



## Библиографический список

1. Теляковский С. А. О свойствах блоков членов ряда  $\sum \frac{1}{k} \sin kx$  // Украинский мат. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 713–718. [Telyakovskii S. A. On properties of blocks of the series  $\sum \frac{1}{k} \sin kx$  // Ukrainian Math. J. 2012. Vol. 64. P. 713–718.]
2. Trigub R. M. A note on the paper of Telyakovskii «Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation» // East J. on Approx. 2007. Vol. 13, № 1. P. 1–6.

УДК 517.97

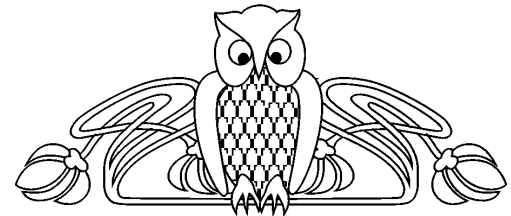
# МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. А. Трушкова

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,  
Москва  
E-mail: katerinatra@mail.ru

Представлена новая модификация метода глобального улучшения управления на базе известного метода В. Ф. Кротова для задач управления гамильтоновыми системами одного класса. Проведены расчеты по управлению квантовой динамической системой, представляющей известную модель вращения плоской молекулы.

**Ключевые слова:** гамильтонова система, оптимальное управление, метод глобального улучшения.



## Global Improvement Method for Hamiltonian Systems with Controllable Coefficients

E. A. Trushkova

The new modification of global improvement control method for one class of Hamiltonian systems that is based on the Krotov method is presented. The calculations for a quantum dynamical system representing the well studied example of the rotation of a planar molecule are given.

**Key words:** Hamiltonian system, optimal control, global improvement method.

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Широкий и актуальный класс задач изменения квантового состояния атомов и молекул под действием управляемого внешнего поля сводится к задаче оптимального управления гамильтоновой системой с управляемыми коэффициентами (см., например, [1]). А именно уравнение Шрёдингера после разложения волновой функции и соответствующих операторов по полной системе собственных функций заменяется конечномерной аппроксимацией — динамической системой с управлением, в которой роль фазовых координат играют коэффициенты разложения волновой функции. Дальнейшее рассмотрение действительной и мнимой части фазовых координат приводит к задаче управления гамильтоновой системой.

Рассмотрим задачу управления гамильтоновой системой:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u(t))x(t), & t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, & x \in R^{2n}, & u : [t_I, t_F] \rightarrow R^p, & u(\cdot) \in U(m, u_{low}, u_{up}), \\ J(x, u) &= F(x(t_F)) = (x(t_F) - x^*)^T (x(t_F) - x^*) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t)$  — кусочно дифференцируема,  $U(m, u_{low}, u_{up})$  — множество функций, принимающих постоянное значение на полуотрезках  $[t_I + ih, t_I + (i + 1)h)$ ,  $i = 0, m - 1$ ,  $h = (t_F - t_I)/m$  и подчиняющихся ограничениям  $u_{low} \leq u(t) \leq u_{up}$  (неравенства понимаются как покоординатные),

$$A(u(t)) = \begin{pmatrix} 0 & P(u(t)) \\ -P(u(t)) & 0 \end{pmatrix},$$

$P(u)$  — симметрическая матрица, непрерывная по  $u$ ,  $x^* \in R^{2n}$  — заданная точка. Нетрудно видеть, что данная задача является задачей наилучшего попадания в заданную точку.

Система имеет динамический инвариант  $S = \sum_{i=1}^{2n} x_i^2(t_I) = \sum_{i=1}^{2n} x_i^2(t)$ , следовательно, исходный квадратичный функционал качества переписывается в линейном виде  $F(x(t_F)) = (x(t_F) - x^*)^T \times (x(t_F) - x^*) = S + x^{*T}x^* - 2x^{*T}x(t_F)$ . Всюду в дальнейшем будем предполагать, что  $x^{*T}x^* = S$ ,



поэтому целевой функционал окончательно примет вид

$$F(x(t_F)) = 2S - 2x^{*T}x(t_F).$$

Введем в рассмотрение дискретную задачу управления:

$$\begin{aligned} y(t+h) &= f(t, y(t), u(t)), & t \in \{t_I, t_I+h, \dots, t_F-h\}, \\ y(t_I) &= x_I, & y \in R^{2n}, \quad u \in U(t, m, u_{low}, u_{up}) \subset R^p, & F(x(t_F)) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $f(t, y(t), u(t))$  — решение задачи Коши

$$\dot{z}(\tau) = A(u(t))z(\tau), \quad \tau \in [t, t+h], \quad z(t) = y(t), \quad (3)$$

взятое в точке  $\tau = t+h$ .

Поставим задачу улучшения управления для исходной системы: пусть имеется допустимая пара  $(x^I, u^I)$  задачи (1), требуется найти допустимую пару  $(x^{II}, u^{II})$  задачи (1) такую, чтобы выполнялось неравенство  $F(x^{II}(t_F)) \leq F(x^I(t_F))$ . Для системы (2) аналогично: пусть имеется допустимая пара  $(y^I, u^I)$  задачи (2), требуется найти допустимую пару  $(y^{II}, u^{II})$  задачи (2) такую, чтобы выполнялось неравенство  $F(y^{II}(t_F)) \leq F(y^I(t_F))$ .

Заметим, что множества допустимых управлений для задач (1) и (2) совпадают и, кроме того, для каждого допустимого управления  $\bar{u}(t)$  значения функционала качества на соответствующих траекториях  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{y}(t)$  совпадают, т.е. верно равенство  $F(\bar{x}(t_F)) = F(\bar{y}(t_F))$ . Следовательно, задачи улучшения управления для (1) и (2) эквивалентны.

## 2. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГЛОБАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ

Для решения поставленной задачи улучшения управления будем использовать метод глобального улучшения [2, 3], а именно соотношения метода для линейной по  $x$  динамической системы с линейным функционалом качества из [4].

Глобальный метод улучшения для задачи (2) состоит из следующих шагов.

1. Имеем начальный допустимый процесс  $(y^I(t), u^I(t))$ .
2. Ищем функцию  $\varphi(t, y)$  из соотношений

$$\varphi(t, y) = \varphi(t+h, f(t, y, u^I(t))), \quad t \in \{t_I, t_I+h, \dots, t_F-h\}, \quad \varphi(t_F, y) = 2S - F(y). \quad (4)$$

3. Строим функцию

$$\tilde{u}(t, y) = \arg \max_{u \in U} (\varphi(t+h, f(t, y, u))), \quad t \in \{t_I, t_I+h, \dots, t_F-h\}.$$

4. Находим улучшенный допустимый процесс из соотношений

$$y(t+h) = f(t, y(t), \tilde{u}(t, y(t))), \quad t \in \{t_I, t_I+h, \dots, t_F-h\}, \quad y(t_I) = x_I.$$

При программной реализации второго шага метода на задачах большой размерности возникают трудности. Следующая теорема позволяет осуществить второй шаг более эффективно, так как сводит его к решению одной задачи Коши.

**Теорема 1.** Функция  $\varphi(t, y) = \psi^T(t)y$ , где  $\psi(t)$  — решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = A(u^I(t))\psi(t), \quad t \in [t_I, t_F], \quad \psi(t_F) = 2x^*,$$

разрешает соотношения (4).

**Доказательство.** Для указанной в условии теоремы функции  $\varphi(t, y)$  проверим выполнение последнего из соотношений (4). Имеем:

$$\varphi(t_F, y) = \psi^T(t_F)y = 2x^{*T}y = 2S - (2S - 2x^{*T}y) = 2S - F(y),$$

следовательно, проверяемое соотношение верно.

Рассмотрим соотношения (4) при  $t = t_F - h$ :

$$\varphi(t_F - h, y) = \varphi(t_F, f(t_F - h, y, u^I(t_F - h))). \quad (5)$$



Используя (3), преобразуем правую часть равенства (5):

$$\varphi(t_F, f(t_F - h, y, u^I(t_F - h))) = \psi^T(t_F) f(t_F - h, y, u^I(t_F - h)) = \psi^T(t_F) M(t_F) y,$$

где  $M(t_F) = e^{A(u^I(t_F - h))h}$  — значение при  $\tau = t_F$  фундаментальной матрицы решений задачи Коши

$$\dot{z}(\tau) = A(u^I(t_F - h)) z(\tau), \quad \tau \in [t_F - h, t_F], \quad z(t_F - h) = y,$$

обращающейся при  $\tau = t_F - h$  в единичную матрицу.

По условию теоремы и в силу рассматриваемого класса управлений  $U(t, m, u_{low}, u_{up})$  на отрезке  $[t_F - h, t_F]$  функция  $\psi(t)$  является решением задачи Коши:

$$\dot{z}(\tau) = A(u^I(t_F - h)) z(\tau), \quad \tau \in [t_F - h, t_F], \quad z(t_F) = \psi(t_F),$$

поэтому левая часть (5) примет вид

$$\varphi(t_F - h, y) = \psi^T(t_F - h) y = \psi^T(t_F) (M^T(t_F))^{-1} y.$$

В силу свойств матричной экспоненты и справедливости равенства  $A = -A^T$  можем записать

$$M(t_F) = e^{A(u^I(t_F - h))h} = e^{-A^T(u^I(t_F - h))h} = (M^T(t_F))^{-1},$$

следовательно, левая и правая части доказываемого равенства совпадают.

Для полного доказательства теоремы достаточно рассмотреть аналогичным образом соотношения (4) последовательно при  $t = t_F - 2h, \dots, 0$ . □

### 3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ СИСТЕМОЙ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Рассмотрим известный пример вращения плоской молекулы [1]. Состояние системы в момент времени  $t$  описывается точкой  $\psi(t) \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , где  $\Omega$  — одномерный тор. Уравнение Шрёдингера записывается в виде

$$i \frac{\delta \psi}{\delta t}(t, \theta) = -\Delta \psi(t, \theta) + u(t) \cos \theta \psi(t, \theta), \quad (6)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа–Бельтрами на  $\Omega$ . Самосопряженный оператор  $\Delta$  имеет чисто дискретный спектр  $\{k^2, k \in \mathbb{N}\}$ . Все его собственные значения имеют кратность 2, а собственное значение 0 — простое. Собственное значение 0 соответствует постоянным функциям, а собственное значение  $k^2$  при  $k > 0$  соответствует двум собственным функциям  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\theta)$  и  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta)$ . Гильбертово пространство  $H = L^2(\Omega, \mathbb{C})$  разбивается на два подпространства  $H_e$  и  $H_o$  — пространства четных и нечетных функций из  $H$  соответственно. Пространства  $H_e$  и  $H_o$  устойчивы под действием динамики (6).

Наша цель — в подпространстве  $H_o$  перевести волновую функцию  $\psi(t, \theta)$  из первого собственного подпространства (соответствующего собственному значению 1) во второе (соответствующее собственному значению 4).

Перепишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\delta \psi}{\delta t}(t, \theta) = i \Delta \psi(t, \theta) - i u(t) \cos \theta \psi(t, \theta), \quad (7)$$

разложим по собственным функциям  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta)$  волновую функцию:

$$\psi(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta),$$

а также операторы  $i\Delta$  и  $-iu(t) \cos \theta$ . Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = (A + u(t)B)z.$$



Аппроксимации Галеркина порядка  $N$  для  $A, B$  запишутся в виде

$$A^{(N)} = - \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)^2 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N^2 i \end{pmatrix}, \quad B^{(N)} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая конечномерная аппроксимация последнего уравнения запишется как

$$\frac{dz}{dt} = (A^{(N)} + u(t)B^{(N)})z, \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

После выделения в этом уравнении вещественной и мнимой части ( $z = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ ,  $x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2N}$ ) получаем управляемую гамильтонову систему рассматриваемого выше класса систем:

$$\dot{x}(t) = A(u(t))x(t),$$

где  $P(u) = i(A^{(N)} + B^{(N)}u)$ .

В [1] показано, что при замене исходной системы ее аппроксимацией Галеркина порядка  $N = 22$  ошибка будет меньше  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-6}$ , если  $\|u(t)\|_{L^1} \leq 13/3$ . Применим вышеописанную модификацию метода глобального улучшения к задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u(t))x(t), & t \in [0, 20], \\ x(0) &= (1, 0, \dots, 0)^T, & x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad N = 22, \quad u \in [-1/3, 1/3], \end{aligned}$$

с функционалом наилучшего попадания в точку  $x^* = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$  (что соответствует выводу модуля второй компоненты  $z_2(t)$  на единицу). Результаты расчетов по улучшению начального управления  $u^I = 0$  для каждой четной из 10 итераций представлены в следующей таблице.

Номер итерации	$F(x(t_F))$	$ z_2(t_F) $
0	2	0
2	0.00013	0.999993
4	$1.6 \cdot 10^{-5}$	0.999994
6	$5.5 \cdot 10^{-6}$	0.999995
8	$5.1 \cdot 10^{-6}$	0.999995
10	$5.1 \cdot 10^{-6}$	0.999995

Рис. 1 представляет найденное управление, рис. 2 — соответствующую динамику модуля второй компоненты  $z_2(t)$ . Интересным оказался тот факт, что найденное управление сильно напоминает предложенную в [3] (без привлечения теории оптимального управления) функцию управления  $u(t) = \cos(3t)/q$ , где  $q$  выбиралось из условия  $\|u(t)\|_{L^1} \leq 13/3$  на рассматриваемом отрезке времени  $[0, t_F]$ .

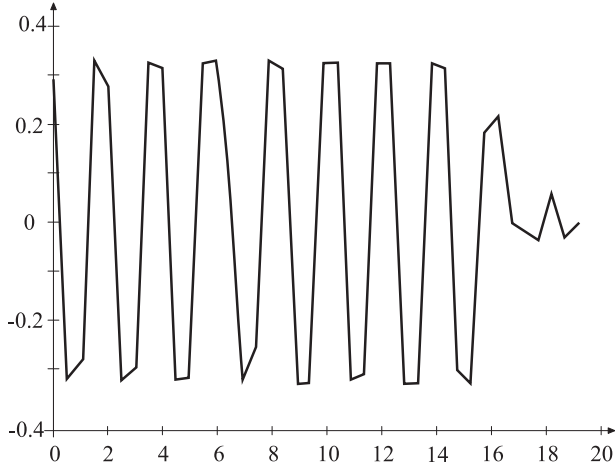


Рис. 1. Полученное управление при начальном  $u^I(t) = 0$

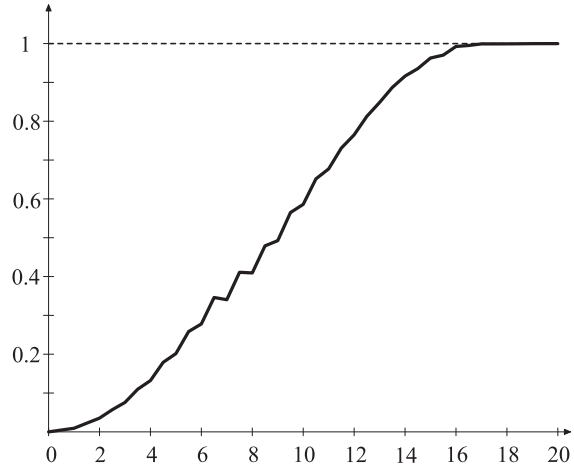


Рис. 2. Динамика  $|z_2(t)|$  при найденном управлении



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная новая модификация метода глобального улучшения управления позволяет проводить расчеты по улучшению управления для задач большой размерности. Проведенные тестовые вычислительные эксперименты, в том числе для задачи управления квантовой системой с дискретным спектром, с помощью программной реализации разработанного метода на языке программирования C++, позволяют сделать вывод об эффективности метода для рассматриваемого класса задач управления гамильтоновыми системами с переменными коэффициентами.

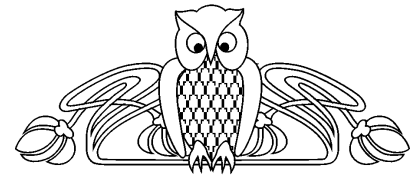
*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00256).*

## Библиографический список

1. Boussaid N., Caponigro M., Chambrion T. Periodic control laws for bilinear quantum system with discrete spectrum. 2011. URL : <http://arXiv.org/pdf/1111.4550v1>.
2. Кротов В. Ф., Фельдман И. Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168. [Krotov V. F., Feldman I. N. Iterative method for solving optimal control problems // Izv. AS USSR. Techn. Cybern. 1983. № 2. P. 160–168.]
3. Кротов В. Ф., Булатов А. В., Батурина О. В. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автомат. и телемех. 2011. № 6. С. 64–78. [Krotov V. F., Bulatov A. V., Baturina O. V. Optimization of linear systems with controllable coefficients // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 6. P. 1199–1212.]
4. Трушкова Е. А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автомат. и телемех. 2011. № 6. С. 151–159. [Trushkova E. A. Global control improvement algorithms // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 6. P. 1282–1290.]

УДК 591.65

## О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЕМЕЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА



И. А. Шакиров

Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов  
E-mail: iskander@tatngpi.ru

Для семейства интерполяционных полиномов Лагранжа, определенных в четном числе узлов, получены различные явные (безмодульные) виды функций Лебега. Последние разбиты на непересекающиеся классы, которые затем последовательно исследованы с использованием элементов дифференциального исчисления. Установлена взаимосвязь между функциями, а также константами Лебега из этих классов.

**Ключевые слова:** тригонометрические полиномы Лагранжа, обобщенное ядро Дирихле, функции и константы Лебега.

### About the Fundamental Characteristics of the Lagrange Interpolation Polynomials Family

I. A. Shakirov

For the Lagrange interpolation polynomials family, determined in the even number of nodes, it is obtained various explicit (unmodulus) forms of the Lebesgue functions. They are divided into uncrossing classes, which are consecutively studied using the elements of differential calculus then. The interdependence is established between the functions, as so as between the Lebesgue constants from these classes.

**Key words:** Lagrange trigonometric polynomials, generalized Dirichlet kernel, Lebesgue functions and constants.

## ВВЕДЕНИЕ

В математической литературе до сих пор не проведено исследование аппроксимативных возможностей семейства интерполяционных полиномов Лагранжа [1]

$$\Phi_n(x, t, \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k) D_n^*(t_k - t) + \alpha \sin nt, \quad D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg}(u/2)}, \quad (1)$$

в зависимости от поведения параметра  $\alpha$  ( $\alpha \in R$ ), в частности, в классическом пространстве непрерывных  $2\pi$ -периодических функций  $C_{2\pi} = C[0, 2\pi]$ . Такая возможность появилась после моноядерного описания [2] полиномов (1) в виде

$$\Phi_n^c(x, t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k) D_n^c(t_k - t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^c(t_k - t), \quad c \in R, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2)$$