

**Библиографический список**

1. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и её приложения. М.: Наука, 1971. С. 57–72.
2. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование.

Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. С.52–56.

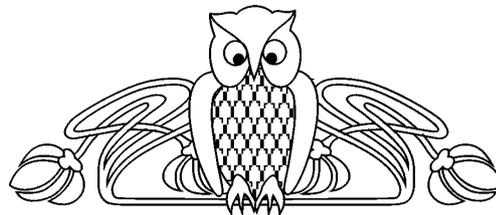
3. Машиностроение: Энциклопедия / Под ред. акад. РАН К.В. Фролова. СПб.: Политехника, 2003. С. 72–90.

УДК 539.3

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БАЛОК, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

П.Е. Товстик

Санкт-Петербургский университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: peter.tovstik@mail.ru

**On the Non-Classic Models of Beams, Plates and Shells**

P.E. Tovstik

For the problems of statics, of free vibrations, and of buckling of beams, plates and shells the Timoshenko – Reissner's model with shear is compared with the classic Kirchhoff – Love model and with the 3D theory of elasticity. By using some test examples the formal asymptotic character of 1D and 2D models is established and their field of application is found. The asymptotic expansions based on the small shell or plate thickness compared with the length of wave are used. The special attention is paid to the buckling or vibration modes localized near the free surface.

Для задач статики, свободных колебаний и устойчивости балок, пластин и оболочек модель Тимошенко – Рейсснера, учитывающая сдвиг, сравнивается с классической моделью Кирхгофа – Лява и с трехмерной теорией упругости. На ряде тестовых примеров установлен формальный асимптотический характер одномерных и двумерных моделей и найдена область их применимости. Для пластин и оболочек, лежащих на трансверсально изотропном упругом основании обсуждаются модели Кирхгофа – Лява и Тимошенко – Рейсснера. Используется асимптотический метод интегрирования, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с длиной волны на поверхности. Особое внимание обращается на построение форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи свободной поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Выводу одномерных и двумерных приближенных моделей из трехмерных уравнений теории упругости посвящены многочисленные исследования, из которых назовем монографии [1–4]. Ниже для задач статики, свободных колебаний и устойчивости балок, пластин и оболочек обсуждается модель Тимошенко – Рейсснера (ТР), учитывающая сдвиг, в сравнении с классической моделью Кирхгофа – Лява (КЛ) и с трехмерной теорией упругости. На ряде тестовых примеров установлен асимптотический характер одномерных и двумерных моделей и найдена область их применимости. Также обсуждаются модели КЛ и ТР для пластин и оболочек, лежащих на упругом основании. Как пластина, так и основание предполагаются изготовленными из трансверсально изотропного материала. При анализе используется локальный подход, при котором решение разыскивается в виде двойки периодической функции по поверхностным координатам, а граничные условия на контуре игнорируются (либо пластина считается бесконечной). Используется асимптотический метод интегрирования, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с длиной волны на поверхности. Особое внимание обращается на построение форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи свободной поверхности трансверсально изотропного предварительно непряженного полупространства или лежащей на нем пластины.

1. ДЕФОРМАЦИЯ И СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрим сначала плоскую задачу о деформации полосы $-\infty < x < \infty$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ под действием гармонической нагрузки, приложенной к верхнему краю. Уравнения равновесия и соотношения упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \nu_1 \sigma_3), & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\tau}{G_{13}}, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E_3}(\sigma_3 - \nu_3 \sigma_1), \end{aligned} \quad (1.1)$$



где $u(x, z)$, $w(x, z)$ — проекции перемещения, $\sigma_i(x, z)$, $\tau(x, z)$ — напряжения, E_i , ν_i , G_{13} — модули упругости, причем $\nu_1 E_3 = \nu_3 E_1$. Граничные условия возьмем в виде

$$\tau(x, -h/2) = \tau(x, h/2) = \sigma_3(x, -h/2) = 0, \quad \sigma_3(x, h/2) = f \sin rx. \quad (1.2)$$

Будем искать периодическое решение в виде

$$\{u, \tau\}(x, z) = \{u, \tau\}(z) \cos rx, \quad \{w, \sigma_1, \sigma_3\}(x, z) = \{w, \sigma_1, \sigma_3\}(z) \sin rx. \quad (1.3)$$

Тогда получим систему дифференциальных уравнений 4-го порядка. После растяжения масштаба $z = hz_1$, $u = hu^*$, $w = hw^*$, $\tau = E_1 \tau^*$, $\sigma_3 = E_1 \sigma_3^*$ (далее знак * опускаем) и ряда преобразований приведем систему (1.1) к виду

$$\tau''' - \mu^2 \left(\frac{1}{g} - 2\nu_1 \right) \tau' + \frac{\mu^3}{e} \sigma_3 = 0, \quad \sigma_3' - \mu \tau = 0, \quad ()' \equiv \frac{d()}{dz_1}, \quad \mu = rh = \frac{2\pi h}{L}, \quad (1.4)$$

$$u = \frac{\tau' + \mu \nu_1 \sigma_3}{\mu^2}, \quad u' + \mu w = \frac{\tau}{g}, \quad e = \frac{E_3}{E_1}, \quad g = \frac{G_{13}}{E_1}. \quad (1.5)$$

Здесь μ — малый параметр, пропорциональный отношению толщины h балки к ее длине L . Из уравнений (1.4) находим напряжения τ и σ_3 , удовлетворяющие граничным условиям (1.2), а затем перемещения u и w находим по явным формулам (1.5). При $\mu \ll 1$, $\mu^2/g \ll 1$, $\mu^2/e \ll 1$ получаем [5]

$$w(h/2) = \frac{12hf}{E_1 \mu^4} K, \quad K = 1 + \frac{\mu^2}{10g} - \frac{\nu_1 \mu^2}{5} + O(\mu^4). \quad (1.6)$$

При этом для модели КЛ в формуле (1.6) следует считать $K = 1$, а для модели ТР коэффициент $K = 1 + \mu^2/(10g)$. Для получения последней формулы вместо модуля сдвига G_{13} следует (как это обычно делается, см. [1]) использовать значение γG_{13} , где корректирующий множитель $\gamma = 5/6$ учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по толщине. Третье слагаемое в формуле для K в (1.6) учитывает деформацию растяжения – сжатия нормального волокна.

Пусть теперь $\mu \ll 1$, $\mu^2/g \sim 1$. Тогда ряд (1.6) утрачивает свой асимптотический характер и решение системы (1.4), (1.5) выражается через гиперболические функции. Представляя прогиб $w(h/2)$ в форме (1.6), для коэффициента K приходим к выражению

$$K = \frac{\xi^3}{12(\xi - 2 \operatorname{th}(\xi/2))} + O(\mu^2), \quad \xi = \mu \sqrt{\frac{1}{g} - 2\nu_1}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим численный пример. Возьмем $\mu = 0.1$, $\nu_1 = 0.3$ и ряд значений параметров e и $g = e/(2(1 + \nu_1))$. Расчеты [5] показали, что модель КЛ дает удовлетворительные результаты лишь при $e \geq 0.05$, а модель ТР — при $e \geq 0.0001$.

Обратимся к свободным колебаниям балки и рассмотрим колебания с заданной длиной волны L , при которой прогиб имеет вид $w(x, z) = w(z) \sin rx$. Начнем с одномерных моделей, в которых $w(z) = 1$. По модели КЛ имеем

$$\lambda = \frac{\mu^2}{12}, \quad \lambda = \frac{\rho h^2 \omega^2}{E_1}, \quad (1.8)$$

где λ — частотный параметр, ρ — плотность, ω — частота колебаний.

Модель ТР учитывает инерцию вращательного движения сечений, поэтому для параметра λ приходим к квадратному уравнению (см., напр. [6]):

$$\frac{\mu^4}{12} - \lambda \left(1 + \frac{\mu^2}{12} + k \right) + \frac{k}{\mu^2} \lambda^2 = 0, \quad k = \frac{\mu^2}{10g}. \quad (1.9)$$

При $\mu \ll 1$ асимптотика двух корней уравнения (1.9) имеет вид

$$\lambda_1 = \frac{\mu^4}{12(1+k)} + O(\mu^6), \quad \lambda_2 = \frac{(k+1)\mu^2}{k} + O(\mu^2). \quad (1.10)$$



Рассмотрим теперь двухмерную задачу о свободных колебаниях ортотропной полосы. В уравнения равновесия (1.1) включаем инерционные слагаемые и после разделения переменных, растяжения масштаба $z = hz_1$ и ряда преобразований приходим к системе уравнений:

$$u' = \frac{\tau}{g} - \mu w, \quad w' = \nu_1 \mu u + \left(\frac{1}{e} - \nu_1^2 \right) \sigma_3, \quad \tau' = (\mu^2 - \lambda)u - \mu \nu_1 \sigma_3, \quad \sigma_3' = \mu \tau - \lambda w, \quad (1.11)$$

которая после исключения перемещений принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda \tau'' + \left(\mu^2 - \frac{\lambda}{g} \right) (\mu^2 - \lambda) \tau + (\mu \nu_1 \lambda - \mu(\mu^2 - \lambda)) \sigma_3' &= 0, \\ (\mu^2 - \lambda) \sigma_3'' + \left(\left(\frac{1}{e} - \nu_1^2 \right) \lambda (\mu^2 - \lambda) + \mu^2 \nu_1^2 \lambda \right) \sigma_3 + (\mu \nu_1 \lambda - \mu(\mu^2 - \lambda)) \tau' &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Систему (1.12) интегрируем с граничными условиями $\tau(\pm 1/2) = \sigma_3(\pm 1/2) = 0$, соответствующими свободным лицевым поверхностям. По-прежнему, считаем $\mu \ll 1$. Система (1.12) описывает низкочастотные изгибные колебания с $\lambda \sim \mu^4$ и две счетных серии высокочастотных колебаний $\lambda^{(1,n)}$ и $\lambda^{(2,n)}$ с $\lambda \sim 1$, описывающие соответственно изгибные деформации нормального волокна и его деформации растяжения – сжатия [5].

Для корня $\lambda \sim \mu^4$ приходим к уравнению [5]

$$\lambda \left(1 + \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^2 \nu_1}{6} \right) = \frac{\mu^4}{12} \left(1 - k + \frac{\mu^2 \nu_1}{6} \right) + \frac{2\lambda^2}{\mu^2} + O(\mu^8), \quad (1.13)$$

где k – то же, что и в (1.9). Видим, что при $k \ll 1$ из (1.13) следует значение λ_1 , приведенное в (1.10), т.е. при $\mu^2 \ll g \ll 1$ модель ТР учитывает главную часть влияния сдвига.

Отметим, что первая частота высокочастотной изгибной серии $\lambda^{(1,1)} = \pi^2 g + O(\mu^2)$ приближенно равна частоте λ_2 , заданной формулой (1.10). Совпадение $\lambda^{(1,1)}$ и λ_2 имеет место, если считать $k \ll 1$, $\pi^2 \simeq 10$.

Рассмотренные примеры позволяют сделать следующий вывод. Для балок из изотропного материала теория КЛ является первым асимптотическим приближением при $\mu \rightarrow 0$ по отношению к двухмерной теории. Теория ТР, учитывающая сдвиг, несущественно уточняет теорию КЛ. Для балок из ортотропного материала с умеренно малой поперечной жесткостью на сдвиг ($\mu^2 \ll g \ll 1$) теория ТР асимптотически непротиворечива и существенно уточняет теорию КЛ. Если же жесткость на сдвиг еще меньше ($g \leq \mu^2$), теории КЛ и ТР утрачивают свой асимптотический характер.

2. ДЕФОРМАЦИИ И КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Для ортотропной пластины и для балки результаты в значительной мере совпадают, поэтому приводится лишь их краткое обсуждение (подробности см. в [7]).

Ищем решение в виде двояко-периодических функций:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(z) \cos(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2) e^{i\omega t}, & \sigma_{13} &= \sigma_{13}(z) \cos(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2) e^{i\omega t}, \\ u_2 &= u_2(z) \sin(r_1 x_1) \cos(r_2 x_2) e^{i\omega t}, & \sigma_{23} &= \sigma_{23}(z) \sin(r_1 x_1) \cos(r_2 x_2) e^{i\omega t}, \\ w &= w(z) \sin(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2) e^{i\omega t}, & \sigma_{12} &= \sigma_{12}(z) \cos(r_1 x_1) \cos(r_2 x_2) e^{i\omega t}, \\ \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}\} &= \{\sigma_{11}(z), \sigma_{22}(z), \sigma_{33}(z)\} \sin(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где u_i , w , σ_{ij} – проекции перемещения и компоненты тензора напряжений. Для трансверсально изотропного материала система уравнений равновесия и соотношений упругости 6-го порядка после разделения переменных и введения новых неизвестных

$$\begin{aligned} u &= (r_1 u_1 + r_2 u_2)/r, & v &= (r_2 u_1 - r_1 u_2)/r, & r^2 &= r_1^2 + r_2^2, \\ \sigma &= (r_1 \sigma_{13} + r_2 \sigma_{23})/r, & \tau &= (r_2 \sigma_{13} - r_1 \sigma_{23})/r \end{aligned} \quad (2.2)$$

распадается на системы второго и четвертого порядков [5]:

$$\tau' - r^2 G v + \rho \omega^2 v = 0, \quad G_{13} v' = \tau; \quad (2.3)$$



$$\begin{aligned} \sigma' - E_{11}r^2u + E_{13}ru'_3 + \rho\omega^2u &= 0, & \sigma &= G_{13}(u' + ru_3), \\ \sigma'_{33} - r\sigma + \rho\omega^2u_3 &= 0, & \sigma_{33} &= E_{33}u'_3 - E_{13}ru. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В задаче о свободных колебаниях система (2.3) описывает высокочастотные крутильные колебания, а в задаче статики под действием нормального давления вида $\sigma_{33}(h/2) = f \sin r_1x \sin r_2y$ ее решение равно нулю.

Система (2.4) лишь обозначениями отличается от системы (1.11) для балки, поэтому основной вывод, сформулированный в конце п. 1, остается прежним — нулевое приближение по малому параметру $\mu = rh$ совпадает с результатом по модели КЛ и при относительно малом модуле поперечного сдвига главная часть первого приближения учитывается моделью ТР.

3. О МОДЕЛЯХ КИРХГОФА – ЛЯВА (КЛ) И ТИМОШЕНКО – РЕЙССНЕРА (ТР) В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Асимптотический анализ уравнений теории оболочек сложнее, чем для балок и пластин, в связи с тем, что здесь приходится иметь дело с двумя малыми параметрами:

$$\mu = rh = \frac{2\pi h}{L} \quad \text{и} \quad h_* = \frac{h}{R}, \quad (3.1)$$

где R — характерный радиус кривизны оболочки. Параметр g также может быть малым.

Рассмотрим для определенности осесимметричную деформацию оболочки вращения по модели ТР. Как правило, напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки складывается из основного, медленно меняющегося состояния и краевого эффекта, экспоненциально затухающего при удалении от края. Интегралы краевого эффекта удовлетворяют уравнениям:

$$D \frac{d^4w}{dx^4} - \frac{D}{\gamma g R^2} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{E_1 h}{R^2} w = 0, \quad D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)}, \quad g = \frac{G_{13}}{E_1}; \quad (3.2)$$

$$\frac{D(1 - \nu_1)}{2} \frac{d^2\Psi}{dx^2} - \gamma g E_1 h \Psi = 0. \quad (3.3)$$

При $g \sim 1$ средний член уравнения (3.2) мал и может быть отброшен. В результате уравнение (3.2) переходит в уравнение простого краевого эффекта по модели КЛ. Уравнение (3.3) связано с повышением дифференциального порядка системы уравнений по модели ТР по сравнению с моделью КЛ (с 8 до 10) и не имеет аналога в модели КЛ.

Ищем решения уравнений (3.2) и (3.3) в виде

$$w(x) = C e^{px/R}, \quad \Psi(x) = C_1 e^{p_1 x/R}. \quad (3.4)$$

Тогда для коэффициентов p и p_1 получим уравнения:

$$\frac{h_*^2}{12(1 - \nu_1^2)} \left(p^4 + \frac{p^2}{\gamma g} \right) + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{h_*^2}{24(1 + \nu_1)\gamma g} p_1^2 - 1 = 0. \quad (3.5)$$

Положим $g \sim h_*^\delta$ и введем показатели изменчивости [2] $t_{1,2}$ и t_3 интегралов краевого эффекта по формулам

$$p \sim h_*^{t_{1,2}}, \quad p_1 \sim h_*^{t_3} \quad (3.6)$$

(уравнение (3.2) может иметь интегралы с двумя разными показателями изменчивости). Получаем

$$\begin{aligned} t_1 = t_2 = 1/2 & \quad \text{при} \quad \delta \leq 1, \\ t_1 = (1 + \delta)/2, \quad t_2 = (1 - \delta)/2 & \quad \text{при} \quad \delta \geq 1, \\ t_3 = (1 - \delta)/2. & \end{aligned} \quad (3.7)$$

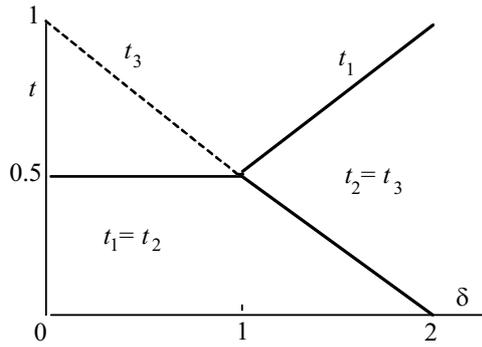


Рис. 1. Графики показателей изменяемости

Графики функций $t_k(\delta)$ показаны на рис. 1. Рассмотрение показателей изменяемости позволяет сделать ряд выводов. Во-первых, при $\delta = 0$ имеем $t_3 = 1$. Это значит, что длина волны деформации имеет порядок толщины оболочки. Последнее обстоятельство говорит об асимптотической противоречивости модели ТР, в частности, для изотропной оболочки. При $0 < \delta < 2$ модель ТР асимптотически непротиворечива. При $\delta \geq 2$ имеем $t_1 \geq 1, t_2 = t_3 \leq 0$. Из этих неравенств следует, что при столь малых значениях модуля G_{13} двухмерная модель ТР неприменима.

С областью применимости модели ТР при малых значениях модуля поперечного сдвига G_{13} связана и следующая задача устойчивости. По модели ТР в линейном приближении рассматриваем устойчивость трансверсально изотропной цилиндрической оболочки радиуса R при осевом сжатии. Ищем форму потери устойчивости в виде

$$w(x, y) = w_0 \sin r_1 x \sin r_2 y, \quad (3.8)$$

где x и y — осевая и окружная координаты, r_i — искомые волновые числа. Критическая осевая нагрузка определяется по формуле [7]

$$-T_0 = \min_{r_1, r_2} \frac{Dr^8 + Ar_1^4(1 + Br^2)}{r_1^2 r^4 (1 + Br^2)}, \quad D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)}, \quad A = \frac{E_1 h}{R^2}, \quad B = \frac{D}{\gamma g h}, \quad (3.9)$$

где $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Модели КЛ соответствует $B = 0$. При $B > 0$ минимизация в (3.9) дает $r_2 = 0$ (что соответствует осесимметричной потере устойчивости) и

$$-T_0 = \frac{E_1 h^2}{R \sqrt{12(1 - \nu_1^2)}} f(\eta), \quad f(\eta) = \begin{cases} 2 - \eta, & \eta \leq 1, \\ 1/\eta, & \eta \geq 1, \end{cases} \quad \eta = \frac{h_*}{\gamma g \sqrt{12(1 - \nu_1^2)}}. \quad (3.10)$$

При $\eta = 0$ формула (3.10) дает классическую критическую нагрузку Лоренца – Тимошенко, не учитывающую поперечный сдвиг [8,9]. Функция $f(\eta)$ описывает снижение нагрузки, связанное с учетом сдвига. При $\eta < 1$ минимум в (3.9) достигается при конечном значении $r_1 = (1 - \eta)^{-1/2}$, а при $\eta \geq 1$ — при $r_1 = \infty$. Последнее обстоятельство говорит о неприемлемости оболочечной модели при весьма малых значениях G_{13} . Отметим [10], что при напряжении сжатия $-\sigma_{11} = G_{13}$ сам ортотропный материал теряет устойчивость, а усилие $-T_0$ при $\eta \simeq 1$ порождает напряжения, близкие к критическим [7]. К вопросу о потере устойчивости материала мы еще вернемся.

4. ДВИЖЕНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Далее рассматриваются пластины и оболочки, лежащие на упругом основании. Однако сначала рассматривается предварительно напряженное трансверсально изотропное полупространство. Уравнения его движения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Delta_\sigma u_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta_\sigma u_i = \sigma_j^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

где $-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty \leq x_3 = z \leq 0$ — декартовы координаты, $u_1, u_2, u_3 = w$ — проекции перемещения, σ_j^0 — начальные напряжения (отрицательные при сжатии и предполагаемые постоянными), σ_{ij} — дополнительные напряжения, ρ — плотность материала, t — время. Далее предполагается, что $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma^0$. Соотношения упругости для трансверсально изотропного материала

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, & \sigma_{13} &= G_{13}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{22} &= E_{12}\varepsilon_{11} + E_{11}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, & \sigma_{23} &= G_{13}\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{33} &= E_{13}\varepsilon_{11} + E_{13}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}, & \sigma_{12} &= G\varepsilon_{12}, \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, & \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (4.2)$$



содержат 5 упругих констант (E, E', G_{13}, ν, ν'), причем [11]

$$\begin{aligned} E_{11} = E_{22} &= \frac{E(1 - \nu_0^2)}{(1 + \nu)c}, & E_{12} &= \frac{E(\nu + \nu_0^2)}{(1 + \nu)c}, & E_{13} = E_{23} &= \frac{E\nu'}{c}, & E_{33} &= \frac{E'(1 - \nu)}{c}, \\ G_{12} = G &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, & G_{13} = G_{23}, & \nu_0^2 E' &= (\nu')^2 E, & c &= 1 - \nu - 2\nu_0^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Имеют место соотношения

$$E_{11} = E_{12} + 2G_{12}, \quad E_{11}^0 = E_{11} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad E_{12}^0 = E_{12} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}. \quad (4.4)$$

Для изотропного тела в формулах (4.3) $E' = E, \nu' = \nu_0 = \nu$, где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Далее в численных примерах при выборе модулей E_{ij}, G_{ij} для трансверсально изотропного тела поступаем следующим образом. Рассмотрим многослойное тело с чередующимися мягкими и жесткими плоскими изотропными слоями с параметрами

$$E_n, \nu_n, h_n, \quad n = 1, 2. \quad (4.5)$$

Осреднение упругих свойств по толщине слоев при $h_1, h_2 \rightarrow 0, \quad h_1/h_2 = \text{const}$ приводит к трансверсально изотропному материалу. При вычислении его модулей E_{ij}, G_{ij} в (4.2) пользуемся тем, что на границе слоев непрерывны деформации $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ и напряжения $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$.

Будем искать решения системы (4.1), локализованные вблизи плоскости $z = 0$, в виде (2.1). Как и в п. 2, после разделения переменных и перехода к новым неизвестным по формулам (2.2) система (4.1) шестого порядка распадается на системы четвертого и второго порядков

$$G_{13}^* u'' - (E_{11} + \sigma_0)r^2 u + \lambda u + (G_{13} + E_{13})rw' = 0, \quad G_{13}^* = G_{13} + \sigma_3^0, \quad (4.6)$$

$$-(G_{13} + E_{13})ru' + E_{33}^* w'' - (G_{13} + \sigma_0)r^2 w + \lambda w = 0, \quad E_{33}^* = E_{33} + \sigma_3^0,$$

$$G_{13}^* v'' - (G_{12} + \sigma_0)r^2 v + \lambda v = 0. \quad (4.7)$$

При $\sigma_3^0 \neq 0$ условия на свободной поверхности $z = 0$ имеют вид

$$\sigma^* = G_{13}^* u' + G_{13}rw = 0, \quad \sigma_{33}^* = -E_{13}ru + E_{33}^* w' = 0, \quad \tau^* = G_{13}^* v' = 0, \quad (4.8)$$

а условия затухания при удалении от нее — вид

$$u_i(z), \sigma_{ij}(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.7) не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих граничным условиям (4.8) и (4.9). Будем искать решение системы (4.6), удовлетворяющее условиям (4.9), в виде

$$w(z) = \sum_{k=1,2} C_k e^{\alpha_k r z}, \quad u(z) = \sum_{k=1,2} C_k b_k e^{\alpha_k r z}, \quad (4.10)$$

где

$$b_k = \frac{E_{33}^s \alpha_k^2 - G_{13} + \lambda^*}{(E_{13} + G_{13})\alpha_k}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{r^2} - \sigma_0, \quad \text{Re}(\alpha_k) > 0, \quad (4.11)$$

C_k — постоянные, α_k — корни характеристического уравнения системы (4.6)

$$a_0 \alpha^4 - a_1 \alpha^2 + a_2 = 0, \quad (4.12)$$

причем

$$\begin{aligned} a_0 &= G_{13}^* E_{33}^*, & a_2 &= (E_{11} - \lambda^*)(G_{13} - \lambda^*), \\ a_1 &= E_{33}^*(E_{11} - \lambda^*) + G_{13}^*(G_{13} - \lambda^*) - (E_{13} + G_{13})^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнение (4.12) имеет два корня с $\text{Re}(\alpha_k) > 0$ при $a_0 > 0$ и $a_2 > 0$.



Если (в двумерном случае) решение исходной системы (4.1) искать в виде

$$u(x, z, t) = u(z) \cos(rx - \omega t), \quad w(x, z, t) = w(z) \sin(rx - \omega t), \quad (4.14)$$

то при выполнении условий (4.8) и (4.9) получим волну Релея [12], распространяющуюся по поверхности полупространства со скоростью $v = \sqrt{\lambda^*/\rho}$. При этом скорость распространения волны не зависит от ее длины.

Удовлетворяя условиям (4.9) на свободной поверхности, получаем дисперсионное уравнение как для частоты локализованных вблизи поверхности колебаний (2.1), так и для волны Релея (4.14)

$$(G_{13}^* \alpha_1 b_1 + G_{13})(E_{33}^* \alpha_2 - E_{13} b_2) - (G_{13}^* \alpha_2 b_2 + G_{13})(E_{33}^* \alpha_1 - E_{13} b_1) = 0. \quad (4.15)$$

В случае изотропного тела уравнение (4.15) принимает вид

$$(2G - \lambda^*)^2 - (2G + \sigma_3^0)^2 \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (4.16)$$

Значения безразмерного частотного параметра $\Lambda^h = \lambda^*/G$ для ряда значений ν и $\sigma_3^* = \sigma_3^0/G$ приведены в табл. 1.

Таблица 1
Значения частотного параметра Λ^h
для изотропного полупространства

ν	$\sigma_3^* = 0.5$	0	-0.5	-0.8	-0.9	-0.98
0.0	0.856	0.764	0.500	-0.151	-0.972	-4.721
0.1	0.878	0.798	0.566	-0.010	-0.692	-4.089
0.2	0.899	0.830	0.629	0.126	-0.512	-3.421
0.3	0.918	0.860	0.687	0.253	-0.292	-2.723
0.4	0.937	0.888	0.739	0.367	-0.088	-2.020
0.5	0.954	0.896	0.784	0.466	0.089	-1.334

Таблица 2
Значения частотного параметра $\Lambda^h = \lambda^*/G_{13}$
для трансверсально изотропного материала

$e = \frac{E_1}{E_2}$	$\eta = 0.5$	0	-0.5	-0.8	-0.9	-0.98
1	0.918	0.860	0.687	0.245	-0.298	-2.723
10	0.978	0.963	0.912	0.758	0.512	-1.100
100	0.998	0.996	0.991	0.974	0.946	0.724

Рассмотрим теперь трансверсально изотропное полупространство, образующееся из чередующихся изотропных слоев параметрами $E_n, \nu_n, h_n, n = 1, 2$ при стремлении к нулю толщин слоев. Возьмем $h_1 = h_2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, E_1/E_2 = e$ и для ряда значений e и $\eta = \sigma_3^0/G_{13}$ найдем величину частотного параметра $\Lambda^h = \lambda^*/G_{13}$. Результаты приведены в табл. 2.

С ростом параметра e , служащего мерой анизотропии, частотный параметр Λ^h приближается к 1.

Уравнения (4.15) и (4.16) позволяют исследовать влияние начальных напряжений на скорость v волны Релея частоту колебаний ω , причем

$$v = \sqrt{\frac{\lambda^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Lambda G_{13} + \sigma_0}{\rho}}, \quad (4.17)$$

$$\omega = rv.$$

В силу уравнений (1.15) или (1.16) частотный параметр Λ^h зависит лишь от свойств материала и от начального напряжения σ_3^0 и не зависит от начального напряжения σ_0 , которое входит в формулы (4.17) явно.

Условиями устойчивости материала являются неравенства

$$-\sigma_0 < G_{13} \quad \text{и} \quad -\sigma_3^0 < \min\{G_{13}, E_{33}\}, \quad (4.18)$$

необходимые для выполнения условий Адамара [13]. При выполнении этих условий поверхностные колебания и волны Релея возможны лишь в случае, когда $\lambda > 0$, т.е.

$$-\sigma_0 < \Lambda^h G_{13}. \quad (4.19)$$

Как следует из табл. 1 и 2, при некоторых значениях $\sigma_3^* < 0$ и других параметров задачи имеем $\Lambda^h < 0$. В этом случае поверхностные колебания и волны Релея возможны в силу (4.19) лишь при достаточно больших растягивающих начальных напряжениях σ_0 .

При $-\sigma_0 = \Lambda_*^h G_{13}$ полупространство теряет устойчивость с образованием волн на свободной поверхности, где $\Lambda_*^h < 1$ — корень одного из уравнений (4.15), (4.16) при $\lambda = 0$. Условие (4.19) в силу



$\Lambda^h < 1$ накладывает на начальное напряжение σ_0 более сильное ограничение, чем первое из неравенств (4.18). Эффект снижения критической нагрузки с локализацией формы прогиба в окрестности свободного края или свободной поверхности известен. Для сжатой пластины со свободным краем он описан в [14, 15], для оболочек — в [9, 16, 17], для изотропного полупространства — в [18]. Для примеров, рассмотренных в табл. 1 и 2, положительные значения Λ_*^h соответствуют критическим напряжениям сжатия ($G_{13}\Lambda_*^h = -\sigma_0$). Если же $\Lambda_*^h < 0$, то при желании сохранить устойчивость для компенсации начальных сжимающих напряжений $\sigma_3^0 < 0$ необходимо приложить растягивающие напряжения $\sigma_0 > -G_{13}\Lambda_*^h$.

5. РЕАКЦИЯ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

В п. 6 рассматриваются колебания пластины, лежащей на рассмотренном в п. 4 трансверсально изотропном основании. При этом необходимо знать реакцию основания на перемещения его поверхности. В некоторых частных случаях решение этой задачи получено в [19, 20].

Пусть на поверхности $z = 0$ заданы перемещения

$$u = u_0, \quad w = w_0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (5.1)$$

Тогда в силу формул (4.8) и (4.10) находим напряжения $\sigma^*(0)$ и $\sigma_{33}^*(0)$, порождаемые этими перемещениями,

$$\sigma^*(0) = r(c_{11}u_0 + c_{13}w_0), \quad \sigma_{33}^*(0) = r(c_{13}u_0 + c_{33}w_0), \quad (5.2)$$

где для трансверсально изотропного материала коэффициенты жесткости основания c_{ij} равны

$$c_{11} = \frac{G^*(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)}{b_1 - b_2}, \quad c_{13} = \frac{G_{13}^* b_1 b_2 (\alpha_2 - \alpha_1)}{b_1 - b_2} + G_{13}, \quad c_{33} = \frac{E_{33}^* (b_1 \alpha_2 - b_2 \alpha_1)}{b_1 - b_2} \quad (5.3)$$

и для изотропного материала

$$c_{11} = \frac{(G + \sigma_3^0)\alpha_2(\alpha_1^2 - 1)}{\alpha_1\alpha_2 - 1} + G, \quad c_{13} = \frac{(G + \sigma_3^0)\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2 - 1} + G, \quad c_{33} = \frac{E_{11}^*\alpha_1(\alpha_2^2 - 1)}{\alpha_1\alpha_2 - 1}. \quad (5.4)$$

Отличие коэффициентов (5.3)–(5.4), от найденных в [19, 20], заключается, в частности, в учете сил инерции основания и начальных напряжений σ_3^0 .

6. КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ. ПОДХОД КИРХГОФА – ЛЯВА (КЛ)

Рассматриваются свободные колебания пластины толщины h , изготовленной из упругого трансверсально изотропного материала и лежащей на рассмотренном в п. 4 трансверсально изотропном основании. Между пластиной и основанием имеется жесткий контакт. Пластина и основание находятся в условиях вертикального сжатия с постоянным напряжением σ_3^0 и горизонтального всестороннего растяжения (сжатия) с постоянной деформацией ε_0 (при сжатии $\sigma_3^0 < 0$ и $\varepsilon_0 < 0$) (см. рис. 2). При этом для основания и пластины начальные напряжения σ_0 соответственно равны

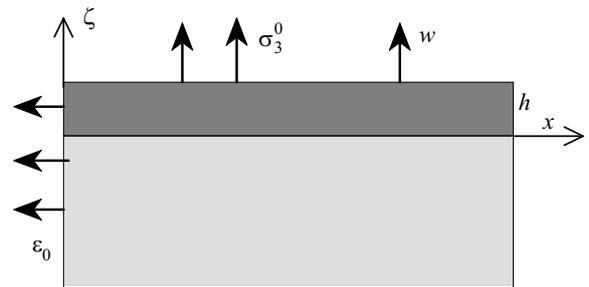


Рис. 2. Пластина на упругом основании

$$\sigma_0^F = \frac{E_0^F}{1 - \nu^F} \varepsilon_0 + \frac{E_{13}^F}{E_{33}^F} \sigma_3^0, \quad \sigma_0^P = \frac{E_0^P}{1 - \nu^P} \varepsilon_0 + \frac{E_{13}^P}{E_{33}^P} \sigma_3^0, \quad E_0^{(F,P)} = \frac{E^{(F,P)}}{1 - (\nu^{(F,P)})^2}. \quad (6.1)$$

Здесь и ниже индекс F используется для величин, описывающих основание (Foundation), а индекс P — для одноименных величин пластины (Plate).



Уравнение колебаний пластины согласно модели КЛ имеет вид

$$D^P \Delta \Delta w - T^P \Delta w + \sigma_{33}^* + \rho^P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (6.2)$$

где

$$D^P = \frac{E_0^P h^3}{12}, \quad T^P = h \sigma_0^P, \quad E_0^P = \frac{E^P}{1 - (\nu^P)^2}, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \quad (6.3)$$

Здесь E^P , ν^P , ρ^P — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины, T^P — начальное усилие в пластине, σ_{33}^* — давление основания на пластину.

Пусть пластина совершает колебания с формой прогиба

$$w(x_1, x_2, t) = w_0 \sin(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2) e^{i\omega t}, \quad (6.4)$$

где r_1 и r_2 — заданные волновые числа, $\sigma_{33}^* = r c_{33} w_0$, а ω — искомая частота.

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\mu^4}{12} + \mu^2 \varepsilon + \mu \hat{c}_{33} - \Lambda^K = 0, \quad (6.5)$$

где

$$\mu = r h = \frac{2\pi h}{L}, \quad \hat{c}_{33} = \frac{c_{33}}{E_0^P} \simeq \frac{G_{13}^F}{E_0^P}, \quad \Lambda^K = \frac{\rho^P h^2 \omega^2}{E_0^P}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \nu^P) + \frac{E_{13}^P \sigma_3^0}{E_{33}^P E_0^P}. \quad (6.6)$$

Здесь L — длина волны на поверхности пластины. При естественных предположениях уравнение (6.5) содержит три малых параметра μ , \hat{c}_{33} и ε . Частота колебаний ω входит в уравнение (6.5) явно через частотный параметр Λ^K и неявно через коэффициент c_{33} , учитывающий силы инерции основания. Использование уравнения (6.5) ограничено двумя обстоятельствами. Во-первых, если эффективная начальная сжимающая деформация ε велика, пластина теряет устойчивость. Критерием устойчивости служит неравенство $\Lambda^K > 0$, что дает

$$-\varepsilon < \min_{\mu} \left(\frac{\mu^2}{12} + \frac{\hat{c}_{33}}{\mu} \right) = \frac{(6 \hat{c}_{33})^{2/3}}{4}, \quad \mu = (6 \hat{c}_{33})^{1/3}. \quad (6.7)$$

Отметим, что в отличие от полупространства потеря устойчивости теперь происходит при вполне определенном значении волнового числа r . Тем не менее, форма потери устойчивости не является вполне определенной, ибо в силу (2.2) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ и одно из чисел r_1 или r_2 остается произвольным. Геометрически нелинейное рассмотрение [18] показало, что в закритической области минимальная энергия деформации получается при $r_1 = r_2$, т.е. для квадратных вмятин.

Другое ограничение на частотный параметр Λ^K вытекает из требования, чтобы характеристическое уравнение (4.12) для основания не имело чисто мнимых корней, ибо в противном случае энергия колебаний будет уходить на бесконечность, свободные незатухающие колебания пластины (также, как и волны Релея) невозможны. Это требование приводит к неравенству

$$\Lambda^K < \mu^2 \frac{\rho^P}{\rho^F} \frac{G_{13}^F + \sigma_3^0}{E_0^P}, \quad (6.8)$$

где ρ^F и G_{13}^F — плотность материала основания и его жесткость на поперечный сдвиг соответственно.

7. ПОДХОД ТИМОШЕНКО – РЕЙССНЕРА

В случае сильной анизотропии материала пластины двухмерная модель ТР дает существенно более точные результаты, чем модель КЛ. В модели ТР при поперечных колебаниях нормальный элемент пластины имеет три степени свободы: вертикальное перемещение w и два угла его поворота φ_1 и φ_2 вокруг горизонтальных осей.

После введения вместо углов φ_1 и φ_2 новых неизвестных функций Θ и Ψ

$$\varphi_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \quad (7.1)$$



система уравнений поперечных колебаний расщепляется (как и в п. 4) на уравнение второго порядка относительно функции Θ (далее это уравнение не рассматривается)

$$\frac{1 - \nu^P}{2} D^P \Delta \Theta - \Gamma h \Theta - \frac{h \tau^*(0)}{2} - \frac{\rho^P h^3}{12} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0 \quad (7.2)$$

и систему уравнений относительно функций w и Ψ

$$\begin{aligned} \Gamma h(\Delta w - \Delta \Psi) + T^P \Delta w - \sigma_{33}^*(0) - \rho^P h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ -D^P \Delta \Delta \Psi - \Gamma h(\Delta w - \Delta \Psi) - \frac{h r \sigma^*(0)}{2} + \frac{\rho^P h^3}{12} \frac{\partial^2 \Delta \Psi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь $\sigma_{33}^*(0)$ и $\sigma^*(0)$ — это напряжения (5.2) на поверхности контакта пластины и основания, появляющиеся в результате вертикальных перемещений w и горизонтальных перемещений, связанных с углами φ_1 и φ_2 поворота нормали вокруг горизонтальных осей (в связи с малостью толщины h последние напряжения, как правило, не учитываются).

В системе (7.3), описывающей поперечные колебания, положим

$$w = w_0 \sin r_1 x_1 \sin r_2 x_2 e^{i\omega t}, \quad \Psi = \Psi_0 \sin r_1 x_1 \sin r_2 x_2 e^{i\omega t}. \quad (7.4)$$

Тогда в формулах (5.2) $u_0 = -\mu \Psi_0 / 2$ и дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$(\Lambda^T - g\mu^2 - \mu^2 - \hat{c}_{33}\mu) \left(\frac{\Lambda^T - \mu^2}{12} - g - \frac{\hat{c}_{11}\mu}{4} \right) - \left(g - \frac{\hat{c}_{13}\mu}{2} \right) \left(g\mu^2 - \frac{\hat{c}_{13}\mu}{2} \right) = 0, \quad (7.5)$$

где приняты обозначения (6.6), а также

$$g = \frac{\Gamma}{E_0^P}, \quad \frac{5\Gamma}{6}, \quad \hat{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{E_0^P}, \quad \Lambda^T = \frac{\rho^P h^2 \omega^2}{E_0^P}, \quad (7.6)$$

Как и для балки Тимошенко (см. п. 2), уравнение (7.5) имеет два корня. Остановимся на меньшем из них. Если длина волны L велика по сравнению с толщиной пластины h и $\gamma \ll 1$, это уравнение содержит малые параметры μ , g , \hat{c}_{ij}^* . Принимая, что они связаны порядковыми соотношениями:

$$\varepsilon \sim \mu^2, \quad \hat{c}_{ij} \sim \mu^3, \quad g \sim \mu^2, \quad (7.7)$$

для меньшего корня уравнения (7.5) получаем приближенно

$$\Lambda^T = \frac{\mu^4 g}{12g + \mu^2} + \mu^2 + \mu \hat{c}_{33}. \quad (7.8)$$

Если жесткость пластины на поперечный сдвиг не мала ($12g \gg \mu^2$), то формула (7.8) переходит в (6.5), а условие устойчивости

$$-\varepsilon < \min_{\mu} f(\mu, g, \hat{c}_{33}) = f_0(g, \hat{c}_{33}), \quad f(\mu, g, \hat{c}_{33}) = \frac{\mu^2 g}{12g + \mu^2} + \frac{\hat{c}_{33}}{\mu} \quad (7.9)$$

— в условие (6.7), полученное для модели КЛ.

Если

$$g > g_* = (\hat{c}_{33}^2 / 3)^{1/3} \quad \text{или} \quad \hat{c}_{33} < \sqrt{3g^3}, \quad (7.10)$$

функция $f(\mu, g, \hat{c}_{33})$ имеет минимум $f_0 < g$ при некотором конечном значении μ . С ростом жесткости основания \hat{c}_{33} вплоть до $\hat{c}_{33} = \sqrt{3g^3}$ величина f_0 растет до $f_0 = g$, а величина μ растет до значения $\mu = \sqrt{12g}$. Если же неравенство (7.10) нарушено, то величина μ , при которой достигается минимум $f_0 = g$, скачком становится равной $\mu = \infty$. Согласно двумерной модели ТР нарушение условия (7.10) свидетельствует о потере устойчивости материала пластины.



8. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При обсуждении численных результатов точное решение уравнений теории упругости сравниваем с приближенными решениями по моделям КЛ и ТР. Ограничимся рассмотрением системы (4.6), записанной как для основания, так и для пластины. Возможно построение точного аналитического решения, однако удобнее оказалось использовать смешанный способ. Систему (4.6) для пластины интегрируем численно в пределах $0 \leq z \leq h$, а начальные условия в задаче Коши при $z = 0$ берем из аналитического решения (4.10) для основания. Произвольные постоянные C_1 и C_2 и частотный параметр Λ^P находим, удовлетворяя граничным условиям при $z = h$.

Рассмотрим трансверсально изотропные основание и пластину с параметрами, определяемыми по схеме, описанной в п. 4, при значениях параметров (4.5), удовлетворяющих соотношениям

$$E_1^P = 10E_2^P = 100E_1^F = 1000E_2^F, \quad \nu^P = \nu^F = 0.3, \quad h_1^P = h_2^P, \quad h_1^F = h_2^F, \quad (8.1)$$

где, как и ранее, индексы P и F относятся к пластине и к основанию. В силу (8.1) как пластина, так и основание примерно в 5 раз жестче в горизонтальном направлении, чем в вертикальном. Основание в 100 раз мягче пластины. Остальные параметры задачи будем менять. Ниже обсуждается влияние длины волны деформации L , влияние горизонтальной начальной деформации ε_0 , влияние вертикального начального напряжения σ_3^0 и влияние инерционности основания ρ^F .

Влияние длины волны деформации L описывается параметром $\mu = rh = 2\pi h/L$. При этом начальные напряжения считаем отсутствующими, а основание — безинерционным, т.е. $\varepsilon_0 = \sigma_3^0 = \rho^F = 0$.

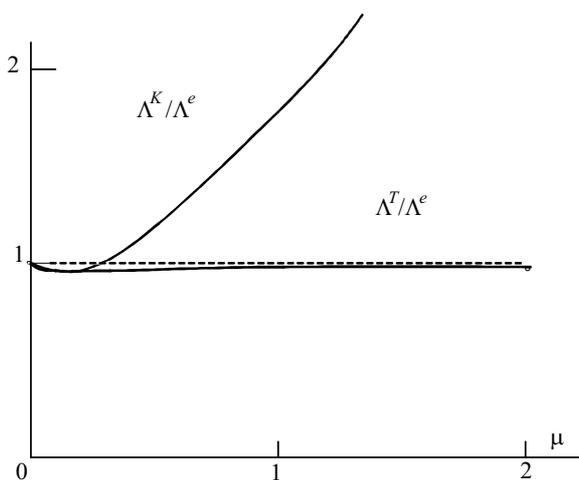


Рис. 3. Влияние длины волны деформации

На рис. 3 для первой частоты колебаний показаны отношения Λ^K/Λ^e и Λ^T/Λ^e частотных параметров, найденных по моделям КЛ и ТР, к точному значению Λ^e в зависимости от параметра μ . Видим, что при уменьшении длины волны L по сравнению с толщиной пластины h область применимости модели КЛ быстро исчерпывается, а модель ТР дает удовлетворительные результаты во всем рассмотренном диапазоне значений μ .

Влияние горизонтальной начальной деформации ε_0 . При достаточно большом уровне сжимающей начальной деформации пластина теряет устойчивость. Как и выше, будем считать, что $\sigma_3^0 = \rho^F = 0$. Интегрирование точной системы (4.6) дает следующие критические значения деформации сжатия и параметра волнообразования: $\varepsilon_0 = -0.01015$, $\mu = 0.23$. Укажем для сравнения, что модель КЛ дает $\varepsilon_0 = -0.00947$, $\mu = 0.22$, а модель ТР — $\varepsilon_0 = -0.00934$, $\mu = 0.23$.

Для принятых значений параметров (8.1) условие (7.9) выполнено с большим запасом.

Таблица 3

Влияние горизонтальной начальной деформации

ε_0	-0.01	0	0.01
Λ/μ^4	0.004	0.259	0.514

В табл. 3 приведена зависимость первого собственного значения параметра Λ , найденного из системы (4.6) для $\mu = 0.23$.

Как и следовало ожидать с учетом формул (4.11), зависимость параметра Λ от начальной деформации ε_0 линейна.

Влияние вертикального начального напряжения σ_3^0 . Считаем, что выведены соотношения (8.1), а также положим $\sigma_0 = \rho^F = 0$, $\sigma_3^0 = G_{13}^F \eta$, причем $\eta > -1$. Как отмечалось

в п. 4, при $\eta \leq -1$ материал основания теряет устойчивость. Для ряда значений η и μ в табл. 4 приведены значения первого собственного числа для трехмерной модели $\mu^{-4}\Lambda(\eta, \mu)$, полученные при численном интегрировании системы (4.6).

Зависимость Λ от η близка к линейной вплоть до критического значения $\eta = -1$. В отличие от случая горизонтальной начальной деформации (см. табл. 3) здесь параметр Λ при изменении нагрузки меняется в более узком диапазоне.



Влияние сил инерции основания. Примем данные (8.1) и будем считать, что начальные напряжения отсутствуют, т.е. $\varepsilon = \sigma_3^0 = 0$. Отношение плотностей $\rho_0 = \rho^F / \rho^P$ и волновое число μ будем менять. В силу формулы (6.8) параметр ρ_0 ограничен неравенством

$$\rho_0 < \rho_* = \frac{\mu^2 \hat{G}_{13}^F}{\Lambda^*}, \quad \hat{G}_{13}^F = 0.001157, \quad (8.2)$$

при нарушении которого спектр колебаний не является вещественным. В табл. 5 приведено первое собственное значение, причем Λ^0 найдено при $\rho_0 = 0$, а Λ^* — при максимально возможном значении $\rho_0 = \rho_*$, меньше которого соответствующее значение Λ вещественно.

Влияние сил инерции основания можно оценить, сравнивая величины Λ^0 и Λ^* . Для более тонкой пластины (для меньших μ) это влияние больше.

Таблица 4

Влияние вертикального начального напряжения

η	$\mu = 0.03$	0.1	0.3	1.0
-0.99	41.9	1.20	0.115	0.0450
0	74.6	2.16	0.160	0.0467
1.0	105.7	3.10	0.205	0.0484

Таблица 5

Влияние сил инерции основания

μ	Λ^0	Λ^*	ρ_*
0.03	$6.04 \cdot 10^{-5}$	$3.38 \cdot 10^{-5}$	0.0208
0.1	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	0.0691
0.3	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-3}$	0.1059
1.0	$4.67 \cdot 10^{-2}$	$4.51 \cdot 10^{-2}$	0.2550

9. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим задачу устойчивости безмоментного напряженного состояния тонкой упругой изотропной оболочки, лежащей на изотропном упругом основании. Ограничимся использованием модели КЛ. Применим локальный подход [21–23], согласно которому переменные коэффициенты замораживаются, граничные условия игнорируются, а само решение ищется в виде двойки периодической функции координат на поверхности оболочки. В частных случаях построенное решение удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания, а в некоторых других (если граничные условия не являются слабыми) — дает хорошее первое асимптотическое приложение для критической нагрузки [9]. Для удовлетворения граничных условий может быть использован прием [24], связанный с построением интегралов краевого эффекта.

Исходим из системы уравнений пологих оболочек:

$$D\Delta\Delta w - \Delta_T w - \Delta_R \Phi - \sigma_{33}^* = 0, \quad (Eh)^{-1} \Delta\Delta \Phi + \Delta_R w = 0, \quad (9.1)$$

где Φ — функция усилий, σ_{33}^* — реакция основания (2.12),

$$\Delta_T w = T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_R w = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (9.2)$$

Здесь T_i^0, S^0 — безмоментные начальные усилия, R_1, R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки. Нагружение считаем однопараметрическим с параметром нагружения $\lambda > 0$, который вводим по формулам

$$\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda \{t_1, t_2, t_3\}, \quad (9.3)$$

где величины t_i считаем безразмерными и имеющими порядок единицы. При этом пренебрегаем начальными напряжениями в основании (заполнителе).

При локальном подходе решение системы (9.1) ищем в виде

$$w(x_1, x_2) = w_0 e^{iz}, \quad \Phi(x_1, x_2) = \Phi_0 e^{iz}, \quad z = r_1 x_1 + r_2 x_2. \quad (9.4)$$

После подстановки решения (9.4) в систему (9.1) получаем явное выражение параметра $\lambda = \lambda(r_1, r_2)$ как функцию волновых чисел r_1 и r_2 . В безразмерных переменных имеем

$$\Lambda = \frac{\lambda}{Eh} = \mu_0^2 g(k, \varphi, \omega), \quad g(k, \varphi, \omega) = \frac{k^4 + 2\omega k + f_R(\varphi)}{k^2 f_T(\varphi)}, \quad (9.5)$$



где

$$\mu_0^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad \omega = \frac{E_0(1-\nu_0)}{E\mu_0^3(1+\nu_0)(3-4\nu_0)\sqrt{12(1-\nu^2)}},$$

$$f_R(\varphi) = (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2, \quad f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \sin \varphi \cos \varphi + t_2 \sin^2 \varphi, \quad (9.6)$$

$$r_1 = \frac{k \cos \varphi}{\mu_0 R}, \quad r_2 = \frac{k \sin \varphi}{\mu_0 R}, \quad \rho_1 = \frac{R}{R_1}, \quad \rho_2 = \frac{R}{R_2},$$

Здесь $R > 0$ — характерный радиус кривизны оболочки, μ_0 — малый параметр тонкостенности, ω — совмещенный параметр жесткости основания, введенный в [19], причем E_0 и ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона основания.

Критическое значение $\lambda = \lambda_*$ получаем после минимизации λ по волновым числам r_1 и r_2 или по безразмерным параметрам k и φ

$$\Lambda_* = \mu_0^2 \min_{k, \varphi}^+ g(k, \varphi, \omega) = \mu_0^2 g(k_*, \varphi_*, \omega), \quad (9.7)$$

где значок $^+$ указывает на то, что ищется положительный минимум, а звездочкой отмечены критические значения соответствующих величин. Предполагается, что величины t_i таковы, что при некоторых значениях угла φ будет $f_T > 0$, т.е. существуют направления, в которых действуют сжимающие начальные усилия. Тогда минимум в (9.7) ищется по тем φ , для которых $f_T > 0$.

Область применимости локального приближения ограничена двумя неравенствами: длина полу волны деформации при потере устойчивости $L = \pi R/k$ должна быть существенно больше толщины оболочки h и меньше ее радиуса кривизны R или в безразмерных переменных

$$\mu_0^2 \ll k^{-1} \ll 1. \quad (9.8)$$

При этом предполагается, что размер оболочки в плане не меньше R , а закрепление краев не является слабым (см. [9]), ибо только в этом случае можно рассчитывать на то, что влияние граничных условий несущественно.

При $\omega = 0$ формула (9.7) дает критическую нагрузку при отсутствии основания. Наличие основания существенно расширяет область применимости локального подхода. Если при отсутствии основания область применимости ограничена оболочками положительной гауссовой кривизны и цилиндрическими (коническими) оболочками при осевом сжатии, то при наличии основания это ограничение снимается — кривизна срединной поверхности может быть любой.

В [21] рассмотрен ряд частных задач устойчивости при наличии основания. Здесь же ограничимся лишь обсуждением порядков параметра нагружения Λ^* и размера вмятины $L = \pi R/k$ при потере устойчивости при $h_* = h/R \rightarrow 0$ для различных значений отношения $e = E_0/E$. Введем порядки a_E , a_Λ и a_L соответствующих величин по формулам

$$e \sim h_*^{a_E}, \quad \Lambda^* \sim h_*^{a_\Lambda}, \quad L/R \sim h_*^{a_L}. \quad (9.9)$$

На рис. 4 показаны зависимости $a_\Lambda(a_E)$ и $a_L(a_E)$, построенные с учетом соотношения $\omega \sim h_*^{-3/2}e$ по формуле (9.7) при $\omega \ll 1$ (a — мягкое основание) и при $\omega \gg 1$ (b — жесткое основание). При $\omega \sim 1$ будет $a_E = 3/2$ (точка А на рис. 4).

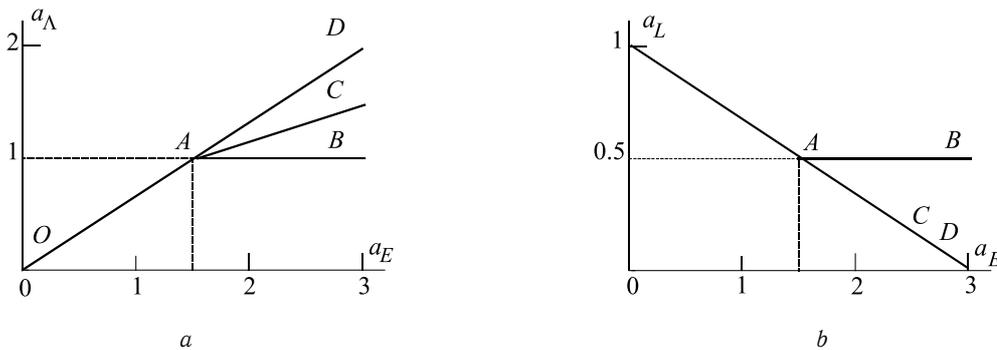


Рис. 4. Асимптотический портрет



Для жесткого основания (при $0 < a_E < 3/2$) независимо от знака гауссовой кривизны имеем (отрезок ОА на рис. 4)

$$\Lambda^* \sim h_*^{2a_E/3} \sim e^{2/3}, \quad L/R \sim h_*^{1-a_E/3}. \quad (9.10)$$

При этом параметр Λ тот же, что и для пластины и не зависит от ее толщины.

Для мягкого основания (при $a_E > 3/2$) асимптотические формулы для величин Λ^* и L зависят от знака гауссовой кривизны оболочки и от характера нагружения. Для выпуклых оболочек ($\rho_1 \rho_2 > 0$) и для цилиндрической (конической) оболочки при осевом сжатии зависимости $a_\Lambda(a_E)$ и $a_L(a_E)$ показаны на рис. 4 отрезками АВ и совпадают с аналогичными зависимостями при отсутствии основания ($e = 0$).

При $e > 0$ зависимость $a_\Lambda(a_E)$ для цилиндрической оболочки при кручении показана отрезком АС, а для цилиндрической оболочки при внешнем давлении и для оболочки отрицательной гауссовой кривизны — отрезком АД. Во всех названных здесь случаях (когда локальный подход неприменим при $e = 0$) зависимость $a_L(a_E)$ изображается одним и тем же отрезком АС или АД. Требование $L/R \ll 1$ приводит в этих случаях к ограничению на жесткость основания $a_E < 3$. Если же $a_E \geq 3$, локальный подход неприменим, ибо граничные условия существенно влияют на критическую нагрузку.

Напомним для сравнения (см. [9]), что в этих случаях при $e = 0$ для хорошо закрепленных оболочек средней длины имеют место следующие оценки: для цилиндрической оболочки при внешнем давлении $\Lambda^* \sim h_*^{3/2}$, $L/R \sim h_*^{1/4}$, для цилиндрической оболочки при кручении $\Lambda^* \sim h_*^{5/4}$, $L/R \sim h_*^{1/4}$, для оболочки отрицательной гауссовой кривизны $\Lambda^* \sim h_*^{4/3}$, $L/R \sim h_*^{1/3}$, причем константы в этих оценках зависят от граничных условий и от других факторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФМ (проект 07.01.00250а).

Библиографический список

1. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
4. Назаров С.А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Новосибирск: Научная книга, 2002. 408 с.
5. Товстик П.Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2007. № 3. С. 49–54.
6. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания: В 3-х т. / Под ред. Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т.3. 568 с.
7. Tovstik P.E., Tovstik T.P. On the 2D models of plates and shells including the shear // ZAMM. 2007. V. 87, № 2. P. 160–171.
8. Григолюк Э.И., Каюанов В.В. Устойчивость оболочек М.: Наука, 1978. 360 с.
9. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 320 с.
10. Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Товстик П.Е. Континуальные и дискретные модели в задаче устойчивости трехслойной нанопластины // Теор. и прикл. механика. Минск, 2005. Вып. 19. С. 37–41.
11. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 280 с.
12. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
13. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
14. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин. // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 477–479.
15. Баничук Н.В., Ишлинский А.Ю. О некоторых особенностях задач устойчивости и колебаний прямоугольных пластин // ПММ. 1995. Т. 59, № 4. С. 620–625.
16. Кильчевский Н.А., Никулинская С.В. Об осесимметричной потере устойчивости круговой цилиндрической оболочки // Прикл. мех. 1965. Т. 1, № 11. С. 1–6.
17. Ершова З.Г. Устойчивость цилиндрической панели со слабо закрепленными прямолинейными краями // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 93–97.
18. Морозов Н.Ф., Паукшто М.В., Товстик П.Е. Устойчивость поверхностного слоя при термонагружении // МТТ. 1998. № 1. С. 130–139.
19. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука. 1978. 332 с.
20. Товстик П.Е. Реакция предварительно напряженного ортотропного основания // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2006. № 4. 388 с.
21. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2005. Вып. 1. С. 147–160.
22. Работнов Ю.Н. Локальная устойчивость оболочек // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52, № 2. С. 111–112.
23. Ширишов В.П. Локальная устойчивость оболочек // Тр. 2 Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Киев, 1962. С. 314–317.
24. Болотин В.В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // ПММ. 1960. Т. 24, Вып. 5.