Библиографический список

1. *Рябенький В. С.* Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232–237.

2. *Родионов А. В.* О методе В. С. Рябенького – Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 3. С. 82–96.

Solution of Partial Differential Equations by the Ryabenky Method

A. V. Rodionov

Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, Lenina st., 125, rodionovalexandr@mail.ru

The paper discusses the generalizations of the method Ryabenky approximate solutions of partial differential equations to the case of the use of arbitrary distributions Parallelepipedal nets for integral lattices.

Key words: partial differential equation, number theoretic method.

References

1. Ryabenky V. S. A method for obtaining difference schemes andthe use of nets teoretikochislovyh for solutionthe finite difference method. *Tr. matem. in-ta im. V. A. Steklova.* [Tr. Math. Inst. V. A. Steklov], 1961, vol. 60, pp. 232–237 (in Russian).

2. Rodionov A. V. On the method of V. S. Ryabenky – N. M. Korobov approximate solutions of partial differential equations. *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshevsky collection], 2009, vol. 10, iss. 3, pp. 82–96 (in Russian).

УДК 512.55

НОВЫЕ СВОЙСТВА МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Т. В. Скорая[1], А. В. Швецова[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, skorayatv@yandex.ru,

[2]Аспирант кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, Федеральный научно-производственный центр ОАО «Научно-производственное объединение «Марс», shvesovaav@rambler.ru

В работе представлены два новых результата, касающиеся многообразий алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Доказано достаточное условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница. Найден базис тождеств и базис полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, многообразие алгебр, числовые характеристики, кодлина, полилинейная компонента.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Работа посвящена изучению новых свойств многообразий алгебр Лейбница. Характеристика основного поля Φ предполагается равной нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в работе [1]. В статье представлено два новых результата в этой области. Первый результат принадлежит А. В. Швецовой и содержит доказательство достаточного условия конечности кодлины многообразий алгебр Лейбница. Второй результат принадлежит Т. В. Скорой. В нем найден базис тождеств и базис пространства полилинейных элементов многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница.

Линейная алгебра с билинейным произведением, удовлетворяющая тождеству Лейбница $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$ называется алгеброй Лейбница. Возможно, впервые это понятие было рассмотрено в работе [2], как обобщение понятия алгебры Ли. Тождество Лейбница позволяет любой элемент представить в виде линейной комбинации элементов, в которых скобки расставлены слева направо. Поэтому договоримся, что в дальнейшем будем опускать скобки в левонормированных произведениях, то есть $(((ab)c)\dots d) = abc\dots d$. Многообразием $\mathbf{V}$ линейных алгебр над полем Φ называется совокупность алгебр над этим полем, удовлетворяющих фиксированному набору тождественных соотношений. Отметим, что система тождеств может быть задана неявно. В этом случае многообразие обычно определяется порождающей алгеброй, заданной конструктивно.

Пусть $F(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$ со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Рассмотрим пространство полилинейных элементов алгебры $F(X, \mathbf{V})$, которое обозначим $P_n(\mathbf{V})$ и назовем полилинейной компонентой многообразия $\mathbf{V}$. На этом пространстве естественным образом вводится действие перестановок, что позволяет рассматривать его как ΦS_n-модуль, где S_n — симметрическая группа. Так как поле Φ имеет нулевую характеристику, то пространство $P_n(\mathbf{V})$, раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Обозначим через χ_λ характер неприводимого подмодуля, соответствующего разбиению λ числа n. Тогда характер модуля $P_n(\mathbf{V})$ выражается формулой

$$\chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{1}$$

где m_λ — кратности неприводимых подмодулей в указанной сумме.

Важной числовой характеристикой многообразия $\mathbf{V}$ линейных алгебр является кодлина $l_n(\mathbf{V})$, которая определяется как число слагаемых в разложении характера в сумму неприводимых:

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda. \tag{2}$$

Будем говорить, что кодлина многообразия $\mathbf{V}$ конечна, если существует такая константа C, не зависящая от n, что для любого n выполнено неравенство $l_n(\mathbf{V}) \le C$.

Оператор умножения справа, например, на элемент z обозначим через Z, считая, что $xz = xZ$. Это обозначение позволяет элемент $x\underbrace{y\dots y}_{n}$ записывать в виде xY^n. Напомним, что стандартный полином степени n имеет вид: $St_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q \in S_n} (-1)^q x_{q(1)} x_{q(2)} \dots x_{q(n)}$, где суммирование ведется по элементам симметрической группы, а $(-1)^q$ равно $+1$ или -1 в зависимости от четности перестановки q. Договоримся переменные, входящие в стандартный полином обозначать специальными символами сверху (чертой, волной и так далее). Например, стандартный полином степени n от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем записывать следующим образом: $St_n = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n$.

2. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ КОДЛИНЫ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Ранее А. В. Швецовой были определены необходимые условия конечности кодлины многообразий алгебр Лейбница. Далее рассматриваются достаточные условия ее конечности.

Следуя работе [3], будем обозначать многообразие всех алгебр Лейбница (алгебр Ли), определенных тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4)\dots(x_{2s+1}x_{2s+2}) \equiv 0$, через $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ (соответственно $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$). Пусть, кроме того, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2\mathbf{A}$ — многообразие всех алгебр Ли, коммутант которых нильпотентен ступени не выше двух, а $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ — многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{V}$ — подмногообразие многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$, в котором для некоторых натуральных k, m, $k \le m$, и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Phi$ выполнено тождество*

$$xY^kzY^{m-k} \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i xY^{k-i}zY^{m-k+i}. \tag{3}$$

Тогда многообразие $\mathbf{V}$ имеет конечную кодлину.

Доказательство. Поскольку тождество (3) не выполняется в многообразиях $\mathbf{V}_1$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, то из условий теоремы следует, что $\mathbf{V_1}, \widetilde{\mathbf{V}}_1 \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N_s}\mathbf{A}}$. Тогда по теореме 1 работы [4] существует константа C, не зависящая от n, для которой в сумме (1) верно условие $(n - \lambda_1) < C$. В этом случае в сумме (2) число ненулевых слагаемых ограничено константой, не зависящей от n. Таким образом, для доказательства результата достаточно установить, что все кратности m_λ ограничены константой, также не зависящей от n.

В работе [5] доказано, что кратность $m_\lambda(\mathbf{V})$ совпадает с числом линейно независимых полиоднородных элементов специального вида. Мы покажем, что размерность всего пространства полиоднородных элементов ограничена константой, не зависящей от n, что и завершит доказательство.

Рассмотрим λ, для которого $m_\lambda \neq 0$. Для такого разбиения выполняется условие $(n - \lambda_1) < C$ и ему будут соответствовать мономы вида $g_s = Y^{\alpha_1} x_{i_1} Y^{\alpha_2} x_{i_2} Y^{\alpha_3} \dots Y^{\alpha_s} x_{i_s} Y^{\alpha_{s+1}}$, где $s < C$. Обозначим пространство, порожденное элементами g_s через Q_{λ_1}. Докажем, что число линейно независимых мономов g_s ограничено константой. Доказательство проведем индукцией по числу s образующих x_i и лексикографичексому порядку на строках вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1})$.

Рассмотрим случай $s = 1$. Тогда порождающие мономы пространства Q_{λ_1} имеют вид: $Y^{\alpha_1} x_1 Y^{\alpha_2}$. Если для этих элементов выполнены условия $\alpha_1 \geq m$ и $\alpha_2 \geq m$, то по тождеству (3) их можно представить в виде линейной комбинации элементов, в которых $\alpha_1 < m$. Таким образом, любой моном выражается через те, у которых либо только $\alpha_1 \geq m$, либо только $\alpha_2 \geq m$. Число таких мономов ограничено $2m$, константой, не зависящей от n.

В общем случае пространство Q_{λ_1} будет порождаться элементами, у которых только одно α_i не меньше tm. Заметим, что общее количество таких элементов ограничено константой, не зависящей от n.

Пусть i — наименьший индекс, для которого $\alpha_i \geq tm$. Рассмотрим соответствующий элемент: $g_s = yY^{\alpha_1} x_{t_1} Y^{\alpha_2} \dots Y^{\alpha_i} x_{t_i} Y^{\alpha i+1} \dots Y^{\alpha_s} x_{t_s} Y^{\alpha_{s+1}}$. Если при этом $\alpha_{i+1} \geq tm$, то тождество (3) позволяет привести элемент g_s к линейной комбинации слов, меньших лексикографически. Если же $\alpha_{i+1} < tm$, то по модулю слов, меньших лексикографически, элемент g_s представим в виде $Y^{\alpha_1} x_{t_1} \dots Y^{\alpha_i - \alpha_{i+1} - 1} \underbrace{(y(y \dots (yx_{t_i}) \dots))}_{\alpha_{i+1}+1} \underbrace{(y(y \dots (yx_{t_{i+1}}) \dots))}_{\alpha_{i+1}} Y^{\alpha_{i+2}} \dots Y^{\alpha_s} x_{t_s} Y^{\alpha_{s+1}}$.

Тождество Лейбница позволяет привести последний элемент к сумме слагаемых, меньших лексикографически, и слагаемого $Y^{\alpha_1} x_{t_1} \dots Y^{\alpha_i - \alpha_{i+1} - 1} X' Y^{\alpha_{i+2}} \dots Y^{\alpha_s} x_{t_s} Y^{\alpha_{s+1}}$, где $x' = \underbrace{(y(y \dots (yx_{t_i}) \dots))}_{\alpha_{i+1}+1} \underbrace{(y(y \dots (yx_{t_{i+1}}) \dots))}_{\alpha_{i+1}}$. Получим элемент с меньшим количеством образующих x_{i_r}, на который распространяется предположение индукции. Таким образом доказательство завершено. Теорема доказана.

3. БАЗИС ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ МНОГООБРАЗИЯ $\widetilde{\mathrm{V}}_3$ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница является аналогом хорошо известного многообразия $\mathbf{V}_3$ алгебр Ли. Ранее, в работе [6] был определен рост этого многообразия, а в работе [7] — его кратности и кодлина. Пусть $T = \Phi[t]$ — кольцо многочленов от переменной t. Рассмотрим трехмерную алгебру Гейзенберга H с базисом $\{a, b, c\}$ и умножением $ba = -ab = c$, произведение остальных базисных элементов равно нулю. Превратим кольцо многочленов T в правый модуль алгебры H, в котором базисные элементы алгебры H действуют справа на многочлен f из T следующим образом: $fa = f', fb = tf, fc = f$, где f' — производная многочлена f. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств H и T с умножением по правилу: $(x + f)(y + g) = xy + fy$, где x, y из H; f, g из T. Следуя, например, работе [8], обозначим полученную алгебру символом $\widetilde{H}$. Алгебра $\widetilde{H}$ является алгеброй Лейбница, удовлетворяет тождеству $x(y(zt)) \equiv 0$ и порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница.

Лемма. *В многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ выполняются следующие тождества:*

$$x(y(zt)) \equiv 0, \tag{4}$$

$$x_0 A \overline{x}_1 B \overline{x}_2 C \overline{x}_3 D \overline{x}_4 \equiv 0, \tag{5}$$

$$x_0(x_1x_4)(x_2x_3) \equiv x_0(x_1x_2)(x_3x_4) + x_0(x_1x_3)(x_2x_4), \tag{6}$$

где A, B, C, D — некоторые слова от образующих.

Доказательство. Истинность тождеств (4) и (5) проверяется подстановкой произвольных элементов алгебры $\widetilde{H}$ и была показана в работе [6]. Тождество (6) вытекает из линеаризации следующего частного вида тождества (5): $x_0\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \equiv 0$ по модулю тождества $xyz - xzy \equiv x(yz)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Совокупность элементов вида*

$$\theta = \theta(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m) = x_i(x_{i_1}x_{j_1})(x_{i_2}x_{j_2})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_{n-2m-1}},$$

где $i_s < j_s, s = 1, 2, \ldots, m, i_1 < i_2 < \ldots < i_m, j_1 < j_2 < \ldots < j_m, k_1 < k_2 < \ldots < k-2m-1$*, образуют базис пространства* $P_n(\widetilde{V}_3)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент пространства $P_n(\widetilde{\mathbf{V}}_3)$. Используя следствие $xy(zt) \equiv x(zt)y$ тождества Лейбница и тождества (4), передвинем все скобки максимально влево. Упорядочим полученные элементы, используя лексикографический порядок строк $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-2m-1})$. Пусть рассматриваемый элемент имеет вид: $x_i(x_{i_1}x_{j_1})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}\ldots x_{k_s}x_{k_{s+1}}\ldots x_{k_{n-2m-1}}$ и $k_s > k_{s+1}$. С помощью тождества Лейбница этот элемент представим в виде суммы $x_i(x_{i_1}x_{j_1})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}\ldots x_{k_{s+1}}x_{k_s}\ldots x_{k-2m-1} + x_i(x_{i_1}x_{j_1})\ldots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}\ldots x_{k_{s-1}}(x_{k_s}x_{k_{s+1}})x_{k_{s+2}}\ldots x_{k-2m-1}$, где первое слагаемое лексикографически меньше, чем исходный элемент, а у второго слагаемого число одиночных элементов уменьшилось. Применяя такой же метод к полученным слагаемым, мы, в конечном итоге, представим наш исходный элемент как сумму слагаемых, в которых $k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-2m-1}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент, в котором индексы одиночных элементов упорядочены. Выберем два наименьших индекса внутри скобок в рассматриваемом элементе и переобозначим их через $1'$ и $2'$ соответственно. Введем лексикографический порядок на строках $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$. Используя также индукцию по числу скобок, докажем, что все полученные элементы представимы в виде линейной комбинации элементов θ. Следствие $x(yz) \equiv -x(zy)$ тождества Лейбница позволяет упорядочить индексы элементов внутри пар, а тождество $xy(zt) \equiv x(zt)y$ — скобки по индексам первых элементов. Согласно этим тождествам рассматриваемый элемент может иметь вид либо $x_i(x_{1'}x_{2'})(x_{i_1}x_{j_1})\ldots x_{k_{n-2m-1}}$, либо $x_i(x_{1'}x_{j_1})(x_{2'}x_{j_2})\ldots x_{k_{n-2m-1}}$. В первом случае можно рассматривать упорядоченность уже на $m-1$ скобке, которая выполняется по индукции. Во втором случае применим тождество (6), получим: $x_i(x_{1'}x_{2'})(x_{j_2}x_{j_1})\ldots x_{k_{n-2m-1}} + x_i(x_{1'}x_{j_2})(x_{2'}x_{j_1})\ldots x_{k_{n-2m-1}}$, где к первому слагаемому снова применимо предположение индукции, а второе слагаемое меньше лексикографически. Следовательно, произвольный элемент пространства $P_n(\widetilde{V}_3)$ записывается через линейную комбинацию элементов θ по модулю $Id(\widetilde{V}_3)$.

Докажем теперь, что элементы θ являются линейно независимыми по модулю $Id(\widetilde{V}_3)$. Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов: $\sum_{(i,i_1,\ldots,i_m.j_1,\ldots,j_m)} \alpha(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m)\theta = 0$ и покажем, что все коэффициенты $\alpha = \alpha(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m)$ равны нулю. Предположим противное.

Выберем элемент $\theta^* = \theta(i^*, i_1^*, \ldots, i_m^*, j_1^*, \ldots, j_m^*)$ с коэффициентом α^* не равным нулю так, чтобы количество коммутаторов m в нем было наименьшим и индекс j_1^* элемента на второй позиции в первой скобке был наибольшим. Поскольку каждый элемент однозначно определяется количеством m, элементом x_i и выборкой $(i, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m)$, то в выбранном элементе θ^* эти показатели фиксированы. Подставим в него базисные элементы алгебры $\widetilde{H}$ следующим образом: $x_{i^*} = f, x_{i_s^*} = a, x_{j_s^*} = b, s = 1, \ldots, m$, в остальные подставим c. После такой подстановки все элементы, отличные от выбранного, станут равными нулю. Действительно, возможны два вида элементов, содержащих m коммутаторов при фиксированной выборке $(i^*, i_1^*, \ldots, i_m^*, j_1^*, \ldots, j_m^*)$: элементы, содержащие на второй позиции в первой скобке $x_{j_1^*}$, и элементы, содержащие на второй позиции в первой скобке $x_{i_s^*}$, где $i_s^* < j_1^*$ $(s = 2, \ldots, m)$. Все элементы второго вида равны нулю, так как при описанной подстановке первая скобка будет равна (aa). В одной из скобок элементов первого типа окажутся образующие $x_{i_s^*}$ и $x_{i_t^*}$. В результате описанной подстановки эта скобка также обнулит элемент. Таким образом, получим, что если $f \neq 0$, то $\sum_{(i,i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_m)} \alpha\theta = 0$. Следовательно, вопреки предположению коэффициент α^* равен нулю. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что любое тождество, которое имеет место в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_3$, является следствием тождества Лейбница и тождеств $x(y(zt)) \equiv 0$ и (3). Отсюда мы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Тождества* (4) *и* (6) *образуют базис тождеств многообразия* $\widetilde{\boldsymbol{V}}_3$.

Авторы выражают благодарность С. П. Мищенко за постановку задачи, полезные советы и внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (*МОЛ А ВЕД 2012* 12-01-33031).

Библиографический список

1. *Giambruno A., Zaicev M.* Polynomail identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : AMS, 2005. Vol. 122. 352 p.

2. *Блох А. М.* Об одном обощении понятия алгебр Ли // Докл. АН СССР. 1965. Т. 18, № 3. С. 471—473.

3. *Рацеев С. М.* Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2006. № 6(46). С. 70–77.

4. *Мищенко С. П., Череватенко О. И.* Необходжимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница // Фундаментальная прикладная математика. 2006. Т. 12, № 8. С. 207–215.

5. *Мищенко С. П., Зайцев М. В.* Кодлина многообразий линейных алгебр // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 553–559.

6. *Абанина Л. Е., Мищенко С. П.* Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения : тр. девятых математических чтений МГСУ. 2002. С. 95–99.

7. *Скорая Т. В.* Структура полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ // Ученые записки ОГУ. 2012. № 6(2). С. 203–212.

8. *Мищенко С. П., Шишкина Т. В.* О многообразиях алгебр Лейбница почти полиномиального роста с тождеством $(y(xt)) = 0$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 : Математика и механика. 2010. Т. 3. С. 18–23.

New Properties of Varieties of Leibnitz Algebras

T. V. Skoraya[1], A. V. Svetsova[2]

[1]Ulyanovsk State University, Russia, 432017, Ulyanovsk, Lev Tolstoy str., 42, skorayatv@yandex.ru

[2]Federal research and production center Open joint stock company «Scientific and production association «Mars», Russia, 432022, Ulyanovsk, Solnechnaya str., 20, shvesovaav@rambler.ru

The paper is devoted to two new results concerning varieties of Leibnitz algebras over a field of the zero characteristic. Here is proved the sufficient condition for a variety of Leibnitz algebras to have a finite colength. Here is also defined the basis of identities and the basis of multilinear part of variety $\widetilde{\mathbf{V}}_3$.

Key words: Leibnitz algebra, variety of algebras, numerical characteristic, colength, multilinear part.

References

1. Giambruno A., Zaicev M. *Polynomail identities and Asymptotic Methods*. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI, AMS, 2005, vol. 122, 352 p.

2. Blokh A. M. A generalization of the concept of a Lie algebra. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1965. Vol. 18, no. 3, pp. 471–473 (in Russian).

3. Ratseev S. M. The estimation of growth og variety of Leibnitz algebras with a nilpotent commutant. *Vestnik of the Samara state university*, 2006, no 6(46), no. 6(46), pp. 70–77 (in Russian).

4. Mishchenko S. P., Cherevatenko O. I. Necessary and suffcient conditions for a variety of Leibniz algebras to have polynomial growth. *Fundamental applied mathematics*, 2006, vol. 12, no. 8, pp. 207–215 (in Russian).

5. Mishchenko S. P., Zaicev M. V. Colength of varieties of linear algebras. *Math. Notes*, 2006, vol. 79,

no. 4, pp. 511–517. DOI: 10.1007/s11006-006-0056-0.
6. Abanina L. E., Mishchenko S. P. Nekotorye mnogoobraziia algebr Leibnitsa [Some varieties of Leibnitz algebras]. *Matematicheskie metody i prilozheniia : tr. deviatykh matematicheskikh chtenii MGSU* [Mathematical methods and appendices. Works of the ninth mathematical readings MSSU], 2002, pp. 95–99 (in Russian).
7. Skoraya T. V. Structure of multilinear part of variety $\widetilde{\mathbf{V}}_3$. *Uchenye zapiski OGU* [Scientific notes of the OSU], 2012, no. 6(2), pp. 203–212. (in Russian)
8. Mishchenko S. P., Shishkina T. V. On almost polynomial growth varieties of Leibniz algebras with the identity x(y(zt))=0. *Vestnik of the Moscow university, Ser. 1 : Mathematics and mechanics*, 2010, vol. 3, pp. 18–23 (in Russian).

УДК 511

О КОЛИЧЕСТВЕ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЦЕЛОГО ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕНИЕМ КРАТНОСТИ

Г. В. Федоров

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, fedorov@mech.math.msu.su

В данной статье исследуются обобщения числовых функции, связанные с количеством простых делителей заданного числа. Получены верхние и нижние предельные значения, а также асимптотические фрмулы для средних значений количества простых делителей, входящие в целое число с ограничением кратности.

Ключевые слова: функция делителей, теорема Мерсенна, простая дзета-функция.

Памяти Г. И. Архипова

ВВЕДЕНИЕ

Для каждого натурального числа n в соответствии с основной теоремой арифметики имеет место разложение на множители

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} = \prod_{p|n} p^{\alpha_p},$$

причем такое представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей. В теории чисел хорошо известны функции $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ равные количеству простых делителей числа n соответственно с учетом и без учета кратных делителей:

$$\Omega(n) = \sum_{p|n} \alpha_p, \qquad \omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

Свойства этих функций изучены достаточно глубоко, в частности, для функции $\omega(n)$ верхний порядок роста

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\omega(n) \cdot \log_2 \log_2 n}{\log_2 n} \right) = 1$$

достигается на последовательности $n = n_m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$ — произведение последовательных простых чисел, $p_1 = 2$. При этом стоит отметить, что для произвольного $n \le n_m$ выполнено неравенство $\omega(n) \le \omega(n_m)$. Минимальное значение функции $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ принимают на простых числах

$$\Omega(p) = \omega(p) = 1.$$

Верхнее предельное значение функции $\Omega(n)$ достигается на последовательности $n = n_a = 2^a$, причем для произвольного $n \le n_a$ выполнено неравенство $\Omega(n) \le \Omega(n_a) = a$.

