)$$

$$\varphi(\lambda_i, 0) = W_0(\lambda_i), \quad \dot{\varphi}(\lambda_i, t)|_{t=0} = \dot{W}_0(\lambda_i) \quad \text{при } t = 0, \quad (4.11)$$



где $W_0(\lambda_i)$, $\dot{W}_0(\lambda_i)$, $F(\lambda_i, t)$ – трансформанты соответствующих функций (3.25).

Воспользуемся теперь двумя условиями (3.18), (3.19) структурного алгоритма метода КИП. Имеем:

$$\Phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b = 0, \quad (4.12)$$

$$(A^* [p\bar{G}], \bar{U}) = -\lambda_i^2 (\bar{G}^T p, \bar{U}). \quad (4.13)$$

Соотношения (4.12), (4.13) позволяют записать уравнение (4.10) в трансформантах, т.е.

$$\ddot{\varphi}(\lambda_i, t) + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = F(\lambda_i, t), \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (4.14)$$

Таким образом, аналогично (3.23), (3.24) уравнения (4.14) совместно с начальными условиями (4.11) представляют счетное множество задач Коши для $\varphi(\lambda_i, t)$, и ее решение для произвольной правой части записывается в виде

$$\varphi(\lambda_i, t) = W_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{W}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau. \quad (4.15)$$

Равенства (4.12), (4.13) совместно с граничными условиями (1.2) позволяют сформулировать краевую задачу для определения ядра преобразования $\bar{G}(\lambda_i, x)$ и параметров λ_i . Действительно, из (4.13) следует такое дифференциальное уравнение

$$A^* [p\bar{G}] = -\lambda_i^2 \bar{G}^T p,$$

или в раскрытом виде, с учетом выражения (4.8), имеем:

$$\begin{aligned} & (\bar{G}^T p a_0)'' - (\bar{G}^T p a_1)' + \bar{G}^T p a_2 + \bar{G}^T \lambda_i^2 p = (\bar{G}^T(\lambda_i, x))'' p a_0 + \\ & + (\bar{G}^T(\lambda_i, x))' [2(p a_0)' - p a_1] + \bar{G}^T(\lambda_i, x) [(p a_0)'' - (p a_1)' + p a_2 + p \lambda_i^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Выражая производные $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$ из условий (1.2), получаем аналогичные (3.21) соотношения

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{U} \Big|_{x=a,b}, \quad \Gamma \Big|_{x=a,b} = -e^{-1} c \Big|_{x=a,b}. \quad (4.17)$$

Подстановка (4.17) в равенства (4.9), (4.12) приводит к такому соотношению:

$$\left\{ \bar{G}^T [p a_0 \Gamma - (p a_0)' + p a_1] - [\bar{G}^T]' p a_0 \right\} \Big|_a^b = 0. \quad (4.18)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (4.16) совместно с граничными условиями (4.18), т.е.

$$A^* [p\bar{G}] + \lambda_i^2 \bar{G}^T p = 0, \quad (4.19)$$

$$\bar{G}^T [p a_0 \Gamma - (p a_0)' + p a_1] - (\bar{G}^T)' p a_0 = 0 \quad \text{при } x = a, b \quad (4.20)$$

представляет сопряженную однородную краевую задачу определения собственных значений λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) и собственных вектор-функций $\bar{G}(\lambda_i, x)$. Следует отметить, что $A^* [p\bar{G}]$ совместно с условиями (4.20) представляет сопряженный $A[\bar{U}]$ в метрике (1.5) оператор, а приведенный выше алгоритм является процедурой выделения A^* .

Для удобства соотношения (4.16), (4.18) могут быть представлены в виде

$$a_0^T p \bar{G}'' + [2(a_0^T p)' - a_1^T p] \bar{G}' + [(a_0^T p)'' - (a_1^T p)' + a_2^T p + \lambda_i^2 p] \bar{G} = 0,$$

$$a_0^T p \bar{G}' + [\Gamma^T a_0^T p - (a_0^T p)' - a_1^T p] \bar{G} = 0 \quad \text{при } x = a, b.$$



Следующий шаг структурного алгоритма метода конечных биортогональных преобразований состоит в выделении сопряженного к A^* оператора A^{**} и формировании однородной краевой задачи, определяющей вторую ядровую вектор-функцию $\overline{K}(\mu_j, x)$ и соответствующие собственные значения μ_j . Покажем, что сопряженный к сопряженному дифференциальный оператор при этом совпадает с исходным, т.е.

$$A^{**} = A. \quad (4.21)$$

Применяем КИП (4.3) к дифференциальному уравнению (4.16), точнее к (4.19), имея в виду граничные условия (4.18), т.е. (4.20). Находим

$$(A^* [p\overline{G}], p\overline{K}) + \lambda_i^2 (\overline{G}^T p, p\overline{K}) = 0, \quad (4.22)$$

где

$$(A^* [p\overline{G}], p\overline{K}) = \int_a^b (\overline{G}^T p a_0)'' p\overline{K} dx - \int_a^b (\overline{G}^T p a_1)' p\overline{K} dx + \int_a^b \overline{G}^T p a_2 p\overline{K} dx. \quad (4.23)$$

Выполняя первые две квадратуры (4.23) по частям, преобразуем уравнение (4.22) к виду

$$B (\overline{G}^T, \overline{K}) \Big|_a^b + (\overline{G}^T p, A^{**} [p\overline{K}]) + \lambda_i^2 (\overline{G}^T p, p\overline{K}) = 0. \quad (4.24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A^{**} [p\overline{K}] &= a_0 (p\overline{K})'' + a_1 (p\overline{K})' + a_2 p\overline{K}, \\ B (\overline{G}^T, \overline{K}) &= (\overline{G}^T)' p a_0 p\overline{K} - \overline{G}^T p a_0 p\overline{K}' + \overline{G}^T [(p a_0)' - p a_1] p\overline{K}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Воспользуемся теперь аналогичными (4.12), (4.13) условиями метода КИП, т.е.

$$(\overline{G}^* p, A^{**} [p\overline{K}]) = -\mu_j^2 (\overline{G}^T p, p\overline{K}), \quad (4.26)$$

$$B (\overline{G}^T, \overline{K}) \Big|_a^b = 0. \quad (4.27)$$

Из (4.26) следует такое дифференциальное уравнение для вектор-функции $\overline{K}(\mu_j, x)$, точнее $p\overline{K}(\mu_j, x)$:

$$A^{**} [p\overline{K}] = a_0 (p\overline{K})'' + a_1 (p\overline{K})' + a_2 p\overline{K} = -\mu_j^2 p\overline{K}. \quad (4.28)$$

Имея в виду транспонированное граничное условие (4.18), определяем \overline{G}'

$$\overline{G}' = (a_0^T p)^{-1} [\Gamma^T a_0 p - (a_0^T p)' + a_1^T p] \overline{G} \quad \text{при } x = a, b.$$

После подстановки этого равенства в соотношение (4.27) получаем

$$[\Gamma (p\overline{K}) - (p\overline{K})'] \Big|_a^b = 0.$$

Откуда следует

$$l (p\overline{K})' + c (p\overline{K}) = 0 \quad \text{при } x = a, b. \quad (4.29)$$

Таким образом, сформулирована однородная краевая задача (4.28), (4.29) для ядровой вектор-функции $p\overline{K}(\mu_j, x)$, инвариантная (1.1), (1.2). Действительно, дифференциальное выражение (4.25) и граничные условия (4.29) совпадают с (1.4), (1.2), т.е. справедливо равенство (4.21).

Наконец, трансформированное уравнение (4.24), с учетом равенств (4.26), (4.27) структурного алгоритма метода КИП, приводит к такому соотношению биортогональности ядровых вектор-функций

$$(\overline{G}^T p, p\overline{K}) = 0, \quad \text{если } \lambda_i \neq \mu_j, \quad \text{или} \quad (\overline{G}^T p, \overline{K}_p) = 0, \quad \text{если } \lambda_i \neq \mu_j,$$

где $\overline{G}_p(\lambda_i, x) = p(x)\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}_p(\mu_j, x) = p(x)\overline{K}(\mu_j, x)$, в случае, когда $p(x)$ — диагональная матрица.

Равенства (4.19), (4.20) и (4.28), (4.29) представляют соответственно сопряженную и инвариантную однородные краевые задачи на собственные значения, предназначенные для определения ядровых



вектор-функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ и параметров λ_i, μ_j ($i = \overline{1, \infty}$) биортогонального КИП (4.1), (4.2). Алгоритм их решения описан в разд. 2 настоящей статьи. Следует при этом подчеркнуть, что интегрируемость систем уравнений (4.19) и (4.28) определяет возможность построения замкнутого решения рассматриваемой начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Зная теперь компоненты ядровых вектор-функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ и собственные значения λ_i, μ_i , а также трансформанту $\varphi(\lambda_i, t)$ (4.15), по формуле обращения (4.2) биортогонального КИП находится искомая вектор-функция $\overline{U}(x, t)$ (точнее, ее компоненты), т.е. формируется общее решение задачи (1.1)–(1.3). В структуре решения (4.2) остается неизвестной лишь сложная квадратура $(\overline{G}_i^T p, \overline{K}_i) = (\overline{G}_p, \overline{K})$, которая в общем виде может быть вычислена на основе следующей теоремы [33].

Теорема 9. Для собственных функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ и соответствующих им собственных значений (простых точек спектров $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$) скалярное произведение $(\overline{G}_p, \overline{K}) = (\overline{G}^T p, \overline{K})$ в формуле обращения КИП (4.2) определяется выражением

$$\begin{aligned} (\overline{G}_p, \overline{K}) &= (\overline{G}^T p, \overline{K}) = \\ &= \left\{ \left[(\overline{G}^T p a_0)' - \overline{G}^T p a_1 \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \overline{K}(\xi_i, x) \Big|_{\xi=\xi_i} - \overline{G}^T p a_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \overline{K}(\xi_i, x) \Big|_{\xi=\xi_i} \right\} \Big|_{x=a, b}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Доказательство утверждения (4.30) приводится в статье автора [33]. Необходимо отметить, что в случае, если

$$\overline{K}(\mu_i, x) = \overline{G}(\lambda_i, x), \quad \mu_i = \lambda_i,$$

т.е. когда биортогональное преобразование (4.1), (4.2) совпадает с обычным вектор-матричным КИП (3.1), (3.2), то имея в виду соотношения (2.20), (2.21), из равенства (4.30) немедленно следует выражение для квадрата нормы (2.23).

В заключение этого параграфа необходимо сделать следующее замечание.

Замечание 5. Поскольку в общем случае решение (4.2) несамосопряженной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) содержит две вектор-функции \overline{G} и \overline{K} , связанные тождеством Лагранжа [12], то для их определения обычный способ разложения по собственным функциям, приведенный в разд. 2 настоящей статьи, должен быть дополнен безальтернативной процедурой выделения сопряженного оператора, являющейся частью изложенного здесь структурного алгоритма метода биортогональных КИП. Это значит, что классический прием разложения по собственным вектор-функциям автоматически становится методом конечных биортогональных интегральных преобразований.

5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫМ СТРУКТУРНЫМ МЕТОДОМ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ КИП НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В качестве примера рассматривается начально-краевая осесимметричная задача динамики для трехслойной упругой анизотропной круговой цилиндрической оболочки при произвольном ее нагружении и закреплении по торцам. Замкнутое решение строится путем применения многокомпонентного биортогонального конечного интегрального преобразования. В цилиндрической системе координат $(r^* = R, x^*, \theta)$ оболочка занимает область $\Omega : \{R, 0 \leq x^* \leq H^*, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Здесь R, H^* — соответственно радиус нейтральной поверхности и длина оболочки. Полагая, что наружные тонкие слои толщиной h_1 и h_2 испытывают мембранное напряженно-деформированное состояние, а кинематика деформирования среднего ортотропного слоя толщиной h основана на гипотезах уточненной технической теории оболочек, дополненной деформациями сдвига и инерцией поворота поперечных сечений. Подробный вывод всех определяющих соотношений для подобных оболочек приведен в статье [34]. При этом исходные матрицы математической модели (1.1)–(1.3) $a_0, a_1, a_2, l_a, l_b, c_a, c_b, \overline{U}(x, t), \overline{f}(x, t)$ имеют такой вид:



$$\begin{aligned}
 a_0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13}^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31}^0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad a_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & 0 \\ -a_{31}^1 & 0 & a_{23}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & 0 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13}^2 \\ 0 & -a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33}^2 \end{vmatrix}, \\
 H_0 &= \begin{vmatrix} -I_{11} & 0 & -I_{13} \\ 0 & -I_{22} & 0 \\ -I_{31} & 0 & -I_{33} \end{vmatrix}, \quad l_a = l_b = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad c_a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \\
 c_b &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{U}(x, t) = \begin{vmatrix} U_1 = U(x, t) \\ U_2 = W(x, t) \\ U_3 = \psi(x, t) \end{vmatrix}, \quad \bar{f}(x, t) = \begin{vmatrix} f_1 = -q_x(x, t) \\ f_2 = -q_R(x, t) \\ f_3 = -m_x(x, t) \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Принимая во внимание (5.1), начально-краевая задача (1.1)–(1.3), т.е. дифференциальные уравнения движения и соответствующие условия, представленные в безразмерной форме, записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{12}^1 \frac{\partial W}{\partial x} + a_{13}^2 \psi - I_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - I_{13} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -q_x, \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{21}^1 \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - a_{22}^2 W - I_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= -q_R, \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{31}^0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{32}^1 \frac{\partial W}{\partial x} - a_{33}^2 \psi - I_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - I_{31} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -m_x,
 \end{aligned} \right\} \tag{5.2}$$

$$\left. \begin{aligned}
 U = W = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} - \chi_3 \psi &= \text{при } x = 0 \\
 U = W = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \chi_3 \psi &= \text{при } x = H,
 \end{aligned} \right\} \tag{5.3}$$

$$\left. \begin{aligned}
 U = U_0(x), \quad W = W_0(x), \quad \psi = \psi_0(x) \quad \text{при } t = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} U = \dot{U}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} W = \dot{W}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi = \dot{\psi}_0(x).
 \end{aligned} \right\} \tag{5.4}$$

Здесь элементы матриц a_{ks}^r , I_{ks} ($k, s = 1, 2, 3$; $r = 0, 1, 2$) — безразмерные параметры, зависящие от жесткостных и инерционных характеристик слоев оболочки, χ_3 — безразмерный коэффициент жесткости упругого защемления торцов. $U(x, t)$, $W(x, t)$ и $\psi(x, t)$ — безразмерные компоненты вектора перемещений и углов поворота нормали, $q_x(x, t)$, $q_R(x, t)$, $m_x(x, t)$ — безразмерные компоненты вектора линейной и моментальной нагрузки. $U_0(x)$, $W_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\dot{U}_0(x)$, $\dot{W}_0(x)$, $\dot{\psi}_0(x)$ — заданные в начальный момент времени безразмерные перемещения и скорости перемещений. $\{x, t\}$ — безразмерные продольная координата и время.

Соотношения (5.2)–(5.4) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи.

Замечание 6. Структура биортогонального КИП (4.1), (4.2) определяется матрицей H (5.1). Поскольку эта матрица не диагональная, то следует воспользоваться многокомпонентным биортогональным интегральным преобразованием [11, 7]. Кроме того, замечаем, что система дифференциальных уравнений (5.2) с постоянными коэффициентами, т.е. $a_{ks}^r = \text{const}$ и $I_{ks} = \text{const}$. Это означает, что элементы весовой матрицы $p(x)$ также постоянны, и без ущерба общности матрицу p можно считать единичной, т.е. $p = E$.

Принимая во внимание все отмеченное выше, вводим на сегменте $x \in [0, H]$ следующее многокомпонентное биортогональное КИП:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda_i, t) &= \int_0^H \{ [I_{11}U(x, t) + I_{13}\psi(x, t)] G_1(\lambda_i, x) + I_{22}W(x, t)G_2(\lambda_i, x) + \\
 &\quad + [I_{33}\psi(x, t) + I_{31}U(x, t)] G_3(\lambda_i, x) \} dx,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$



$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) K_1(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
 W(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) K_2(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
 \psi(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) K_3(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1},
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

где $G_k(\lambda_i, x) = G_{ki}$, $K_k(\mu_j, x) = K_{kj}$ ($k = 1, 2, 3$) – компоненты соответствующих ядровых вектор-функций.

Преобразование (5.5), (5.6) справедливо при выполнении следующего обобщенного соотношения биортогональности [11, 7]:

$$\begin{aligned}
 \int_0^H \{ [I_{11}K_1(\mu_j, x) + I_{13}K_3(\mu_j, x)] G_1(\lambda_i, x) + I_{22}K_2(\mu_j, x)G_2(\lambda_i, x) + \\
 + [I_{33}K_3(\mu_j, x) + I_{31}K_1(\mu_j, x)] G_3(\lambda_i, x) \} dx = \delta_i^j (\overline{G}_i, \overline{K}_j).
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Обобщенное соотношение биортогональности (5.7) в отличие от обычного, наряду с главными, содержит также побочные члены с множителями I_{13} и I_{31} . $(\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}$ – обобщенное скалярное произведение вектор-функций \overline{G}_i и \overline{K}_j , т.е.

$$\begin{aligned}
 (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j} = \int_0^H \{ I_{11}G_1(\lambda_i, x)K_1(\mu_j, x) + I_{22}G_2(\lambda_i, x)K_2(\mu_j, x) + \\
 + I_{33}G_3(\lambda_i, x)K_3(\mu_j, x) + I_{13}G_3(\lambda_i, x)K_1(\mu_j, x) + I_{31}G_1(\lambda_i, x)K_3(\mu_j, x) \} dx.
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Применяем биортогональное КИП (5.5) к системе дифференциальных уравнений (5.2) и начальным условиям (5.4)

$$\begin{aligned}
 \int_0^H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{12}^1 \frac{\partial W}{\partial x} + a_{13}^2 \psi \right) G_{1i} dx - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^H (I_{11}U + I_{13}\psi) G_{1i} dx = - \int_0^H q_x G_{1i} dx, \\
 \int_0^H \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{21}^1 \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{22}^2 W \right) G_{2i} dx - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^H I_{22}W G_{2i} dx = - \int_0^H q_R G_{2i} dx, \\
 \int_0^H \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{31}^0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{32}^1 \frac{\partial W}{\partial x} - a_{33}^2 \psi \right) G_{3i} dx - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^H (I_{33}\psi + I_{31}U) G_{3i} dx = - \int_0^H m_x G_{3i} dx,
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_{11} \int_0^H U(x, 0) G_{1i} dx &= I_{11} \int_0^H U_0(x) G_{1i} dx, \\
 I_{22} \int_0^H W(x, 0) G_{2i} dx &= I_{22} \int_0^H W_0(x) G_{2i} dx, \\
 I_{33} \int_0^H \psi(x, 0) G_{3i} dx &= I_{33} \int_0^H \psi_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{31} \int_0^H U(x, 0) G_{3i} dx &= I_{31} \int_0^H U_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{13} \int_0^H \psi(x, 0) G_{1i} dx &= I_{13} \int_0^H \psi_0(x) G_{1i} dx, \quad \text{при } t = 0,
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_{11} \frac{d}{dt} \int_0^H U(x, 0) G_{1i} dx &= I_{11} \int_0^H \dot{U}_0(x) G_{1i} dx, \\
 I_{22} \frac{d}{dt} \int_0^H W(x, 0) G_{2i} dx &= I_{22} \int_0^H \dot{W}_0(x) G_{2i} dx, \\
 I_{33} \frac{d}{dt} \int_0^H \psi(x, 0) G_{3i} dx &= I_{33} \int_0^H \dot{\psi}_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{31} \frac{d}{dt} \int_0^H U(x, 0) G_{3i} dx &= I_{31} \int_0^H \dot{U}_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{13} \frac{d}{dt} \int_0^H \psi(x, 0) G_{1i} dx &= I_{13} \int_0^H \dot{\psi}_0(x) G_{1i} dx.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{5.10}$$



Для членов, содержащих производные по пространственной переменной, выполняя интегрирование по частям, а затем, складывая уравнения (5.9) и соответствующие начальные условия (5.10), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \phi(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, U, W, \psi) \Big|_0^H + \int_0^H \left[U(G_{1i}'' + a_{21}^1 G_{2i}' + a_{31}^0 G_{3i}) + W(G_{2i}'' - a_{12}^1 G_{1i}' - a_{32}^1 G_{3i}' - a_{22}^2 G_{2i}) + \right. \\ \left. + \psi(G_{3i}'' + a_{13}^0 G_{2i}' + a_{23}^2 G_{1i}' - a_{33}^2 G_{3i}') \right] dx - \frac{d^2}{dt^2} \int_0^H (I_{11} U G_{1i} + I_{22} W G_{2i} + I_{33} \psi G_{3i} + I_{31} U G_{3i} + \\ + I_{13} \psi G_{1i}) dx = - \int_0^H (q_x G_{1i} + q_R G_{2i} + m_x G_{3i}) dx. \end{aligned} \quad (5.11)$$

При $t = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^H [U(x, 0) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W(x, 0) I_{22} G_{2i} + \psi(x, 0) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx = \\ = \int_0^H [U_0(x) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W_0(x) I_{22} G_{2i} + \psi_0(x) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx, \\ \frac{d}{dt} \int_0^H [U(x, 0) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W(x, 0) I_{22} G_{2i} + \psi(x, 0) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx = \\ = \int_0^H [\dot{U}_0(x) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + \dot{W}_0(x) I_{22} G_{2i} + \dot{\psi}_0(x) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, U, W, \psi) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + a_{13}^0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{12}^1 W \right) G_{1i} - (U + a_{13}^0 \psi) G_{1i}' + \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - a_{21}^1 U + a_{23}^1 \psi \right) G_{2i} - W G_{2i}' + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{31}^0 \frac{\partial U}{\partial x} + a_{32}^1 W \right) G_{3i} - (\psi + a_{31}^0 U) G_{3i}'. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Вводим два обычных условия (3.18), (3.19) структурного алгоритма метода КИП:

$$\phi(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, U, W, \psi) \Big|_0^H = 0, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^H [U(G_{1i}'' + a_{21}^1 G_{2i}' + a_{31}^0 G_{3i}') + W(G_{2i}'' - a_{12}^1 G_{1i}' - a_{22}^2 G_{2i}' - a_{32}^1 G_{3i}') + \\ + \psi(a_{13}^0 G_{1i}'' + a_{23}^2 G_{1i}' - a_{23}^1 G_{2i}' + G_{3i}'' - a_{33}^2 G_{3i}')] dx = \\ = -\lambda_i^2 \int_0^H [U(I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W I_{22} G_{2i} + \psi(I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Если принять теперь во внимание соотношения (5.14), (5.15) и выражение для трансформанты (5.5), то уравнение (5.11) и условия (5.12) принимают вид (4.14), (4.11), т.е.

$$\frac{d^2 \varphi(\lambda_i, t)}{dt^2} + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = -F(\lambda_i, t), \quad \varphi(\lambda_i, 0) = \varphi_0(\lambda_i), \quad \left. \frac{d\varphi(\lambda_i, t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(\lambda_i),$$

а это решение записывается следующим образом (4.15):

$$\varphi(\lambda_i, t) = \varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau. \quad (5.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(\lambda_i, t) = \int_0^H [q_x(x, t) G_{1i} + q_R(x, t) G_{2i} + m_x(x, t) G_{3i}] dx, \\ \varphi_0(\lambda_i) = \int_0^H \{ [I_{11} U_0(x) + I_{13} \psi_0(x)] G_{1i} + I_{22} W_0(x) G_{2i} + [I_{33} \psi_0(x) + I_{31} U_0(x)] G_{3i} \} dx, \\ \dot{\varphi}_0(\lambda_i) = \int_0^H \{ [I_{11} \dot{U}_0(x) + I_{13} \dot{\psi}_0(x)] G_{1i} + I_{22} \dot{W}_0(x) G_{2i} + [I_{33} \dot{\psi}_0(x) + I_{31} \dot{U}_0(x)] G_{3i} \} dx. \end{aligned} \quad (5.17)$$



Таким образом, равенства (5.16), (5.17) определяют трансформанту $\varphi(\lambda_i, t)$ в формуле обращения КИП (5.6) рассматриваемой задачи.

С другой стороны, условия (5.14), (5.15) совместно с (5.3) позволяют сформулировать сопряженную краевую задачу (4.19), (4.20) для компонентов G_{1i}, G_{2i}, G_{3i} вектор-функции ядра биортогонального КИП (5.5), (5.6). Действительно, из операционного свойства (5.15) следует такая однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} G''_{1i} + a_{31}^0 G''_{3i} + a_{21}^1 G'_{2i} + \lambda_i^2 (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) &= 0, \\ G''_{2i} - a_{12}^1 G'_{1i} - a_{32}^1 G'_{3i} + (\lambda_i^2 I_{22} - a_{22}^2) G_{2i} &= 0, \\ G''_{3i} - a_{13}^0 G''_{1i} - a_{23}^1 G'_{2i} + (\lambda_i^2 I_{33} - a_{33}^2) G_{3i} + (\lambda_i^2 I_{13} - a_{13}^2) G_{1i} &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Вспользуемся теперь равенством (5.14), которое с учетом выражения (5.13) и условий (5.3) принимает следующий вид:

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} (G_{1i} + a_{31}^0 G_{3i}) + \frac{\partial W}{\partial x} G_{2i} + \psi [a_{23}^1 G_{2i} - a_{13}^0 G'_{1i} - G'_{3i} \pm \chi_3 (G_{3i} + a_{13}^0 G_{1i})] \right\} \Big|_0^H = 0.$$

Поскольку производные $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial x}$ и углы поворота ψ не определены на концах интервала $[0, H]$, то обращение в нуль приведенного выше выражения возможно при выполнении таких граничных условий:

$$G_{1i} + a_{31}^0 G_{3i} = 0; \quad G_{2i} = 0, \quad \text{при } x = 0, H; \quad G'_{3i} + a_{13}^0 G'_{1i} \mp \chi_3 (G_{3i} + a_{13}^0 G_{1i}) = 0. \quad (5.19)$$

Дифференциальные уравнения (5.18) и условия (5.19) представляют сопряженную краевую задачу для компонентов G_{1i}, G_{2i}, G_{3i} ядровой вектор-функции биортогонального преобразования (5.5), (5.6).

В соответствии с алгоритмической процедурой метода биортогональных КИП, описанной в разд. 4, действуем на дифференциальные уравнения (5.18) соответствующими интегральными операторами:

$$\int_0^H K_1(\mu_j, x) dx, \quad \int_0^H K_2(\mu_j, x) dx, \quad \int_0^H K_3(\mu_j, x) dx,$$

т.е. имеем

$$\begin{aligned} \int_0^H [G''_{1i} + a_{31}^0 G''_{3i} + a_{21}^1 G'_{2i} + \lambda_i^2 (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i})] K_{1j} dx &= 0, \\ \int_0^H [G''_{2i} - a_{12}^1 G'_{1i} - a_{32}^1 G'_{3i} + (\lambda_i^2 I_{22} - a_{22}^2) G_{2i}] K_{2j} dx &= 0, \\ \int_0^H [G''_{3i} + a_{13}^0 G''_{1i} - a_{23}^1 G'_{2i} + (\lambda_i^2 I_{33} - a_{33}^2) G_{3i} + (\lambda_i^2 I_{13} + a_{13}^2) G_{1i}] K_{3j} dx &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Повторяя, как и выше, предусмотренную структурным алгоритмом метода КИП процедуру выделения сопряженного оператора, т.е. интегрируя по частям и складывая равенства (5.20), находим:

$$\begin{aligned} \Omega(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, K_{1j}, K_{2j}, K_{3j}) \Big|_0^H + \int_0^H [G_{1i}(K''_{1j} + a_{12}^1 K'_{2j} + a_{13}^0 K''_{3j} + a_{13}^2 K_{3j}) + \\ + G_{2i}(K''_{2j} - a_{21}^1 K'_{1j} + a_{23}^1 K'_{3j} - a_{22}^2 K_{2j}) + G_{3i}(K''_{3j} + a_{31}^0 K'_{1j} + a_{32}^1 K'_{2j} - a_{33}^2 K_{3j})] dx = \\ = -\lambda_i^2 \int_0^H [(I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) K_{1j} + I_{22} G_{2i} K_{2j} + (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i}) K_{3j}] dx, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, K_{1j}, K_{2j}, K_{3j}) = G'_{1i} K_{1j} - G_{1i} K'_{1j} + a_{31}^0 (G'_{3i} K_{1j} - G_{3i} K'_{1j}) + \\ + a_{21}^1 G_{2i} K_{1j} + G'_{2i} K_{2j} - G_{2i} K'_{2j} - a_{12}^1 G_{1i} K_{2j} - a_{32}^1 G_{3i} K_{2j} + \\ + G'_{3i} K_{3j} - G_{3i} K'_{3j} + a_{13}^0 (G'_{1i} K_{3j} - G_{1i} K'_{3j}) - a_{23}^1 G_{2i} K_{3j}. \end{aligned}$$



Вводя аналогичные (4.26), (4.27) обычные два условия метода КИП, получим:

$$\Omega (G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, K_{1j}, K_{2j}, K_{3j})|_0^H = 0, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left[G_{1i}(K_{1j}'' + a_{12}^1 K_{2j} + a_{13}^0 K_{3j}'' + a_{13}^2 K_{3j}) + G_{2i}(K_{2j}'' - a_{21}^1 K_{1j}' + a_{23}^1 K_{3j}' - a_{22}^2 K_{2j}) + \right. \\ & \quad \left. + G_{3i}(K_{3j}'' + a_{31}^0 K_{1j}'' + a_{32}^1 K_{2j}' - a_{33}^2 K_{3j}) \right] dx = \\ & = -\mu_j^2 \int_0^H \left[G_{1i}(I_{11}K_{1j} + I_{13}K_{3j}) + G_{2i}I_{22}K_{2j} + G_{3i}(I_{33}K_{3j} + I_{31}K_{1j}) \right] dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

Замечаем, что из (5.21) с учетом (5.22), (5.23) следует такое равенство:

$$(\mu_j^2 - \lambda_i^2) \int_0^H \left[G_{1i}(I_{11}K_{1j} + I_{13}K_{3j}) + G_{2i}I_{22}K_{2j} + G_{3i}(I_{33}K_{3j} + I_{31}K_{1j}) \right] dx = 0. \quad (5.24)$$

Соотношение (5.24) представляет условие обобщенной биортогональности (5.7), подтверждающее справедливость формул обращения (5.6) в применении к рассматриваемой задаче.

Операционное свойство (5.23) позволяет сформулировать однородную систему дифференциальных уравнений для компонентов $K_1(\mu_j, x)$, $K_2(\mu_j, x)$, $K_3(\mu_j, x)$ второй ядровой вектор-функции биортогонального КИП (5.5), (5.6). Имеем:

$$\begin{aligned} K_{1j}'' + a_{12}^1 K_{2j} + a_{13}^0 K_{3j}'' + a_{13}^2 K_{3j} + \mu_j^2 (I_{11}K_{1j} + I_{13}K_{3j}) &= 0, \\ K_{2j}'' - a_{21}^1 K_{1j}' + a_{23}^1 K_{3j}' - a_{22}^2 K_{2j} + \mu_j^2 I_{22}K_{2j} &= 0, \\ K_{3j}'' + a_{31}^0 K_{1j}'' + a_{32}^1 K_{2j}' - a_{33}^2 K_{3j} + \mu_j^2 (I_{33}K_{3j} + I_{31}K_{1j}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Равенство (5.22) с учетом (5.21) и первых двух условий (5.19) принимает вид

$$\left[(G_{1i}' + a_{31}^0 G_{3i}')K_{1j} + (G_{2i}' - a_{12}^1 G_{1i} - a_{13}^2 G_{3i}')K_{2j} + (G_{3i}' + a_{13}^0 G_{1i}')K_{3j} - (G_{3i} + a_{13}^0 G_{1i})K_{3j}' \right] \Big|_0^H = 0.$$

Очевидно, что при наличии третьего соотношения (5.19) оно обращается в тождество при таких граничных условиях для компонентов K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} ядровой вектор-функции

$$K_{1j} = 0, \quad K_{2j} = 0, \quad K_{3j}' \pm \chi_3 K_{3j} = 0 \quad \text{при } x = 0, H. \quad (5.26)$$

Таким образом, сформированы две однородных краевых задачи (5.18), (5.19) и (5.25), (5.26) для определения ядровых собственных функций G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} и K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} , а также соответствующих им собственных значений λ_i и μ_j .

Рассмотрим теперь подробно решения этих задач. Поскольку система дифференциальных уравнений (5.18) с постоянными коэффициентами, то вводя матрицу-столбец $\bar{G}_i = \|G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}\|^T$ вектор-функции ядровой сопряженной задачи, представим (5.18) в матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{11} \right) & a_{21}^1 \frac{d}{dx} & \left(a_{31}^0 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{31} \right) \\ -a_{12}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{22}^2 + \lambda_i^2 I_{22} \right) & -a_{32}^1 \frac{d}{dx} \\ \left(a_{13}^0 \frac{d}{dx} + a_{13}^2 + \lambda_i^2 I_{13} \right) & -a_{23}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{33}^2 + \lambda_i^2 I_{33} \right) \end{array} \right\| \times \bar{G}(\lambda_i, x) = 0.$$

Отсюда следует такое разрешающее дифференциальное уравнение для $\bar{G}(\lambda_i, x) = \bar{G}_i$:

$$b_{0i} \frac{d^6 \bar{G}_i}{dx^6} + b_{2i} \frac{d^4 \bar{G}_i}{dx^4} + b_{4i} \frac{d^2 \bar{G}_i}{dx^2} + b_{6i} \bar{G}_i = 0. \quad (5.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{0i} &= 1 - a_{13}^0 a_{31}^0, \\ b_{2i} &= \lambda_i^2 [I_{11} + I_{33} + (1 - a_{13}^0 a_{31}^0)I_{22} - a_{31}^0 I_{13} - a_{31}^0 I_{31}] + a_{31}^0 a_{12}^1 a_{23}^1 + a_{13}^0 a_{22}^2 + \\ & \quad + a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{13}^0 a_{21}^1 a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{13}^0 - a_{22}^2 - a_{33}^2 - a_{23}^1 a_{32}^1, \end{aligned}$$



$$b_{4i} = \lambda_i^4 [I_{11} (I_{22} + I_{33}) + I_{22} (I_{33} - a_{31}^0 I_{13} - a_{13}^0 I_{31}) - I_{13} I_{31}] + \lambda_i^2 [I_{31} (a_{12}^1 a_{13}^1 + a_{13}^0 a_{22}^2 - a_{13}^2) - I_{11} (a_{22}^2 + a_{33}^2) - I_{22} (a_{33}^2 - a_{13}^0 a_{31}^0) + I_{33} (a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{22}^2) + a_{12}^1 a_{12}^1 I_{31} + a_{22}^2 a_{31}^1 I_{13} - a_{21}^1 a_{32}^1] + a_{22}^2 (a_{33}^2 + a_{13}^2 a_{31}^0) - a_{21}^1 (a_{32}^1 a_{13}^2 + a_{12}^1 a_{33}^2),$$

$$b_{6i} = \lambda_i^6 I_{22} (I_{11} I_{33} - I_{13} I_{31}) + \lambda_i^4 [I_{31} (a_{22}^2 I_{13} - a_{13}^2 I_{22}) - I_{11} (a_{33}^2 I_{22} + a_{22}^2 I_{33})] + \lambda_i^2 a_{22}^2 (a_{33}^2 I_{11} + a_{13}^2 I_{31}).$$

Оставляя два первых уравнения системы (5.18), т.е.

$$\left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{11}\right) & a_{21}^1 \frac{d}{dx} \\ -a_{12}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{22}^2 + \lambda_i^2 I_{22}\right) \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} G_{1i} \\ G_{2i} \end{matrix} \right\| = \left\| - \begin{pmatrix} a_{31}^0 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{31} \\ a_{32}^1 \frac{d}{dx} \end{pmatrix} G_{3i} \right\|,$$

выражаем компоненты G_{1i} , G_{2i} через G_{3i} . Принимая затем без ущерба общности:

$$G_{3i} = \left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{11}\right) & a_{21}^1 \frac{d}{dx} \\ -a_{12}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{22}^2 + \lambda_i^2 I_{22}\right) \end{pmatrix} \right\| \overline{G}(\lambda_i, x),$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} G_{1i} &= -a_{31}^0 \overline{G}^{IV}(\lambda_i, x) + [a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1 - \lambda_i^1 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22})] \overline{G}''(\lambda_i, x) + \\ &\quad + \lambda_i^2 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \overline{G}(\lambda_i, x), \\ G_{2i} &= (a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{12}^1) \overline{G}^{III}(\lambda_i, x) + \lambda_i^2 (a_{32}^1 I_{11} - a_{12}^1 I_{31}) \overline{G}'(\lambda_i, x), \\ G_{3i} &= \overline{G}^{IV}(\lambda_i, x) + [a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + \lambda_i^2 (I_{11} + I_{22})] \overline{G}''(\lambda_i, x) + \lambda_i^2 I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) \overline{G}(\lambda_i, x). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Решение разрешающего уравнения (5.27) записывается в экспоненциальной форме, т.е.

$$\overline{G}(\lambda_i, x) = \sum_{k=1}^6 C_{ki} \exp(\rho_{ki} x), \tag{5.29}$$

где ρ_{ki} ($k = 1, \dots, 6$) — корни характеристического бикубического уравнения

$$b_{0i} \rho^6 + b_{2i} \rho^4 + b_{4i} \rho^2 + b_{6i} = 0.$$

Имея в виду (5.29), компоненты G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} ядра КИП (5.28) принимают вид

$$\begin{aligned} G_{1i} &= \sum_{k=1}^6 \{ -a_{31}^0 \rho_{ki}^4 + [a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1 - \lambda_i^2 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22})] \rho_{ki}^2 + \\ &\quad + \lambda_i^2 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \} C_{ki} \exp(\rho_{ki} x); \\ G_{2i} &= \sum_{k=1}^6 [(a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{12}^1) \rho_{ki}^3 + \lambda_i^2 (a_{32}^1 I_{11} - a_{12}^1 I_{31}) \rho_{ki}] C_{ki} \exp(\rho_{ki} x); \\ G_{3i} &= \sum_{k=1}^6 \{ \rho_{ki}^4 + [a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + \lambda_i^2 (I_{11} + I_{22})] \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) \} C_{ki} \exp(\rho_{ki} x). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Собственные значения (параметры) λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) однородной краевой задачи (5.18), (5.19) и произвольные постоянные C_{ki} ($k = 1, \dots, 6$) определяются в результате подстановки выражений (5.30) в граничные условия (5.19). Имеем такую однородную систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^6 \delta_{mk}^i C_{ki} = 0, \quad m = 1, \dots, 6. \tag{5.31}$$



Здесь

$$\begin{aligned}
 \delta_{1k}^i &= \left[a_{31}^0 (a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{22}^2) - a_{32}^1 a_{21}^1 + \lambda_i^2 (a_{31}^0 I_{11} - I_{31}) \right] \rho_{ki}^2 + \\
 &\quad + \lambda_i^2 \left[a_{31}^0 I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right], \\
 \delta_{2k}^i &= (a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{12}^1) \rho_{ki}^3 + \lambda_i^2 \left[a_{32}^1 I_{11} - a_{12}^1 I_{31} \right] \rho_{ki}, \\
 \delta_{3k}^i &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) \rho_{ki}^5 - \chi_3 (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) \rho_{ki}^4 + \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{13}^0 (a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^3 - \chi_3 \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{31}^0 a_{22}^2 a_{13}^0 - a_{13}^0 a_{32}^1 a_{21}^1 + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{31}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right] \rho_{ki} - \\
 &\quad - \chi_3 \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{13}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right], \\
 \delta_{4k}^i &= \delta_{1k}^i \exp(\rho_{ki} H), \quad \delta_{5k}^i = \delta_{2k}^i \exp(\rho_{ki} H), \\
 \delta_{6k}^i &= \left\langle \left(1 - a_{31}^0 a_{13}^0 \right) \rho_{ki}^5 + \chi_3 (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) \rho_{ki}^4 + \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{13}^0 (a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^3 + \chi_3 \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{13}^0 (a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{31}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right] \rho_{ki} \right. \\
 &\quad \left. + \chi_3 \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{13}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right] \right\rangle \exp(\rho_{ki} H), \\
 &\quad k = 1, \dots, 6.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Дальнейшее решение очевидно. Разыскивая нетривиальные решения однородной системы (5.31) приравняем ее главный детерминант к нулю. В результате получаем такое трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_i , ($i = \overline{1, \infty}$):

$$D(\lambda_i) = \begin{vmatrix} \delta_{11}^i & \delta_{12}^i & \delta_{13}^i & \delta_{14}^i & \delta_{15}^i & \delta_{16}^i \\ \delta_{21}^i & \delta_{22}^i & \delta_{23}^i & \delta_{24}^i & \delta_{25}^i & \delta_{26}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{61}^i & \delta_{62}^i & \delta_{63}^i & \delta_{64}^i & \delta_{65}^i & \delta_{66}^i \end{vmatrix} = 0. \tag{5.33}$$

Отбрасывая первое уравнение (5.31), из оставшейся системы выражаем постоянные $C_{2i}, C_{3i}, \dots, C_{6i}$ через C_{1i} , т.е.

$$C_{2i} = C_{1i} A_{2i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{3i} = C_{1i} A_{3i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{4i} = C_{1i} A_{4i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{5i} = C_{1i} A_{5i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{6i} = C_{1i} A_{6i} A_{1i}^{-1},$$

где

$$A_{1i} = \begin{vmatrix} \delta_{22}^i & \delta_{23}^i & \delta_{24}^i & \delta_{25}^i & \delta_{26}^i \\ \delta_{32}^i & \delta_{33}^i & \delta_{34}^i & \delta_{35}^i & \delta_{36}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{62}^i & \delta_{63}^i & \delta_{64}^i & \delta_{65}^i & \delta_{66}^i \end{vmatrix}. \tag{5.34}$$

Определители $A_{2i}, A_{3i}, \dots, A_{6i}$ следуют из A_{1i} путем замены в (5.34) каждый раз соответственно первого, второго, третьего, четвертого и пятого столбцов на столбец

$$\left\| -\delta_{21}^i \quad -\delta_{31}^i \quad -\delta_{41}^i \quad -\delta_{51}^i \quad -\delta_{61}^i \right\|^T.$$

Не ограничивая общности рассуждений, принимаем

$$C_{1i} = A_{1i}. \tag{5.35}$$

В результате получаем

$$C_{2i} = A_{2i}, \quad C_{3i} = A_{3i}, \quad C_{4i} = A_{4i}, \quad C_{5i} = A_{5i}, \quad C_{6i} = A_{6i}. \tag{5.36}$$

Соотношения (5.30), (5.32), (5.34), (5.35), (5.36) и уравнение (5.33) представляют решение сопряженной ядровой задачи (5.18), (5.19).



Компоненты K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} вектор-функции $\overline{K}(\mu_j, x)$ ядра биортогонального КИП (5.5), (5.6) и трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений μ_j ($j = \overline{1, \infty}$) определяются аналогично предыдущему. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} K_{1j} &= - \sum_{j=1}^6 \left\{ a_{13}^0 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{13} + a_{13}^0 I_{22}) + a_{13}^2 - a_{13}^0 a_{22}^0 - a_{23}^1 a_{12}^1 \right] s_{kj}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu_j^4 I_{13} I_{22} + \mu_j^2 (a_{13}^2 I_{22} - a_{22}^2 I_{13}) - a_{13}^2 a_{22}^2 \right\} B_{kj} \exp(s_{kj} x) \\ K_{2j} &= - \sum_{j=1}^6 \left\{ (a_{23}^1 + a_{21}^1 a_{13}^0) s_{kj}^3 + \left[\mu_j^2 (a_{23}^1 I_{11} + a_{21}^1 I_{13}) + a_{13}^2 a_{21}^1 \right] s_{kj} \right\} B_{kj} \exp(s_{kj} x), \\ K_{3j} &= \sum_{j=1}^6 \left\{ s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{21}^1 a_{13}^2 - a_{22}^2) \right] s_{kj}^2 + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) \right\} B_{kj} \exp(s_{kj} x), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$D(\mu_j) = \begin{vmatrix} \Delta_{11}^j & \Delta_{12}^j & \Delta_{13}^j & \Delta_{14}^j & \Delta_{15}^j & \Delta_{16}^j \\ \Delta_{21}^j & \Delta_{22}^j & \Delta_{23}^j & \Delta_{24}^j & \Delta_{25}^j & \Delta_{26}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{61}^j & \Delta_{62}^j & \Delta_{63}^j & \Delta_{64}^j & \Delta_{65}^j & \Delta_{66}^j \end{vmatrix} = 0. \quad (5.38)$$

Здесь s_{kj} ($k = 1, \dots, 6$) — корни характеристического бикубического уравнения:

$$s^6 + g_{2j} s^4 + g_{4j} s^2 + g_{6j} = 0, \quad (5.39)$$

а B_{kj} — соответствующие детерминанты:

$$B_{1j} = \begin{vmatrix} \Delta_{22}^j & \Delta_{23}^j & \Delta_{24}^j & \Delta_{25}^j & \Delta_{26}^j \\ \Delta_{32}^j & \Delta_{33}^j & \Delta_{34}^j & \Delta_{35}^j & \Delta_{36}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{62}^j & \Delta_{63}^j & \Delta_{64}^j & \Delta_{65}^j & \Delta_{66}^j \end{vmatrix}. \quad (5.40)$$

B_{2j} , D_{3j} , ..., B_{6j} следуют из (5.40) путем замены каждый раз первого, второго, третьего, четвертого и пятого столбцов на столбец:

$$\| -\Delta_{21}^j \quad -\Delta_{31}^j \quad -\Delta_{41}^j \quad -\Delta_{51}^j \quad -\Delta_{61}^j \|^T.$$

Элементы Δ_{mk}^j ($m = 1, \dots, 6$) и коэффициенты g_{kj} определяют такими выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta_{1k}^j &= a_{13}^0 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{13} + a_{13}^0 I_{22}) + a_{13}^2 - a_{13}^0 a_{22}^0 - a_{23}^1 a_{12}^1 \right] s_{kj}^2 + \mu_j^4 I_{13} I_{22} + \\ &\quad + \mu_j^2 (a_{13}^2 I_{22} - a_{22}^2 I_{13}) - a_{13}^2 a_{22}^2, \\ \Delta_{2k}^j &= (a_{23}^1 + a_{21}^1 a_{13}^0) s_{kj}^3 + \left[\mu_j^2 (a_{23}^1 I_{11} + a_{21}^1 I_{13}) + a_{13}^2 a_{21}^1 \right] s_{kj}, \\ \Delta_{3k}^j &= s_{kj}^5 - \chi_3 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{21}^1 a_{13}^2 - a_{22}^2) \right] s_{kj}^3 - \chi_3 \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + \right. \\ &\quad \left. + a_{21}^1 a_{12}^1 - a_{22}^2 \right] s_{kj}^2 + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) s_{kj} - \chi_3 \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2), \\ \Delta_{4k}^j &= \Delta_{1k}^j \exp(s_{kj} H), \quad \Delta_{5k}^j = \Delta_{2k}^j \exp(s_{kj} H), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\Delta_{6k}^j = \left\{ s_{kj}^5 + \chi_3 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{21}^1 a_{12}^1 - a_{22}^2) \right] s_{kj}^3 + \chi_3 \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{21}^1 a_{12}^1 - a_{22}^2 \right] s_{kj}^2 + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) s_{kj} - \chi_3 \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) \right\} \exp(s_{kj} H),$$



$$\begin{aligned}
g_{2j} &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0)^{-1} \left\{ \mu_j^2 \left[I_{11} + I_{33} + (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) I_{22} - a_{13}^0 I_{31} - a_{31}^0 I_{13} \right] + \right. \\
&\quad \left. + a_{12}^1 (a_{21}^1 + a_{23}^1 a_{31}^0) + a_{13}^0 (a_{22}^2 a_{31}^0 - a_{21}^1 a_{32}^1) - a_{22}^2 - a_{23}^2 - a_{31}^0 a_{13}^0 - a_{32}^1 a_{23}^1 \right\}, \\
g_{4j} &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0)^{-1} \left\{ \mu_j^4 \left[I_{11} + (I_{22} + I_{33}) + I_{22} (I_{33} - a_{13}^0 I_{31}) - I_{13} (I_{31} - a_{31}^0 I_{22}) \right] - \right. \\
&\quad - \mu_j^2 \left[I_{11} (a_{22}^2 + a_{33}^2 - a_{32}^1 a_{23}^1) \right] + I_{22} (a_{33}^2 + a_{31}^0 a_{13}^0) + I_{33} (a_{22}^2 - a_{21}^1 a_{12}^1) + I_{13} (a_{21}^1 a_{13}^0 - a_{22}^2 a_{31}^0) + \\
&\quad \left. + I_{31} (a_{13}^2 - a_{12}^1 a_{23}^1 - a_{22}^2 a_{13}^0) \right] + a_{33}^2 (a_{22}^2 - a_{21}^1 a_{12}^1) + I_{13} (a_{22}^2 a_{31}^0 - a_{21}^1 a_{32}^1) \left. \right\}, \\
g_{6i} &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0)^{-1} \left\{ \mu_j^6 \left[I_{22} (I_{11} I_{33} - I_{13} I_{31}) \right] + \mu_j^4 \left[I_{11} (a_{22}^2 I_{33} - a_{33}^2 I_{22}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \mu_j^2 a_{22}^2 (a_{33}^2 I_{11} + a_{13}^2 I_{31}) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Соотношения (5.37)–(5.42), включая уравнения (5.38), (5.39), представляют решение инвариантной ядровой задачи (5.25), (5.26).

Применяя к выражению (5.16) формулы обращения (5.6), получаем окончательно такие спектральные разложения для функций перемещений трехслойной цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i (t - \tau) d\tau \right] K_1(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
W(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i (t - \tau) d\tau \right] K_2(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
\psi(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i (t - \tau) d\tau \right] K_3(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Здесь трансформанты $\varphi_0(\lambda_i)$, $\dot{\varphi}_0(\lambda_i)$, $F(\lambda_i, t)$ определяются соотношениями (5.17), компоненты G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} и K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} двух ядровых функций КИП (5.5), (5.6) по формулам (5.30), (5.37), а параметры λ_i , μ_j являются корнями трансцендентных уравнений (5.33), (5.38). Скалярное произведение $(\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}$ в разложениях (5.43) вычисляется квадратурой (5.8) с учетом равенств (5.30), (5.37).

В заключение можно сформулировать такие выводы.

1. Метод КИП является одним из наиболее эффективных аналитических способов решения линейных начально-краевых задач математической физики для тел конечных размеров и представляет перспективное направление в сложнейшей проблеме интегрируемости дифференциальных уравнений. Его достоинством является возможность определения в процессе решения всех компонентов, входящих в формулу обращения без какой-либо априорной информации.

2. В случаях, когда исследуются самосопряженные начально-краевые задачи, решения, построенные методом КИП и классическим методом разложения по собственным вектор-функциям, тождественно совпадают, хотя, первый из них является более предпочтительным, так как позволяет сразу перейти к анализу неоднородной краевой задачи, минуя предварительный этап определения собственных значений и соответствующих собственных функций. Достоинством метода КИП следует считать также возможность построения замкнутых внутри рассматриваемой области решений без дополнительных процедур, и тогда, когда граничные условия задачи неоднородные.

3. Структурный алгоритм метода биортогональных КИП, в процедуре которого предусмотрено выделение сопряженного оператора, является единственно возможной формой решения несамосопряженных начально-краевых задач, поскольку классический способ разложения по собственным вектор-функциям, дополненный указанной процедурой, автоматически становится методом КИП. Таким образом, КИП представляют наиболее общую алгоритмическую процедуру метода разложения по собственным вектор-функциям.



Библиографический список

1. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М: Высш. шк., 1978. 432 с.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М: Физматгиз, 1962. 768 с.
3. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 264 с.
4. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. М: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
5. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.
6. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 176 с.
7. Сеницкий Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991, № 4. С. 57–63.
8. Сеницкий Ю. Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования // Изв. вузов. Математика. 1991, № 9. С. 56–59.
9. Сеницкий Ю. Э. О связи методов Бубнова – Галеркина и конечных интегральных преобразований // Краевые задачи для уравнений математической физики. Куйбышев: КГПИ, 1990. С. 96–101.
10. Сеницкий Ю. Э. Обобщенные биортогональные конечные интегральные преобразования и их приложение к нестационарным задачам механики // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 4. С. 474–477.
11. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1996. № 8. С. 71–81.
12. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Гостехиздат, 1954. 352 с.
13. Лычев С. А., Сеницкий Ю. Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнoнауч. сер. Спец. выпуск. 2002. С. 16–38.
14. Сеницкий Ю. Э. Вторая связанная динамическая задача термоупругости для плоского слоя // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 11. С. 22–28.
15. Сеницкий Ю. Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра // ПММ. 1993. Т. 57, № 1. С. 116–122.
16. Сеницкий Ю. Э. Об интегрируемости начально-краевой задачи динамики для неоднородной полой сферической оболочки // Вестн. Самар. гос. ун-та. 1998. № 2(8). С. 106–121.
17. Сеницкий Ю. Э. К проблеме интегрируемости осесимметричной краевой задачи динамики для неоднородного анизотропного конечного цилиндра // Прикладная механика. 1999. Т. 35, № 4. С. 19–29.
18. Сеницкий Ю. Э. Динамика неоднородной неполой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 144–157.
19. Сеницкий Ю. Э. Динамическая задача теории упругости для анизотропного конечного толстостенного цилиндра с учетом сил вязкого сопротивления // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2008. № 2(61). С. 248–262.
20. Сеницкий Ю. Э. Метод конечных интегральных преобразований. Его перспективы в исследовании краевых задач механики (обзорная статья) // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. математическая. 2003. Вып. 22. С. 10–39.
21. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.
22. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
23. Сеницкий Ю. Э. О вычислении некоторых квадратур, содержащих цилиндрические функции // Расчет пространственных строительных конструкций: сб. тр. Куйбышев, 1974. Вып. 4. С. 102–104.
24. Сеницкий Ю. Э. О некоторых тождествах, используемых при решении краевых задач методом конечных интегральных преобразований // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1636–1638.
25. Сеницкий Ю. Э., Лычев С. А. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложение // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8. С. 60–69.
26. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
27. Сеницкий Ю. Э. Динамическая задача для неоднородного стержня из неустойчивого материала при действии продольно-поперечной нагрузки // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2009. № 2(19). С. 78–89.
28. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 789 с.
29. Рисс Ф., Сакефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 500 с.
30. Сеницкий Ю. Э. Теорема разложения по собственным вектор-функциям в динамической теории упругости // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2000. № 4(18). С. 114–127.
31. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 399 с.
32. Сеницкий Ю. Э., Сеницкий А. Ю. К проблеме разложения по собственным вектор-функциям в нестационарных начально-краевых задачах динамики оболочек



вращения // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2004. Вып. 30. С. 83–91.

33. Сеницкий Ю. Э., Сеницкий А. Ю. О вычислении скалярного произведения в формуле обращения биортогонального конечного интегрального преобразования // Математическое моделирование и краевые задачи:

тр. 6-й межвуз. конф. Самара, 1996. Ч. 2. С. 93–94.
34. Сеницкий Ю. Э., Козьма И. Е. Дифференциальные уравнения колебаний трехслойных ортотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Тр. XXI Международ. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 2005. С. 207–216.

УДК 532.517.2:534.2

ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ

Б. А. Снигерев, К. М. Алиев¹, Ф. Х. Тазюков¹

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, лаборатория моделирования технологических процессов;
¹ Казанский государственный технологический университет, кафедра теоретической механики и сопротивление материалов
E-mail: snigerev@mail.knc.ru, alievmm@rambler.ru, Tazyukov@mail.ru

Работа посвящена моделированию медленного движения вязкоупругой жидкости со свободной поверхностью, реализующейся при входе полимерной жидкости в формующую насадку и выхода из нее. Движение жидкости описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии, дополненными реологическим уравнением состояния среды Гиезекуса. На основе метода конечных элементов разработан устойчивый численный алгоритм решения задачи. Проведены численные исследования по определению формы выходной струи для различных режимов течения и формы насадки. Исследована картина распределения скорости жидкости, давления, напряжений и температуры при увеличении степени нагрева стенки насадки. Получены численные результаты зависимости эффекта разбухания полимера от параметров реологической модели и температурных факторов.

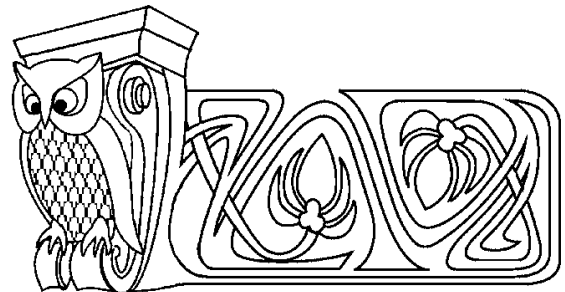
Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, реологическая модель Гиезекуса, течение со свободной поверхностью.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в промышленности переработки полимеров большое внимание уделяется интенсификации существующих процессов и производств, при этом все больше внимания уделяется качеству производимых изделий. Индустрия переработки полимерных материалов базируется в основном на двух основных типах производств — литье под давлением и экструзия [1, 2]. Под термином «экструзия» имеется в виду непрерывный процесс формования длинномерных изделий, заключающийся в придании материалу требуемой формы в результате продавливания его через профилирующий канал. Экструзия дает возможность формовать погонажные профильные изделия, прежде всего пленки во всем их многообразии и длинномерные профили, включая трубы и профильные уплотнения. При помощи литья под давлением производится огромное многообразие объемных изделий.

Экспериментальные и теоретические исследования [1, 2] показывают, что характер течения полимерной жидкости в формующих элементах насадки (фильере) и в выходной струе определяется совокупностью факторов, которые можно разделить на три группы:

– гидродинамические и реологические факторы: расход массы в насадке, определяемый производительностью перерабатываемого оборудования; геометрические характеристики формующей насадки;



Creeping Flow of Viscoelastic Fluid with Free Surface at Non-Isothermal Condition

B. A. Snigerev, K. M. Aliev¹, F. Kh. Tazyukov¹

Institute of Mechanics and Engineering RAS, Kazan, Laboratory of Modelling of Technological Processes;

¹ Kazan State Technological University, Chair of Mechanical Engineering

E-mail: snigerev@mail.knc.ru, alievmm@rambler.ru, Tazyukov@mail.ru

Numerical simulation flow of viscoelastic fluid with free surface, which is realized in entrance and output flow in extrusion die was performed. The flow of liquid is described by equations of conservation of mass, momentum and thermal energy with rheological constitutive equation of Giesekes. On basis of finite element method the stable numerical scheme was developed to solve this problem. Different numerical experiments was performed to define the configuration of outflow jet in various regimes and construction of die. The distribution of flow velocity fields, pressure and temperature are investigated on dependence of heating the walls. The ratio of extrusion in dependence of parameters the rheological model are investigated.

Key words: viscoelastic fluid, Giesekes model, free surface flow.