Поэтому из (10), (14) и (16) мы выводим следующий результат

Теорема 1. *Для любой дискретной функции $f(x)$, заданной на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, справедливо следующее равенство*

$$f(x) = \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right) + \frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{N-3}\hat{g}_k\tau_k^1(x-1, N-2), \quad (25)$$

в котором коэффициенты $\hat{g}_k$ определены с помощью равенства (24).

Рассмотрим частичные суммы конечного ряда (25) следующего вида:

$$S_{n,N}^{-1}(f,x) = \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right) + \\ + \frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{n}\hat{g}_k\tau_k^1(x-1, N-2). \quad (26)$$

Из равенства (26) видно, что $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ совпадают в концевых точках $x=0$ и $x=N-1$ с исходной функцией $f(x)$, т. е. $S_{n,N}^{-1}(f,x) = f(0)$, $S_{n,N-1}^{-1} = f(N-1)$.

Следует отметить, что полиномы $\tau_n^{-1}(x,N) = \lim\limits_{\alpha,\beta\to-1}\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ не образуют ортонормированной системы на Ω_N. Тем не менее $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов степени n. Можно показать, что $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ как аппарат приближения дискретных функций не уступает суммам Фурье–Чебышева по полиномам Чебышева $\tau_n^{-\frac12,-\frac12}(x,N)$. Отметим еще, что конструкция сумм $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ столь же проста, как конструкция конечных рядов Фурье по ортогональным полиномам. Но она является более удобной с точки зрения численной реализации, так как в выражении, определяющем коэффициенты $\tilde{g}_k$, фигурирующие в конструкции сумм $S_{n,N}^{-1}(f,x)$, не участвует весовая функция типа $\dfrac{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$, которая в случае $\alpha<0$ привела бы к существенным вычислительным сложностям. Это обстоятельство вместе с (1) делают суммы $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ весьма привлекательным инструментом для решения задач, связанных с аппроксимацией дискретных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с. [*Sharapudinov I. I.* Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications. Makhachkala : Dagestan. nauch. center RAN, 2004. 276 p.]

УДК 517.518.8

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2\pi}^{p(x)}$

Т. Н. Шах-Эмиров

Дагестанский научный центр, Махачкала
E-mail: Tadgius@gmail.com

В работе рассмотрены аппроксимативные свойства линейных средних типа Норлюнда $\mathcal{N}_n(f,x)$ и Рисса $\mathcal{R}_n(f,x)$ для тригонометрических рядов Фурье в пространстве Лебега с переменным показателем $L_{2\pi}^{p(x)}$. При определенных условиях на методы суммирования Норлюнда и Рисса доказано, что если $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ $(0<\alpha\le1)$, то $\|f-\mathcal{N}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$, $\|f-\mathcal{R}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$.

Ключевые слова: пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, модуль непрерывности.

Approximation Properties of Some Types of Linear Means in Space $L_{2\pi}^{p(x)}$

T. N. Shakh-Emirov

Approximative properties of Norlund $\mathcal{N}_n(f,x)$ and Riesz $\mathcal{R}_n(f,x)$ means for trigonometric Fourier series in Lebesgue space of variable exponent $L_{2\pi}^{p(x)}$ are considered. Under certain conditions on Norlund and Riesz summation methods it is proved that the estimates $\|f-\mathcal{N}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$, $\|f-\mathcal{R}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$ hold for $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ $(0<\alpha\le1)$.

Key words: Lebesgue and Sobolev spaces of variable exponent, module of continuity.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $p(x)$ — неотрицательная измеримая 2π-периодическая функция. Через $L_{2\pi}^{p(x)}$ обозначим множество измеримых 2π-периодических функций таких, что $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)}\,dx < \infty$, а через $W^{p(x)}$ — класс абсолютно непрерывных на периоде функций, производная которых принадлежит $L_{2\pi}^{p(x)}$. Если $p(x) \geq 1$, то одна из эквивалентных норм в $L_{2\pi}^{p(x)}$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\gamma > 0 \Big| \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{f(x)}{\gamma}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ введем в рассмотрение функцию Стеклова:

$$s_h(f)(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+t)\,dt$$

и модуль непрерывности [1]

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0<h\leq\delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)}.$$

Через $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ обозначим класс Липшица с показателем α в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, состоящий из функций $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, для которых имеет место неравенство

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} \leq M\delta^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leq 1).$$

Для дальнейшего потребуются следующие обозначения:

$$\underline{p} = \operatorname{ess}\inf_{x\in[0,2\pi]} p(x), \qquad \bar{p} = \operatorname{ess}\sup_{x\in[0,2\pi]} < \infty.$$

Кроме того, мы будем считать, что переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет следующему условию Дини–Липшица:

$$|p(x) - p(y)| \ln\frac{2\pi}{|x-y|} \leq C, \qquad x, y \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

Класс 2π-периодических переменных показателей $p(x)$, удовлетворяющих условию $1 \leq p(x) \leq \bar{p}$ и условию Дини–Липшица (1), обозначим через $\mathcal{P}$. Подкласс класса $\mathcal{P}$ — удовлетворяющих дополнительному условию $1 < \underline{p} \leq p(x)$, — обозначим через $\hat{\mathcal{P}}$.

Пусть дан ряд Фурье функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$:

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Обозначим через $S_n(f)(x)$ n-ю частичную сумму этого ряда:

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Пусть теперь $\{p_n\}_0^\infty$ — последовательность положительных чисел. Рассматриваются два типа линейных средних:

$$\mathcal{N}_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} S_m(f)(x), \qquad \mathcal{R}_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m S_m(f)(x),$$

где $P_n = \sum\limits_{m=0}^{n} p_n$. Средние $N_n(f)(x)$ и $R_n(f)(x)$ называются средними Норлюнда и Рисса соответственно [2–4].

Последовательность положительных вещественных чисел $\{p_n\}_0^\infty$ называется почти монотонно убывающей (возрастающей), если существует константа c, зависящая только от самой $\{p_n\}_0^\infty$, такая, что для всех $n \geq m$ выполняется

$$p_n \leq c p_m \qquad (p_n \geq c p_m).$$

Для краткости введем обозначения $\{p_n\}_0^\infty \in$ ПМУП ($\{p_n\}_0^\infty \in$ ПМВП), $\Delta g_n = g_n - g_{n+1}$.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$, $0 < \alpha < 1$, $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ *и* $\{p_n\}_0^\infty$ *— последовательность положительных чисел. Если* $\{p\}_0^\infty \in$ *ПМУП, или* $\{p\}_0^\infty \in$ *ПМВП и* $(n+1)p_n = O(P_n)$, *то для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место оценка*

$$\|f - \mathcal{N}_n(f)\|_{p(\cdot)} = \mathrm{C}Mn^{-\alpha}.$$

Теорема 2. *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$, $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1, M)$ *и* $\{p_n\}_0^\infty$ *— последовательность положительных чисел. Если* $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k|\Delta p_k| = O(P_n)$, *или* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\Delta p_k| = O\left(P_n/n\right)$, *то для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место оценка*

$$\|f - \mathcal{N}_n(f)\|_{p(\cdot)} = CMn^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$, $0 < \alpha \le 1$, $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ *и* $\{p_n\}_0^\infty$ *— последовательность положительных чисел. Если*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \Delta\left(\frac{P_k}{k+1}\right) \right| = O\left(\frac{P_n}{n+1}\right),$$

то для $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место оценка*

$$\|f - \mathcal{R}_n(f)\|_{p(\cdot)} = CMn^{-\alpha}.$$

Отметим, что впервые аналогичные результаты для классов

$$\mathrm{Lip}(\alpha, p(x, M)) = \left\{ f \in L_{2\pi}^{p(x)} : \Omega_{p(x)}(f, \delta) \le M\delta^\alpha, \delta > 0 \right\},$$

где $\Omega_{p(x)}(f,\delta) = \sup\limits_{|h|<\delta} \|T_h(f)\|_{p(\cdot)}$, $\delta > 0$, $T_h(f)(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt$, были получены в работе [2]. Из определений величин $\Omega_{p(x)}(f,\delta)$ и $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}$ непосредственно вытекает, что $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} \le \Omega_{p(x)}(f,\delta)$ и, следовательно, $\mathrm{Lip}(\alpha, p(x))$ являются подклассами соответствующих классов $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$, введенных в настоящей работе. Поэтому основные результаты, полученные в работе [2], являются следствиями теорем 1–3. При этом следует отметить, что соотношение $\lim\limits_{\delta\to 0} \Omega_{p(x)}(f,\delta) = 0$ в работе [2] выводится из свойства ограниченности максимальной функции Харди–Литтльвуда в $L_{2\pi}^{p(x)}$, доказанного в [5] при $p_- > 1$. Однако если $p_- = 1$, то максимальная функция, вообще говоря, не ограничена в $L_{2\pi}^{p(x)}$. Это обстоятельство не позволяет рассматривать величину $\Omega_{p(x)}(f,\delta)$ в качестве модуля непрерывности в том случае, когда $p_- = 1$, поскольку в этом случае мы не можем утверждать, что для любой функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ величина $\Omega_{p(x)}(f,\delta)$ будет стремиться к нулю, когда δ стремится к нулю. В этом можно убедиться на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\ln x)^2}, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Кроме того, в [1] показано, что для произвольного $p(x) \in \mathcal{P}$ имеет место соотношение $\lim\limits_{\delta\to 0} \Omega_{p(\cdot)}(f,\delta) = 0$, следовательно, величина $\Omega_{p(\cdot)}(f,\delta)$, используемая в настоящей работе, является модулем непрерывности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ и в том случае, когда $p_- = 1$.

Замечание. Можно показать, что классы $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ шире классов $\mathrm{Lip}(\alpha, p(x), \mathrm{M})$ не только в случае, когда $p(x) \in \mathcal{P}$, но также тогда, когда $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}$. Но в рамках настоящей статьи мы на этом не остановимся.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$, T_n — множество тригонометрических полиномов степени не выше n. Через $E_n(f)_{p(\cdot)}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами степени не выше n:

$$E_n(f) = \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{p(\cdot)}.$$

Приведем теорему о неравенстве типа Джексона, доказанную И. И. Шарапудиновым в [1].

Теорема 4. *Если $p(x) \in \mathcal{P}$ и $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, то*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le C(p)\Omega(f, 1/n)_{p(\cdot)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 1. *Пусть $p \in \hat{\mathcal{P}}$ и $0 < \alpha \le 1$. Тогда для любой $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ верна оценка*

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} \le CMn^{-\alpha} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказывается с использованием теоремы 4 и аппроксимативных свойств частичных сумм S_n.

Лемма 2. *Пусть $p \in \hat{\mathcal{P}}$. Если $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1, M)$, то $f(x)$ абсолютно непрерывна и $f' \in L^{p(x)}$, т. е. $f \in W^{p(x)}$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1)$ и $\delta > 0$. Так как $\underline{p} \le p(x)$ почти всюду по теореме 2.8 из [6]

$$\left\| \frac{1}{h} \int\limits_0^h [f(x+t) - f(x)]\, dt \right\|_{\underline{p}} \le c \left\| \frac{1}{h} \int\limits_0^h [f(x+t) - f(x)]\, dt \right\|_{p(\cdot)}$$

для каждого h такого, что $|h| \le \delta$. Из этого неравенства и эквивалентности $\omega_{\underline{p}}(f, *)$ и $\Omega(f, *)_{p(\cdot)}$ получаем:

$$\omega_{\underline{p}}(f, *) \le c\Omega(f, *)_{p(\cdot)}.$$

Следовательно, из принадлежности f классу $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1)$ выполняется соотношение $\omega_{\underline{p}}(f, *) = O(\delta)$, а это означает, что f абсолютно непрерывна и $f' \in L^{\underline{p}}$ ([7, с. 51–54]) Так как $(f(x+t) - f(x))/t \to f'(x)$, $t \to 0$ почти всюду, почти для всех x получаем

$$\frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \to |f'(x)|, \qquad \delta \to 0^+.$$

Так как $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ удовлетворяют условию $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\, dx < \infty$, $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$ по всем $g(x) \in L_{2\pi}^{p'(x)}$ $(p'(x) = \dfrac{p(x)}{p(x) - 1})$, то лемма будет верна при выполнении этого условия для $f'(x)$.

По лемме Фату для каждой измеримой функции $g(x)$ такой, что $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$,

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(x)||g(x)|\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \left(\lim_{\delta \to 0^+} \frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \right) |g(x)|\, dx \le$$

$$\le \liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \right) |g(x)|\, dx.$$

Применяя интегрирование по частям получаем

$$\liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \right) |g(x)|\, dx =$$

$$= \liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{2}{\delta} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau \Big|_{\delta/2}^{\delta} + \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{1}{t^2} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau\, dt \right) \right| |g(x)|\, dx \le$$

$$\le \liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{2}{\delta} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau \Big|_{\delta/2}^{\delta} + \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{1}{t^2} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau\, dt \right) \right| |g(x)|\, dx \le$$

$$\le \liminf_{\delta \to 0^+} \left(\frac{2}{\delta} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{1}{t} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau \Big|_{\delta/2}^{\delta} \right| |g(x)|\, dx + \right.$$

$$+\frac{2}{\delta}\int_0^{2\pi}\left|\int_{\delta/2}^{\delta}\frac{1}{t^2}\int_0^t[f(x+\tau)-f(x)]d\tau\,dt\right||g(x)|\,dx\Bigg)\le$$

$$\le\liminf_{\delta\to 0^+}\frac{2}{\delta}(\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}+\frac{1}{2}\Omega(f,\frac{\delta}{2})_{p(\cdot)}+(1+r_p([0,2\pi])\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)})\le CM.$$

Здесь $r_p([0,2\pi])=\frac{1}{\underline{p}}+\frac{1}{\overline{p}}<2$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $p(x)\in\hat{\mathcal{P}}$ *и* $f\in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1,M)$. *Тогда для* $n=1,2,\dots$ *верна оценка*

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f)\|_{p(\cdot)}\le CMn^{-1},$$

где $\sigma_n(f)(x)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{n}S_m(f)(x)$.

Доказательство. Следует из предыдущей леммы, равномерной ограниченности частичных сумм $S_n(f)(x)$ и того факта, что для произвольной $f\in L_{2\pi}^{p(x)}$ и ее сопряженной функции $\tilde{f}(x)$ имеет место неравенство $\|\tilde{f}\|_{p(\cdot)}\le c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$, где $c(p)$ — некоторая константа, зависящая только от переменного показателя p.

Теоремы 1–3 доказываются аналогично теоремам 1–3 в [2] с помощью приведенных выше лемм.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а)

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2011. Т. 5. С. 108–118. [*Sharapudinov I. I.* Some problems in approximation theory by trigonometric polynomials in $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Math. Forum (Itogi nauki. The South of Russia). 2011. Vol. 5. P. 108–118.]
2. *Guven A., Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces Lp(x) // J. of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.
3. *Chandra P.* Approximation by Nörlund operators// Mat. Vestnik. 1986. Vol. 38. P. 263–269.
4. *Chandra P.* A note on degree of approximation by Nörlund and Riesz operators// Mat. Vestnik. 1990. Vol. 42. P. 9–10.
5. *Diening L.* Maximal function on generalized Lebesgue spaces Lp(·)// Math. Inequal. Appl. 2004. Vol. 7. P. 245–253.
6. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$// Czechoslovak Math. J. 1991. Vol. 41, № 4. P. 592–618.
7. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Vol. 303 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Berlin : Springer-Verlag, 1993.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ С РАЗНЫМИ ПОРЯДКАМИ НА РАЗНЫХ РЕБРАХ

В. А. Юрко

Саратовский государственный университет
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов переменных порядков на компактных звездообразных графах. Приведена теорема единственности восстановления потенциалов по матрицам Вейля. Получено конструктивное решение обратной задачи.

Ключевые слова: звездообразные графы, дифференциальные операторы переменных порядков, обратные спектральные задачи.

Recovering Differential Operators on Star-Type Graphs with Different Orders on Different Edges

V. A. Yurko

An inverse spectral problem is studied for variable orders differential operators on compact star-type graphs. A uniqueness theorem of recovering potentials from the Weyl matrices is provided. A constructive solution of the inverse problem is obtained.

Key words: star-type graphs, variable orders differential operators, inverse spectral problems.