9. Bredikhin D. A. Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations. *Semigroup Forum*, 1992, vol. 44. pp. 87–192.
10. Bredikhin D. A. On varieties of groupoids of binary relations. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 13–21 (in Russian).
11. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. *Cylindric Algebras*. North-Holland, Amsterdam, 1971, 311 p.

УДК 511

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ И ИХ СЛЕДСТВИЯХ

А. Н. Васильев

Преподаватель кафедры математики и информатики, Казахстанский филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Астана, Республика Казахстан, antonvassilyev@mail.ru

В работе изучены некоторые свойства распределения членов обобщенной последовательности Фибоначчи по бесквадратному модулю и получены следствия из этих свойств.

Ключевые слова: обобщенная последовательность Фибоначчи, тригонометрические суммы, плотность множества.

1. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ

Последовательность Фибоначчи, как известно, задается следующим образом: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Обобщенная последовательность Фибоначчи задается тем же рекуррентным соотношением и двумя начальными натуральными членами, т. е. $G_1 = a$, $G_2 = b$, $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$, где a, b — натуральные числа. Вторую последовательность на протяжении всей работы будем считать наперед заданной.

Пусть, на протяжении всей работы, d — бесквадратное (не делящееся ни на какой квадрат простого) натуральное число, большее 1 и взаимно простое с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$ (это экзотическое условие будет мотивировано позже). Через p будем обозначать, как обычно, простое число. В первой части это будут простые, взаимно простые с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$. Во второй части простые, выступающие делителями какого-нибудь d, также будут предполагаться удовлетворяющими этому дополнительному условию.

Введем малый d-период последовательности Фибоначчи $t(d) = \min\{\tau : \tau \geq 1,\ d \,|\, F_\tau\}$ и большой d-период последовательности Фибоначчи $T(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, F_{n+\mathrm{T}} \equiv F_n (\operatorname{mod} d)\ \forall\ n\}$. Аналогично, большой d-период обобщенной последовательности Фибоначчи есть $T'(d) = \min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, G_{n+\mathrm{T}} \equiv G_n (\operatorname{mod} d)\ \forall\ n\}$ (периодичность по любому модулю доказывается просто). Аналога малого d-периода может не существовать (например, если $a = 2$, $b = 1$, $d = 5$).

Выделим необходимые нам свойства последовательности Фибоначчи в следующую лемму.

Лемма 1.1.

А) $F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ *(формула Бине).*

Б) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}$.

В1) $d \,|\, F_n \ \Leftrightarrow\ t(d) \,|\, n$.

В2) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} d), \\ F_{\alpha+1} \equiv F_{\beta+1} (\operatorname{mod} d) \end{cases} \Leftrightarrow\ T(d) \,|\, (\alpha - \beta)$.

Г) $T(d)/t(d) \in \{1, 2, 4\}$.

Д) $d = p_1 p_2 \ldots p_s \ \Rightarrow\ t(d) = [t(p_1), t(p_2), \ldots, t(p_s)]$.

© Васильев А. Н., 2013

Е1) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} p), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p) \end{cases} \Rightarrow t(p) \,|\, (\alpha - \beta)$ *или* $t(p) \,|\, \gamma \Rightarrow t(p) \,|\, (\alpha - \beta)\gamma.$

Е2) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} d), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} d) \end{cases} \Rightarrow t(d) \,|\, (\alpha - \beta)\gamma.$

Доказательство: Свойства А, Б, В1, В2, Г, Д хорошо известны (см., например, [1] и [2]). Докажем два оставшихся свойства. Начнем с Е1. По свойству Б имеем:

$$F_{\alpha+\gamma} = F_\alpha F_{\gamma-1} + F_{\alpha+1} F_\gamma, \qquad F_{\beta+\gamma} = F_\beta F_{\gamma-1} + F_{\beta+1} F_\gamma,$$

поэтому из сравнений $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} p), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p) \end{cases}$ следует, что $p \,|\, (F_{\alpha+1} - F_{\beta+1}) F_\gamma$, откуда $p \,|\, F_\gamma$ или $p \,|\, (F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$. Из $p \,|\, F_\gamma$ согласно свойству В1 следует, что $t(p) \,|\, \gamma$, а из $p \,|\, (F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$ согласно свойству В2 следует, что $T(p) \,|\, (\alpha - \beta)$, откуда согласно свойству Г $t(p) \,|\, (\alpha - \beta)$.

Теперь докажем свойство Е2. Пусть $d = p_1 p_2 \ldots p_s$. Из сравнений $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} d), \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} d) \end{cases}$ для любого $p_i \,|\, d$ следуют сравнения $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (\operatorname{mod} p_i) \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p_i) \end{cases}$, откуда для всякого $p_i \,|\, d$ по свойству Е1 имеем: $t(p_i) \,|\, (\alpha - \beta)\gamma$, что согласно свойству Д означает, что $t(d) \,|\, (\alpha - \beta)\gamma$. Лемма доказана.

Теперь докажем некоторые свойства обобщенной последовательности Фибоначчи.

Лемма 1.2.

А) $G_n = a F_{n-2} + b F_{n-1}$.

Б) $T'(d) \,|\, T(d)$.

В) $t(d) \,|\, T'(d)$.

Г) $t(d) \le T'(d) \le T(d) \le 4t(d)$.

Д1) $\begin{cases} G_\alpha \equiv G_\beta (\operatorname{mod} p), \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} p) \end{cases} \Rightarrow t(p) \,|\, (\alpha - \beta)$ *или* $t(p) \,|\, \gamma \Rightarrow t(p) \,|\, (\alpha - \beta)\gamma.$

Д2) $\begin{cases} G_\alpha \equiv G_\beta (\operatorname{mod} d) \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (\operatorname{mod} d) \end{cases} \Rightarrow t(d) \,|\, (\alpha - \beta)\gamma.$

Доказательство: Первое соотношение хорошо известно, соотношение Б доказывается тривиально. Соотношение Г следует из соотношений Б, В и соотношения Г леммы 1.1. Соотношение Д2 вытекает из соотношения Д1. Докажем пункт Д1. Используя соотношение А, имеем:

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (\operatorname{mod} p), \\ aF_{\alpha+\gamma-2} + bF_{\alpha+\gamma-1} \equiv aF_{\beta+\gamma-2} + bF_{\beta+\gamma-1} (\operatorname{mod} p). \end{cases}$$

Далее, используем соотношение Б леммы 1.1 и получаем:

$$aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (\operatorname{mod} p)$$

и

$$a(F_{\alpha-2}F_{\gamma-1} + F_{\alpha-1}F_\gamma) + b(F_{\alpha-1}F_{\gamma-1} + F_\alpha F_\gamma) \equiv$$
$$\equiv a(F_{\beta-2}F_{\gamma-1} + F_{\beta-1}F_\gamma) + b(F_{\beta-1}F_{\gamma-1} + F_\beta F_\gamma) (\operatorname{mod} p),$$

что преобразуется к виду

$$aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (\operatorname{mod} p)$$

и $\quad F_{\gamma-1}(aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1})+F_{\gamma}(aF_{\alpha-1}+bF_{\alpha})\equiv F_{\gamma-1}(aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1})+F_{\gamma}(aF_{\beta-1}+bF_{\beta})(\operatorname{mod}p)$, откуда

$$\begin{cases}aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1}\equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1}(\operatorname{mod}p),\\ F_{\gamma}(aF_{\alpha-1}+bF_{\alpha})\equiv F_{\gamma}(aF_{\beta-1}+bF_{\beta})(\operatorname{mod}p).\end{cases}$$

Отсюда либо $p\,|\,F_{\gamma}$, что согласно пункту В1 леммы 1.1 означает $t(p)\,|\,\gamma$, либо

$$\begin{cases}aF_{\alpha-2}+bF_{\alpha-1}\equiv aF_{\beta-2}+bF_{\beta-1}(\operatorname{mod}p),\\ aF_{\alpha-1}+bF_{\alpha}\equiv aF_{\beta-1}+bF_{\beta}(\operatorname{mod}p),\end{cases}$$

что преобразуется к виду

$$\begin{cases}a(F_{\alpha-2}-F_{\beta-2})+b(F_{\alpha-1}-F_{\beta-1})\equiv 0(\operatorname{mod}p)\\ b(F_{\alpha-2}-F_{\beta-2})+(a+b)(F_{\alpha-1}-F_{\beta-1})\equiv 0(\operatorname{mod}p)\end{cases}$$

и приводится с помощью правила Крамера в поле вычетов по модулю p к виду

$$\begin{cases}F_{\alpha-2}-F_{\beta-2}\equiv 0(\operatorname{mod}p)\\ F_{\alpha-1}-F_{\beta-1}\equiv 0(\operatorname{mod}p)\end{cases}$$

(поскольку $\det\begin{pmatrix}a & b\\ b & a+b\end{pmatrix}=a^2+ab-b^2\not\equiv 0(\operatorname{mod}p)$), откуда по свойству В2 леммы 1.1 $T(p)\,|\,(\alpha-\beta)$ и, следовательно, $t(p)\,|\,(\alpha-\beta)$. Теперь докажем пункт В. Поскольку $G_1\equiv G_{1+T'(d)}(\operatorname{mod}d)$ и $G_2\equiv G_{2+T'(d)}(\operatorname{mod}d)$, то по свойству Д2 $t(d)\,|\,T'(d)$. Лемма доказана.

Далее, рассмотрим $A(d,u)=a_1^2+a_2^2+\dots+a_d^2$, где a_k — количество членов конечной последовательности $G_1,G_2,\dots,G_u$, сравнимых с k по модулю d. Используя аппарат тригонометрических сумм, нетрудно вывести соотношение

$$A(d,u)=\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u}e^{2\pi i\frac{aG_n}{d}}\right|^2.$$

Следующая теорема является конечной целью первой части. Для краткости $t(d)=t$, $T(d)=T$, $T'(d)=T'$.

Теорема 1.1. *Для $u\le T'$ имеет место оценка*

$$A(d,u)\le B(d,u),$$

где

$$B(d,u)=\begin{cases}3u-2,\ \textit{если}\ u<\sqrt{t}+1,\\ 7u^2t^{-1/4},\ \textit{если}\ \sqrt{t}+1\le u\le t^{3/4},\\ 14u^2t^{-1/8},\ \textit{если}\ t^{3/4}<u\le T'.\end{cases}$$

Если $u>T'$, то

$$A(d,u)\le 56u^2t^{-1/8}.$$

Доказательство. Для удобства разобьем доказательство на несколько шагов.

1. Зафиксируем k, $1\le k\le d$. Пусть $1\le j_1<\dots<j_{a_k}\le u$ — все j, для которых $G_j\equiv k(\operatorname{mod}d)$. Обозначим $b_h=j_{h+1}-j_h$, $1\le h\le a_k-1$, $b_h\ge 1$. Тогда $b_1+\dots+b_{a_k-1}=j_{a_k}-j_1\le u-1$.

Пусть $1\le\rho_1<\dots<\rho_s$ – все различные числа, встречающиеся в последовательности $b_1,\dots,b_{a_k-1}$. Имеем:

$$\sum_{v=1}^{s}c_v\rho_v\le u-1,\qquad \sum_{v=1}^{s}c_v=a_k-1.$$

2. Зафиксируем v. Пусть $1 \le h_1 < \dots < h_{c_v} \le a_k - 1$ — все индексы h такие, что $b_k = \rho_v$. Согласно пункту Д2 леммы 1.2, поскольку $\begin{cases} G_{j_{h_i}} \equiv G_{j_{h_i+1}} (\operatorname{mod} d), \\ G_{j_{h_{i+1}}} \equiv G_{j_{h_{i+1}+1}} (\operatorname{mod} d) \end{cases}$ и $j_{h_i+1} - j_{h_i} = j_{h_{i+1}+1} - j_{h_{i+1}}$, то $t | (j_{h_i+1} - j_{h_i})(j_{h_{i+1}} - j_{h_i})$, откуда $\rho_v (j_{h_{i+1}} - j_{h_i}) \ge t$ для всех $1 \le i \le c_v - 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{c_v-1} \frac{t}{\rho_v} \le \sum_{i=1}^{c_v-1} (j_{h_{i+1}} - j_{h_i}) \le u - 1,$$

и, значит,

$$c_v \le \frac{(u-1)\rho_v}{t} + 1.$$

3. Итак, имеем:

$$\begin{cases} c_v \le (u-1)\rho_v/t + 1, \\ \sum\limits_{v=1}^{s} c_v \rho_v \le u - 1, \\ a_k = 1 + \sum\limits_{v=1}^{s} c_v. \end{cases}$$

Пусть теперь $w(q)$ — количество таких v, что $c_v = q$. Поскольку все ρ_v различны, то

$$u - 1 \ge \sum_{v=1}^{s} c_v \rho_v \ge \sum_{v:\ c_v = q} c_v \rho_v \ge q(1 + 2 + \dots + w(q)),$$

откуда $w(q) \le (2(u-1)/q)^{1/2}$. С другой стороны,

$$u - 1 \ge \sum_{v=1}^{s} c_v \rho_v \ge \sum_{v=1}^{s} t(c_v - 1)c_v/(u-1),$$

поэтому

$$\sum_{v=1}^{s} c_v(c_v - 1) \le (u-1)^2/t.$$

4. а) Рассмотрим случай, когда $u < \sqrt{t} + 1$. Рассмотрим все пары индексов (n_1, n_2), такие, что $1 \le n_1 < n_2 \le u$ и $G_{n_1} \equiv G_{n_2} (\operatorname{mod} d)$. Если среди них найдутся две различные пары (n_1, n_2), (n'_1, n'_2), для которых $n_2 - n_1 = n'_2 - n'_1$, то, согласно пункту Д2 леммы 1.2, $t \,|\, (n_2 - n_1)(n'_1 - n_1)$, откуда $t \le |(n_2 - n_1)(n'_1 - n_1)| \le (u-1)^2 < t$ — противоречие. Значит, все разности индексов в таких парах различны. А теперь посчитаем количество всех таких пар, и, соответственно, всех разностей индексов в них. Таких разностей ровно $\sum\limits_{k=1}^{d} a_k(a_k - 1)/2$. Но всех возможных значений разности индексов в указанном промежутке ровно $u - 1$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{d} a_k(a_k - 1)/2 \le u - 1$, откуда $A(d, u) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_d^2 \le 3u - 2$.

б) Теперь рассмотрим случай, когда $u \ge \sqrt{t} + 1$. Тогда все $c_v \le (u-1)/\sqrt{t} + 1$, откуда

$$s = \sum_{1 \le q \le (u-1)/\sqrt{t}+1} w(q) \le \sum_{1 \le q \le (u-1)/\sqrt{t}+1} \sqrt{(2u-2)/q} \le 4ut^{-1/4}.$$

Далее, $a_k = 1 + \sum\limits_{v=1}^{s} c_v$, $\left(\sum\limits_{v=1}^{s} c_v\right)^2 \le s \left(\sum\limits_{v=1}^{s} c_v^2\right) \le s(u-1)^2/t + s \sum\limits_{v=1}^{s} c_v$, отсюда

$$\left(\sum_{v=1}^{s} c_v - s/2\right)^2 \le s^2/4 + s(u-1)^2/t$$

и, значит,

$$\sum_{v=1}^{s} c_v \le s + u\sqrt{s/t} \le 4ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8}.$$

Получаем для всякого k: $a_k = 1 + \sum\limits_{v=1}^{s} c_v \le 5ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8}$. Имеем: $A(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2 \le$ $\le (a_1+\cdots+a_d)\cdot\max a_k \le u\cdot(5ut^{-1/4}+2u^{3/2}t^{-5/8})$. Согласно свойству Г леммы 1.2, $t \le T' \le T \le 4t$. Тем самым, если $\sqrt{t}+1 \le u \le t^{3/4}$, то $A(d,u) \le u\cdot(5ut^{-1/4}+2u^{3/2}t^{-5/8}) \le 7u^2t^{-1/4}$. Если же $t^{3/4} < u \le T'$, то $A(d,u) \le u\cdot(5ut^{-1/4} + 2u^{3/2}t^{-5/8}) \le 7u^{5/2}t^{-5/8} \le 14u^2t^{-1/8}$. И наконец, если $u > T'$, то исходя непосредственно из определения $A(d,u)$ получаем: $A(d,u) \le (u/T'+1)^2 A(d,T') \le 56u^2t^{-1/8}$.

Теорема доказана.

2. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ РОМАНОВА НА СЛУЧАЙ ОБОБЩЕННЫХ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

В 1934 году Н. П. Романов доказал [3], что сумма множества простых чисел и множества натуральных степеней фиксированного целого числа $a \ge 2$ образует множество положительной плотности (в смысле плотности, по Шнирельману), иными словами, $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\mathrm{card}\,\{n : n \le x,\ n = p + a^m\}\right) > 0$ (через $\mathrm{card}\,X$ обозначено количество элементов множества X). В дальнейшем были получены некоторые аналоги этой теоремы. Например, в 1951 году П. Эрдеш (P. Erdos) заменил ([4]) в теореме Романова степени a^m значениями многочлена с целыми коэффициентами от степени, т. е. $f(a^m)$, где f — не равный константе многочлен с целыми коэффициентами.

В. Н. Чубариковым была поставлена задача получения аналога теоремы Романова для чисел Фибоначчи. В неопубликованной к настоящему времени работе «On the sum of a prime and a Fibonacci number», выложенной в архиве (arXiv: 1011.0173v1 [math.NT] 31 Oct 2010) и поданной в журнал «International Journal of Number Theory», К. Ли (Lee K. S. Enoch) приводит доказательство этого аналога.

Здесь мы доказываем более общую теорему, используя другой подход, а именно, опираясь на оценку, полученную в первой части.

Теорема 2.1. *Сумма множества простых чисел и множества обобщенных чисел Фибоначчи (наперед заданных) имеет положительную плотность (по Шнирельману), т. е.*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\mathrm{card}\,\{n : n \le x,\ n = p + G_m\}\right) > 0.$$

Доказательство. Наше доказательство будет проведено в духе доказательства теоремы Романова, приведенном в работе[5, с. 191–197]. Сформулируем несколько лемм из [5], которые нам понадобятся.

Лемма 2.1 [5, с. 60]. *Пусть b — четное целое ненулевое число. Имеет место оценка*

$$\mathrm{card}\,\{p : p \le x,\ |p+b| \text{ — простое}\} \le c_1 \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{p\,|\,b} (1-1/p)^{-1}.$$

Здесь c_1 — абсолютная константа, т. е. не зависит от b.

Лемма 2.2 [5, с. 28]. *Существует такая константа $c_2 > 0$, что*

$$\prod_{p\le x} (1-1/p)^{-1} = c_2 \ln x + O(1).$$

Лемма 2.3 (следствие из предыдущей леммы). *Пусть p_n — n-е простое число. Тогда*

$$\prod_{n=1}^{N} (1+1/p_n) = O(\ln N).$$

Лемма 2.4. *Обозначим $f(n) = f(n,x) = \mathrm{card}\,\{(p, G_m) : p \le x,\ G_m \le x,\ p + G_m = n\}$. Если существует такая константа c_3, что для всех $x \ge x_0$ (т. е. начиная с какого-то фиксированного x_0) справедливо неравенство*

$$\sum_{n\le x} f^2(n,x) \le c_3 \sum_{n\le x} f(n,x),$$

то существует такая константа $c_4 > 0$, что для всех $x \geq x_0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\} \geq c_4 x.$$

Доказательство (аналогично рассуждениям, приведенным в [5, с. 192]).

Имеем:

$$\sum_{n \leq x} f(n,x) \geq \operatorname{card}\{p : p \leq x/2\} \cdot \operatorname{card}\{G_m: \ G_m \leq x/2\} \geq c_5 \frac{x}{\ln x} \cdot c_6 ln x = c_7 x,$$

откуда из неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратическом

$$\sum_{n \leq x} f(n,x) \leq (\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\})^{1/2} \left(\sum_{n \leq x} f^2(n,x) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq (\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\})^{1/2} \cdot c_3^{1/2} \cdot \left(\sum_{n \leq x} f(n,x) \right)^{1/2},$$

следовательно,

$$\operatorname{card}\{n: \ n \leq x, \ f(n,x) > 0\} \geq c_7 x / c_3 = c_4 x,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Ряд* $\sum\limits'_{d \geq 2} \dfrac{1}{d(t(d))^{\varepsilon}}$, *где $\varepsilon > 0$, сходится. $\sum'$ означает суммирование по бесквадратным числам.*

Доказательство (аналогично рассуждениям, приведенным в [5, с. 196]).

Имеем:

$$\sum_{d \geq 2}{}' \frac{1}{d(t(d))^{\varepsilon}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\varepsilon}} \sum_{t(d)=n}{}' \frac{1}{d} \right).$$

Пусть $c_n = \sum\limits'_{t(d)=n} 1/d$, $f(x) = x^{-\varepsilon}$, $C(x) = \sum\limits_{2<n \leq x} \sum\limits'_{t(d)=n} 1/d$. Каждое d встречается в $C(x)$ не более одного раза, все $d \,|\, P$, $P = \prod\limits_{2<n \leq x} F_n < 2^{x^2}$, отсюда

$$C(x) \leq \sum_{d \,|\, P}{}' \frac{1}{d} = \prod_{p \,|\, P (1+1/p)} \leq \prod_{n \leq x^2} \left(1 + \frac{1}{p_n} \right) = O(\ln x)$$

(согласно лемме 2.3). Применяем преобразование Абеля (см., например, [6, с. 224]):

$$\sum_{d \geq 2}{}' \frac{1}{d(t(d))^{\varepsilon}} = \lim_{X \to +\infty} \sum_{2<n \leq X} \left(\frac{1}{n^{\varepsilon}} \sum_{t(d)=n}{}' \frac{1}{d} \right) =$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \left(-\int_2^X \varepsilon x^{-1-\varepsilon} C(x) dx + C(X) X^{-\varepsilon} \right) = O(1).$$

Лемма доказана.

Итак, для фиксированных $m_1, m_2 \geq 2$, таких, что $m_1 \neq m_2$ и $G_{m_1}, G_{m_2} \leq x$, получаем (согласно лемме 2.1):

$$\operatorname{card}\{(p_1,p_2): \ p_1, p_2 \leq x, p_1 - p_2 = G_{m_2} - G_{m_1}\} \leq c_1 \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{p \,|\, (G_{m_2} - G_{m_1})} (1 - 1/p)^{-1} \leq$$

$$\leq c_8 \frac{x}{\ln^2 x} g(G_{m_2} - G_{m_1}),$$

где $g(k) = \prod\limits_{p\,|\,k}(1+1/p)$. Пусть теперь $S = S(x)$ — число решений уравнения $p_1 - p_2 = G_{m_2} - G_{m_1}$ в множестве $\{(p_1, p_2, G_{m_1}, G_{m_2}):\ p_1, p_2, G_{m_1}, G_{m_2} \le x;\ m_1, m_2 \ge 2\}$, а $U(x) = \max\{n:\ G_n \le x\}$, тогда

$$\sum_{n\le x} f^2(n,x) \le S(x) \le c_8\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}} g(G_{m_2}-G_{m_1}) + c_9 x.$$

Согласно лемме 2.5, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}} g(G_{m_2}-G_{m_1}) \le c_{10} ln^2 x.$$

Далее, $\sum'$ означает суммирование по бесквадратным числам (включая единицу, когда другое не оговорено), взаимно простым с числами a, b и с числом (a^2+ab-b^2). Применяя теорему 1.1, находим:

$$\prod_{p|ab(a^2+ab-b^2)}(1+1/p)^{-1}\cdot\sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}} g(G_{m_2}-G_{m_1}) \le \sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2}}\ \sideset{}{'}\sum_{d\,|\,(G_{m_2}-G_{m_1})}\frac{1}{d} =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{d\le x}\frac{1}{d}\sum_{\substack{m_1,m_2\in[2,U(x)],\\ m_1\ne m_2,\\ d|(G_{m_2}-G_{m_1})}} 1 \le \sideset{}{'}\sum_{d\le x}\frac{1}{d}A(d,U(x)) = (U(x))^2 + \sideset{}{'}\sum_{2\le d\le x}\frac{1}{d}A(d,U(x)) =$$

$$= (U(x))^2 + \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)<\sqrt{t(d)}+1}}\frac{1}{d}A(d,U(x)) + \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)\ge\sqrt{t(d)}+1}}\frac{1}{d}A(d,U(x)) \le (U(x))^2 +$$

$$+ \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)<\sqrt{t(d)}+1}}\frac{1}{d}(3U(x)-2) + \sideset{}{'}\sum_{\substack{d:\ 2\le d\le x,\\ U(x)\ge\sqrt{t(d)}+1}}\frac{1}{d}56(U(x))^2(t(d))^{-1/8} \le$$

$$\le (U(x))^2 + 3U(x)\sum_{2\le d\le x}\frac{1}{d} + 56(U(x))^2\sideset{}{'}\sum_{d\ge 2}\frac{1}{d(t(d))^{1/8}} \le c_{11}\ln^2 x.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя В. Н. Чубарикова за ценные замечания.

Библиографический список

1. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. М. : Наука, 1978.
2. *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М. : Дрофа, 2005.
3. *Romanoff N. P.* Über einige Satze der additiven Zahlentheorie // Math. Ann. 1934. Vol. 109. P. 668–678.
4. *Erdos P.* On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // J. Chinese Math. Soc. 1951. № 1. P. 409–421.
5. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М. : Мир, 1967.
6. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М. : Высш. шк., 1999.

Arithmetic Properties of Generalized Fibonacci Sequence and Their Consequences

A. N. Vassilyev

Kazakhstani Branch of Lomonosov Moscow State University, Republic of Kazakhstan, 010010, Astana, Kazhimukan str., 11, antonvassilyev@mail.ru

In this paper we obtain some arithmetic properties of generalized Fibonacci sequence and consider their applications.

Key words: generalized Fibonacci, exponential sums, set's density.

References

1. Vorobiev N. N. F*ibonacci Numbers*. Basel; Boston; Berlin, Birkhauser Verlaf, 2002.
2. Gashkov S. B., Chubarikov V. N. *Arifmetika. Algoritmy. Slozhnost' vychislenii* [Arithmetics. Algorithms. The Complexity of Computations]. Moscow, Drofa, 2005 (in Russian).
3. Romanoff N. P. Über einige Satze der additiven Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 1934, vol. 109, pp. 668–678.
4. Erdos P. On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff. *J. Chinese Math. Soc.*, 1951, no. 1, pp. 409–421.
5. Prahar K. *Raspredelenie prostykh chisel* [Distribution of Prime Numbers]. Moscow, Mir, 1967 (in Russian).
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. *Lektsii po matematicheskomu analizu* [Lectures on Mathematical Analysis]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1999 (in Russian).

УДК 511.34

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С БЕСКВАДРАТНЫМИ ЧИСЛАМИ

Д. В. Горяшин

Ассистент кафедры математических и компьютерных методов анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, goryashin@mech.math.msu.su

В работе получена асимптотическая формула для количества представлений натурального числа N в виде $q_1+q_2+[\alpha q_3]$, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа, $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное алгебраическое число.

Ключевые слова: тернарные задачи, бесквадратные числа, асимптотическая формула.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное число и пусть $r_3(\alpha, N)$ равно количеству разбиений натурального числа N на два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. числу представлений числа N в виде

$$q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N, \tag{1}$$

где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа.

Целью данной работы является нахождение асимптотической формулы для величины $r_3(\alpha, N)$ при $N \to \infty$.

Задачи о представлении натурального числа суммой трех слагаемых (называемые тернарными задачами) рассматривались многими авторами. Наиболее известная среди них — тернарная проблема Гольдбаха о представлении натурального числа в виде суммы трех простых чисел, решенная в 1937 г. И. М. Виноградовым [1]. В 1999 г. С. Ю. Фаткина [2] рассмотрела видоизмененную проблему Гольдбаха и доказала асимптотическую формулу для числа представлений натурального числа N в виде $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$, где p_1, p_2, p_3 — простые числа с почти равными слагаемыми.

С другой стороны, в 1929–1933 гг. Эвелин (C. J. A. Evelyn) и Линфут (E. H. Linfoot) в серии работ [3] получили асимптотические формулы для количества $r_\nu(N)$ представлений числа в виде суммы ν бесквадратных чисел, $\nu \geqslant 2$. Оценка остаточного члена в этих формулах в дальнейшем неоднократно уточнялась. Последний результат в этой задаче при $\nu \geqslant 3$ принадлежит Й. Брюдерну (J. Brüdern) и А. Перелли (A. Perelli) [4], которые доказали, что

$$r_\nu(N) = \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^\nu G_\nu(N)N^{\nu-1} + O\big(N^{\nu-3/2+\varepsilon}\big),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно и

$$G_\nu(N) = \prod_{p^2 \nmid N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^\nu}\right)\prod_{p^2 | N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^{\nu-1}}\right).$$

© Горяшин Д. В., 2013