



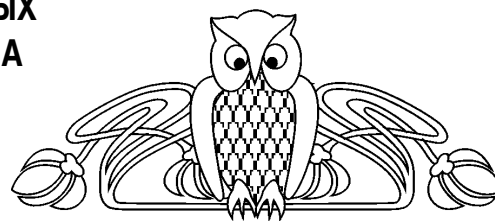
УДК 532.5

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАСТАХ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В.А. Толпаев*, В.В. Палиев**

Северо-Кавказский государственный технический университет, кафедра прикладной математики и компьютерных технологий, Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов, E-mail: *pm@ncstu.ru, **wwwowa@bk.ru

Дается вывод уравнения неразрывности для построения двумерных моделей фильтрации сжимаемой жидкости в искривленных пластах конечной толщины, пористая среда в которых может проявлять сорбирующие свойства. Как частный случай дается уравнение неразрывности для фильтрации сжимаемой жидкости в весьма тонких искривленных пластах с сорбирующей и несорбирующей пористой средой.



The Equations of Continuously in Bidimensional Models of Filtration Liquid and Gas in the Bent Layers of Final Thickness

V.A. Tolpaev, V.V. Paliev

The finding of equation of continuousness for construction a bidimensional models of filtration a compressed liquid in the bent layers of final thickness is given, the porous environment in which can show sorb properties. As the special case is given the equation of continuousness for filtration of a compressed liquid in rather thin bent layers with sorbing and nonsorbing porous environment.

ВВЕДЕНИЕ

В естественных условиях продуктивные пористые пласты, содержащие воду, нефть или газ (обобщенно называемых в теории фильтрации флюидами), имеют, как правило, искривленную форму и переменную толщину. Фильтрационные движения флюида в таких пластах в общем случае трехмерны. Но поскольку в природных условиях подошва и кровля продуктивных пластов (по-другому, слоев) чаще всего непроницаемы, то и движения флюида в таких слоях с достаточной для практических целей точностью можно моделировать как двумерные. В связи с этим становится актуальной задача вывода уравнения неразрывности применительно к двумерным моделям течений газа и, как частный случай, несжимаемой жидкости в искривленных пластах переменной толщины с непроницаемыми подошвой и кровлей.

1. АППРОКСИМАЦИЯ КИНЕМАТИКИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

Будем рассматривать только такие продуктивные пласты, непроницаемые криволинейные поверхности подошвы и кровли которых можно задавать координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = \text{const}$ (подошва) и $\zeta = \zeta_2 = \text{const}$ (кровля) некоторой ортогональной криволинейной системы координат ξ, η, ζ (рис. 1).

Поверхности тока изучаемых фильтрационных течений примем за стационарные, совпадающие с координатными поверхностями $\zeta = \text{const}$ (рис. 2).

Это, конечно, идеализация, но в большинстве случаев реальное течение флюида почти во всём пласте близко к предлагаемой кинематической схеме. Предложенная схема течения могла бы быть реализована практически, если бы в пласте удалось построить тонкие непроницаемые поверхности $\zeta = \text{const}$. Эти поверхности $\zeta = \text{const}$ увеличат фильтрационное сопротивление пласта и, следовательно, расчёты потоков по предлагаемой кинематической схеме окажутся заниженными против реальных значений. Предположение, что реальные поверхности тока почти во всём пласте близки к координатным поверхностям $\zeta = \text{const}$ заставляет считать, что проекция

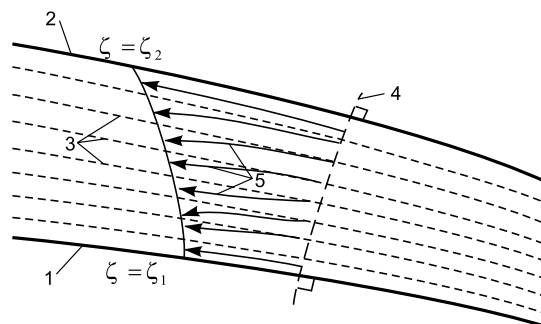


Рис. 1. Участки линий тока и эпюра скоростей реального фильтрационного течения флюида в искривлённом слое переменной толщины (1 и 2 — непроницаемые подошва и кровля слоя; 3 — координатные поверхности $\zeta = \text{const}$; 4 — ζ -координатная линия; 5 — линии тока, соответствующие перемещениям жидких частиц за одну единицу времени)

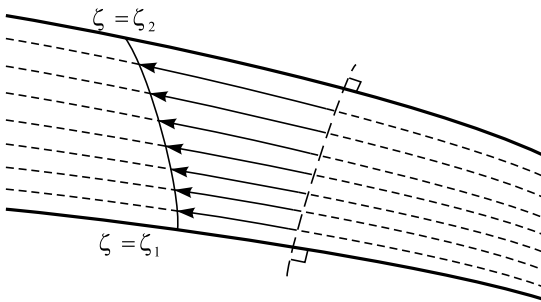


Рис. 2. Кинематическая схема предлагаемой двумерной модели течения. За поверхности тока принимаются координатные поверхности $\zeta = \text{const}$.

скорости фильтрации на ζ -координатные линии $V_\zeta = V_3 = 0$. Таким образом, в рассматриваемой схеме течения поле скоростей фильтрации аппроксимируется выражением

$$\vec{V} = V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_1 + V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_2, \quad (1)$$

в котором $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орты локального базиса в системе ξ, η, ζ , а $V_\xi = V_1$ и $V_\eta = V_2$ — проекции скорости фильтрации на ξ - и η -координатные линии.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАСТАХ С СОРБИРУЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Рассмотрим вначале фильтрационные течения газа в искривленном пласте с сорбирующей средой. Типичным примером таких пластов являются каменноугольные пласты. Их характерным свойством является то, что поверхность пор каменного угля за счет сил межмолекулярного взаимодействия угля и газа (проявляющихся в виде электростатического притяжения) способна удерживать на себе без химического изменения определенную часть (называемую адсорбированной частью) содержащегося в порах массы газа. В связи с этим адсорбированная часть газа оказывается обездвиженной и поэтому в фильтрационном движении в каменноугольных пластах участвует лишь неадсорбированная часть массы газа.

Для вывода уравнения неразрывности при фильтрации газа в искривленном пласте с сорбирующей пористой средой рассмотрим поток его неадсорбированной части с полем скоростей (1) через боковые грани криволинейного параллелепипеда $\xi = \text{const}$,

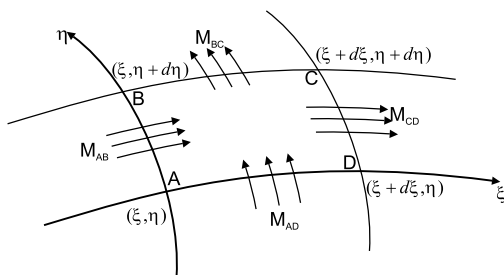


Рис. 3. Сечение $ABCD$ элементарного криволинейного параллелепипеда поверхностью $\zeta = \text{const}$. Основания параллелепипеда расположены на непроницаемых подошве ($\zeta = \zeta_1$) и кровле ($\zeta = \zeta_2$) слоя. Вдоль AD $\eta = \text{const}$; вдоль BC $\eta + d\eta = \text{const}$; вдоль AB $\xi = \text{const}$; вдоль CD $\xi + d\xi = \text{const}$

границы криволинейного параллелепипеда $\xi = \text{const}$, $\xi + d\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\eta + d\eta = \text{const}$. Сечение $ABCD$ этого параллелепипеда поверхностью $\zeta = \text{const}$ показано на рис.3.

Через грань AB за время dt в параллелепипед

входит масса газа $M_{AB} = dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \times$

$\times V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta$, где H_1, H_2 и H_3 — параметры Ламе криволинейной системы координат ξ, η, ζ а $\rho(P)$ — плотность газа при пластовых температуре и давлении $P(\xi, \eta, \zeta, t)$. Через противоположную грань из параллелепипеда за время dt выйдет масса газа

$M_{CD} = dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi + d\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot V_\xi(\xi + d\xi, \eta, \zeta, t) \times$

$\times H_2(\xi + d\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi + d\xi, \eta, \zeta) d\zeta$. Поэтому за счёт разницы потоков через пару противоположных

граней AB и CD из параллелепипеда за время dt за его пределы уходит масса газа

$$M_1 = M_{CD} - M_{AB} = d\xi \cdot d\eta \cdot dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \xi} [H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot d\zeta. \quad (2)$$

Совершенно аналогично подсчитывается, что за время dt за пределы параллелепипеда из-за разницы потоков через противоположные грани AD и BC уходит масса газа:

$$M_2 = M_{BC} - M_{AD} = d\xi \cdot d\eta \cdot dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \eta} [H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot d\zeta. \quad (3)$$



Общее количество массы газа, вытекающего за время dt из параллелепипеда $ABCD$ за счёт потоков через боковые грани, равно: $M = M_1 + M_2$.

Уход из параллелепипеда $ABCD$ массы M газа вызовет в нем при заданной постоянной пластовой температуре изменение давления P , а значит, плотности газа, а также соотношения долей между адсорбированной и неадсорбированной частями газа. Для учета влияния ушедшей из выделенного объема массы M газа на изменение его плотности и соотношения долей адсорбированной и неадсорбированной частей подсчитаем вторично изменение в $ABCD$ массы газа как разность между имевшейся в момент t и оставшейся в момент $t + dt$.

Пусть в момент t давление газа в $ABCD$ равно $P(\xi, \eta, \zeta, t)$. Тогда при заданной пластовой температуре плотность неадсорбированной части реального газа найдется из уравнения его состояния [1] и будет равна $\rho = \rho(P)$. Поэтому масса $M_{01}(t)$ содержащейся в порах пласта неадсорбированной части газа равна

$$M_{01}(t) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta,$$

где $m(P)$ — пористость пласта, которая в общем случае может зависеть от давления. Масса $M_{02}(t)$ адсорбированной части газа определяется по уравнению изотермы сорбции [1] $\tilde{g} = \tilde{g}(P)$, где \tilde{g} (с размерностью $\text{кг}/\text{м}^2$) — количество адсорбированного вещества, приходящееся на единицу площади $S_{\text{пор}}$ поверхности пор пласта. Заметим, однако, что площадь $S_{\text{пор}}$ в реальных пористых средах пропорциональна произведению $m \cdot V$, где V — объем пористой среды. Элементарное объяснение этому факту дает формула для пористости идеальной среды со сферическими (для упрощения рассуждений) порами в объеме V . По определению пористости она равна $m = \frac{V_{\text{пор}}}{V} = \frac{4\pi r^3 n}{3V}$, где $V_{\text{пор}} = \frac{4}{3}\pi r^3 n$ — суммарный объем пор с радиусом r и общим их количеством n . Поэтому суммарная площадь пор $S_{\text{пор}}$ в объеме V идеальной среды, равная $4\pi r^2 \cdot n$, через пористость m и радиус r будет выражаться формулой $S_{\text{пор}} = \frac{3mV}{r}$, а масса адсорбированной части газа в порах идеальной среды будет равна $\frac{3}{r} \cdot \tilde{g}(p) \cdot m \cdot V = g(P) \cdot m \cdot V$, причем коэффициент пропорциональности $g(P)$ имеет, в отличие от $\tilde{g}(P)$, другую размерность — $\text{кг}/\text{м}^3$.

В выделенном объеме $ABCD$ естественной пористой среды масса $M_{02}(t)$ адсорбированной части газа через коэффициент $g(P)$, определяющий количество адсорбированного вещества в единице объема пласта, найдется по формуле

$$M_{02}(t) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} g[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (4)$$

Коэффициент $g(P)$ в формуле (4) определяется по уравнению объемной изотермы сорбции, которое для большинства случаев дается зависимостью Ленгмюра [1] $g = \frac{a \cdot P}{1 + b \cdot P}$, где a и b — размерные положительные постоянные, определяемые экспериментальным путем. Суммарная масса адсорбированной и неадсорбированной частей газа в параллелепипеде $ABCD$ в момент t равна $M_{01}(t) + M_{02}(t)$.

В момент $t + dt$ общая масса адсорбированной и неадсорбированной частей газа в параллелепипеде $ABCD$ подсчитывается совершенно аналогично и равна

$$M_{01}(t + dt) + M_{02}(t + dt) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot H_1 d\xi \cdot H_2 d\eta \cdot H_3 d\zeta + \\ + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} g[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot H_1 d\xi \cdot H_2 d\eta \cdot H_3 d\zeta.$$

Поэтому по второму способу выход массы газа из параллелепипеда $ABCD$ получим как разность $[M_{01}(t) + M_{02}(t)] - [M_{01}(t + dt) + M_{02}(t + dt)]$, для которой после перехода к дифференциалам найдем, что

$$M = -dt \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial[\rho(P) \cdot m(P)]}{\partial t} \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta - \\ - dt \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial[g(P) \cdot m(P)]}{\partial t} \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (5)$$



Сравнивая сумму $M = M_1 + M_2$, где M_1 определено по формуле (2), а M_2 — по формуле (3), со значением M из формулы (5), после очевидных упрощений приходим к следующему уравнению:

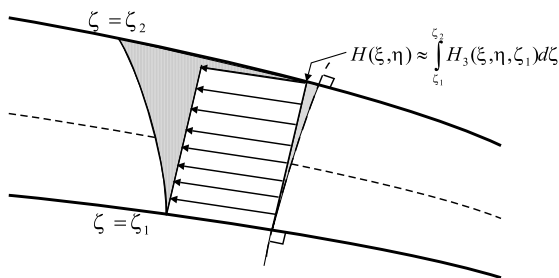
$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t) \right] + H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \left[\frac{\partial[\rho(P) \cdot m(P)]}{\partial t} + \frac{\partial[g(P) \cdot m(P)]}{\partial t} \right] \right\} = 0. \quad (6)$$

Полученное уравнение (6) и будет уравнением неразрывности в интегральной форме для двумерных моделей течений сжимаемой жидкости (газа) в искривлённом пласте переменной толщины с деформируемой пористой средой, обладающей сорбционными свойствами.

Отдельно рассмотрим частный случай, относящийся к фильтрации газа в весьма тонких искривлённых слоях переменной толщины.

3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ВЕСЬМА ТОНКИХ ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАСТАХ С СОБИРАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Пусть в искривлённом пласте непроницаемые подошва $\zeta = \zeta_1$ и кровля $\zeta = \zeta_2$ расположены настолько близко, что зависимостью параметров Ламе H_1, H_2, H_3 и проекций скоростей фильтрации



V_ξ и V_η от координаты ζ можно пренебречь и, следуя схеме О. В. Голубевой [2], представленной на рис. 4, принять, что

$$\begin{aligned} H_1 &= H_1(\xi, \eta, \zeta_1) = h_1(\xi, \eta); \\ H_2 &= H_2(\xi, \eta, \zeta_1) = h_2(\xi, \eta); \\ H_3 &= H_3(\xi, \eta, \zeta_1) = \frac{H(\xi, \eta)}{\zeta_2 - \zeta_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рис. 4. Кинематическая схема двумерного течения в теории О.В. Голубевой. Затемнённые участки указывают на главные источники погрешностей в схеме О.В. Голубевой. $H(\xi, \eta)$ — локальная «толщина» слоя в точке (ξ, η) , через которую выражается H_3

Тогда, предполагая последние равенства справедливыми, из уравнения (6) после подстановки в него (7) получим, как частный случай, уравнение неразрывности в приближении О. В. Голубевой для фильтрации газа в весьма тонких искривлённых пластах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} [h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \rho(P) \cdot V_\xi(\xi, \eta, t)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [h_1(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \rho(P) \cdot V_\eta(\xi, \eta, t)] + \\ + h_1(\xi, \eta) \cdot h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{ [\rho(P) + g(P)] \cdot m(P) \} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция $H(\xi, \eta)$ в теории О. В. Голубевой выбирается наперед и называется толщиной слоя. Это связано с тем, что в (7) параметр Ламе $H_3(\xi, \eta, \zeta_1)$ удастся выразить через наперед заданную функцию $H(\xi, \eta)$.

Если пористая среда не проявляет сорбирующих свойств, то в уравнениях (6) и (8) нужно положить $g(P) \equiv 0$.

Для случая фильтрации несжимаемой жидкости в несорбирующей пористой среде в уравнениях (6) и (8) полагаем $g(P) \equiv 0$ и $\rho(P) = \text{const}$.

Если уравнения неразрывности (6) и (8) дополнить законом Дарси, уравнениями состояния флюида $\rho = \rho(P)$, пористой среды $m = m(P)$ и уравнением изотермы сорбции $g = g(P)$ [1], то получим замкнутую систему уравнений, описывающую фильтрацию жидкости и газа в искривлённых сорбирующих слоях переменной толщины.

В частности, уравнения несжимаемой жидкости в несорбирующей пористой среде названным способом выведены в [3–5].



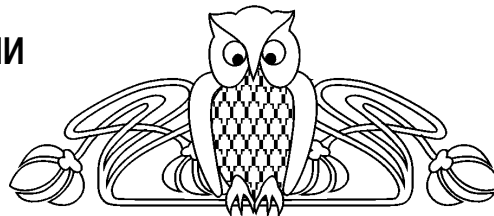
Примеры конкретных оценок точности расчетов пространственных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в искривленных слоях переменной толщины по предлагаемым двумерным математическим моделям приведены в [6].

Библиографический список

1. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Ковалев А.Г. Физика нефтяного и газового пласта. М.; Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2005.
2. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972.
3. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Уравнения линейной двумерной фильтрации в искривленных пластах конечной толщины // ОПИПМ. 2004. Т.11, вып.1. С.143–146.
4. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Математическое моделирование фильтрационных течений несжимаемой жидкости в искривленных пластах конечной толщины // ОПИПМ. 2005. Т. 12, вып. 2. С. 524–527.
5. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Двумерные математические модели течений жидкости в круговом коническом слое постоянной толщины // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы конф. Воронеж: Воронежск. гос. техн. акад., 2005. С. 222.
6. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Оценки точности расчета дебитов скважин в искривленных пластах // Нефтепромысловое дело. 2004. № 12. С. 9–13.

УДК 539.3

ФОРМУЛИРОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЛУБОКОВОДНОГО НЕФТЕПОДЪЕМНИКА В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ВНУТРЕННЕГО ПОТОКА ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ



О.А. Торопова

Саратовский государственный технический университет, Институт социально-производственного менеджмента, кафедра информационных систем
E-mail: toropova@sstu.ru

The Formulation of the Mathematical Model Deep-Water of the Oil Raiser, Interacting with Internal Flow of Gas-Liquid Mixture

O.A. Toropova

Сформулирована новая математическая модель расчета характеристик напряженно-деформированного состояния глубоководного райзера, взаимодействующего с внутренним двухфазным потоком газожидкостной смеси. Решается задача нелинейной гидроупругости сингулярно возмущенного типа.

A new mathematical model for calculating the characteristics of a stress-deformed state of a deepwater raiser that interacts with an inner two-phase stream of the gas-liquid mixture, is formulated. The singular-disturbance type problem of nonlinear hydroelasticity is being solved.

В известных публикациях ограничивались исследованием влияния внешнего потока подводных течений на характеристики НДС глубоководного нефтеподъемника (райзера). При этом внутренний поток гидросмеси моделировался, как правило, однородным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. В реальных условиях, однако, сырая нефть представляет собой двухфазную газожидкостную среду, свойства которой существенно зависят от начальных значений скорости транспортировки, давления, весового газового фактора и т.п.

Целью статьи является формулировка новой математической модели расчета характеристик НДС глубоководного райзера, взаимодействующего с внутренним двухфазным потоком газожидкостной смеси и с внешним потоком подводных течений. Она непосредственно может быть использована и при рассмотрении актуальных задач исследования длительной прочности райзера в условиях наведенной неоднородности свойств материала стенок, вызванной агрессивным воздействием внутреннего потока гидросмеси.

Сформулируем модель установившегося движения газожидкостной смеси в вертикальном трубопроводе. Характер движения (эрлифта) газожидкостной смеси определяется, как правило, значением фактора газонасыщенности ω (отношением объема свободного газа в смеси к ее объему, $0 \leq \omega \leq 1$).

При постепенном увеличении этого фактора происходит последовательный переход от эмульсионного состояния смеси к диспергированному:

- 1) движение смеси в состоянии эмульсии, когда пузырьки газа более или менее равномерно распределены в жидкости;
- 2) слоистое движение, когда в трубопроводе перемещаются, заполняя почти все сечение, цилиндрики газа значительной длины, разделенные цилиндриками жидкости меньшей длины;