

МЕХАНИКА

УДК 531.39

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, ЛЕЖАЩИХ НА СЛОЖНОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

П.Г. Великанов

Казанский государственный университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: pvelikanov@mail.ru

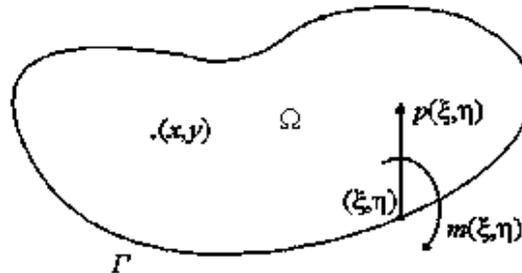
Данная работа посвящена решению задач линейного деформирования пластин непрямым методом граничных элементов, основанному на применении фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на сложном двухпараметрическом упругом основании. В результате анализа разрешающих уравнений показано, что задача изгиба изотропной пластины, лежащей на простом винклеровском упругом основании, является частым случаем задачи, заявленной в заголовке статьи.

Investigation of the Isotropic Plates Bending Lying on the Complex Two-parameter Elastic Foundation by Boundary Element Method

P.G. Velikanov

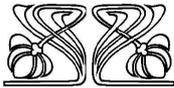
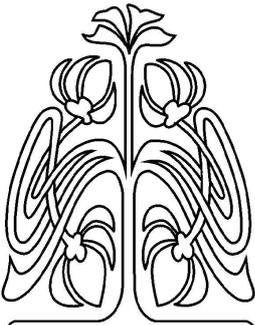
This work is dedicated to the investigation of the linear deformation problem of plates based on application of the fundamental decision of task of the isotropic plate bending lying on the complex two-parameter elastic foundation by an indirect method of boundary elements. In the issue of resolving system analysis was indicated that the task of isotropic plate bending lying on the simple elastic foundation is a special case of the task declared in the title of the article.

Рассмотрим тонкую линейно упругую пластину, ограниченную гладким кусочно-ляпуновским контуром. Дополним область пластины до бесконечной области. По контуру к бесконечной пластине приложим компенсирующие нагрузки $q(\zeta), m(\zeta)$. Нагрузка $q(\zeta)$ — распределенное по контуру Γ усилие, нормальное к поверхности пластины, $m(\zeta)$ — распределенный по контуру Γ момент вокруг касательной к контуру Γ [1] (рисунок).

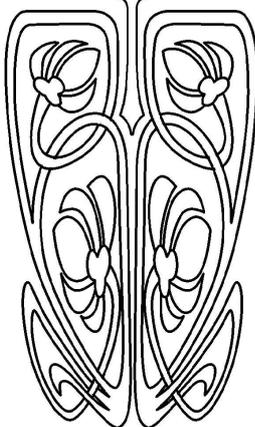


Пластина с контурными компенсирующими нагрузками

Решение задачи изгиба пластины непрямым методом граничных элементов (НМГЭ) заключается в представлении решения как суммы основного и компенсирующего решений. Основное решение



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





определяет деформацию бесконечной пластины от заданных нагрузок; компенсирующее решение определяет действие на бесконечную пластину системы сил, распределенных по контуру пластины (компенсирующих нагрузок), за счет которых выполняются краевые условия на контуре пластины. Сумма основного и компенсирующего решений должна удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба изотропной пластины, лежащей на сложном двухпараметрическом упругом основании (по моделям проф. П.Л. Пастернака, проф. В.З. Власова и др.) [2]:

$$Lw(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (1)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad 2p^2 = \frac{k_t h^2}{4D}, \quad \chi^4 = \frac{k_z}{D} = \frac{1}{l^4}, \quad (2)$$

$L = \Delta^2 - 2p^2\Delta + \chi^4$ — дифференциальный оператор; Δ — оператор Лапласа; k_t, k_z — параметры упругого основания (коэффициенты постели).

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$w(t) = w^r(t) + \int_{\Gamma} [G(t, \zeta)q(\zeta) - \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1(\zeta)}m(\zeta)]ds(\zeta); \quad (3)$$

$$w^r(t) = \iint_{\Omega^+} G(t, \zeta)P(\zeta)d\Omega(\zeta) + \sum_{i=1}^n G(t, \zeta_i)P_i(\zeta_i). \quad (4)$$

Здесь $t(x, y)$ — точка области; $\zeta(\xi, \eta)$ — точка контура; $w^r(t)$ — частное решение уравнения (1); P_i — модуль сосредоточенной силы, приложенной в точке $\zeta_i (i = 1, 2, \dots, n)$. $G(t, \zeta)$ — фундаментальное решение.

Для получения фундаментального решения $G(x, y)$ поставленной задачи в дифференциальном уравнении (1) интенсивность распределенной нагрузки моделируют единичной сосредоточенной силой P , приложенной в начале координат, которая математически описывается обобщенной дельта-функцией Дирака $\delta(x, y)$:

$$LG(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}.$$

Для получения фундаментального решения применяется двумерное интегральное преобразование Фурье [3]. Трансформанты величин определяются следующим образом:

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy; \quad F[\delta(x, y)] = \frac{1}{2\pi}; \quad F[L] = ((\xi^2 + \eta^2)^2 + 2p^2(\xi^2 + \eta^2) + \chi^4).$$

Тогда трансформанта фундаментального решения примет вид

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi D((\xi^2 + \eta^2)^2 + 2p^2(\xi^2 + \eta^2) + \chi^4)}.$$

Таким образом, последовательно применяя формулу обращения двумерного интегрального преобразования Фурье [3]

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi^2 D} \int_0^{\infty} \cos \eta y d\eta \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{((\xi^2 + \eta^2)^2 + 2p^2(\xi^2 + \eta^2) + \chi^4)} d\xi,$$

свойства интегралов от четных и нечетных функций и аппарат теории вычетов в пространстве оригиналов, получим следующие представления для фундаментальных решений в зависимости от величины дискриминанта знаменателя трансформанты и соотношений между коэффициентами:

$$а) p > \chi \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{4\pi s^2 D} \{K_0(\sqrt{p^2 + s^2}r) - K_0(\sqrt{p^2 - s^2}r)\}, \quad s^2 = \sqrt{p^4 - \chi^4};$$



$$b) p < \chi \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{2\pi\beta^2 D} kei_0(r/l, \varphi), \beta^2 = \sqrt{\chi^4 - p^4}, \varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\beta^2}{p^2};$$

$$c) \chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \{\ln r + K_0(\sqrt{2pr})\};$$

d) $p = \chi \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{4\pi D \chi^2} kei'_0(r/l, 0)$ (осуществляется предельный переход при $\varphi \rightarrow 0$ и далее используется правило Лопиталья);

$$e) p = 0 \Rightarrow G(x, y) = -\frac{l^2}{2\pi D} kei_0(r/l);$$

$$f) p = \chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r.$$

Как можно заметить, в этот перечень входят наряду с другими фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на простом винклеровском упругом основании e) и фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины f).

Случай e), впервые приводящийся в работе [4], является частным случаем b), так как при $p = 0$ выполняется следующая последовательность действий:

$$\beta = \chi = 1/l; \varphi = \pi/4; \quad kei_0(r/l, \pi/4) = kei_0(r/l).$$

Для реально существующих двухпараметрических упругих оснований выполняется случай b), поэтому именно его мы и будем далее рассматривать.

В случае b) $kei_0(r/l, \varphi)$ – обобщенная функция Томпсона – Кельвина (мнимая часть обобщенной модифицированной функции Бесселя второго рода нулевого порядка K_0).

Обобщенные функции Томпсона – Кельвина в рядах представляются следующими соотношениями [5]:

$$ber_0(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k} \cos 2k\varphi}{(k!)^2}; \quad bei_0(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k} \sin 2k\varphi}{(k!)^2};$$

$$ker_0(x, \varphi) = \left(\ln \frac{x}{2} - C\right) ber_0(x, \varphi) + \varphi \cdot bei_0(x, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k} \cos 2k\varphi}{(k!)^2} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s};$$

$$kei_0(x, \varphi) = \left(\ln \frac{x}{2} - C\right) bei_0(x, \varphi) - \varphi \cdot ber_0(x, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k} \sin 2k\varphi}{(k!)^2} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s},$$

где $C = 0,5772157\dots$ – постоянная Эйлера.

На контуре пластины рассмотрим следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0 \quad \text{— жесткая заделка,} \tag{5}$$

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{— свободное опирание,} \tag{6}$$

$$V_n = k_1 w, \quad M_n = k_2 w_{,n} \quad \text{— упругое закрепление.} \tag{7}$$

Здесь M_n и V_n – изгибающий момент и обобщенная поперечная сила на контуре Γ ; k_1, k_2 – постоянные, определяющие упругие свойства закрепления (при $k_1 = 0, k_2 = 0$ получаются граничные условия свободного края).

Отметим, что выражение (3) точно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Чтобы (3) было решением краевой задачи, необходимо из системы сингулярных интегральных уравнений, которая получается при подстановке (3) в краевые условия (5)–(7) на контуре пластины Γ , определить функции $q(\zeta), m(\zeta)$. При этом надо совершить предельный переход точки $t(x, y)$ из внутренней области Ω^+ на границу Γ . Тогда ядра интегральных уравнений будут определены во всех точках контура, за исключением точки, где $t(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$. В этой точке $r = 0$, а следовательно, ядра потенциалов будут иметь особенности.



Для дальнейшего анализа воспользуемся тем фактом, что цилиндрические функции целых порядков, отличных от нулевого, всегда можно преобразовать посредством рекуррентных соотношений вида:

$$\begin{aligned} xK'_n &= -nK_n - xK_{n-1}; & xK'_n &= nK_n - xK_{n+1}; & K_{-n} &= K_n; & K'_0 &= -K_1; \\ \frac{d}{dx} [x^{-n}K_n] &= -x^{-n}K_{n+1}; & \frac{d}{dx} [x^nK_n] &= -x^nK_{n-1}; & 2K'_n &= K_{n-1} + K_{n+1}; \\ K_2 &= \frac{2}{x}K_1 + K_0; & 2nK_n &= xK_{n+1} - xK_{n-1}. \end{aligned}$$

Вторую производную функции K_0 найдем непосредственно из дифференциального уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2K_0(x)}{dx^2} = K_0(x) - \frac{1}{x} \frac{dK_0(x)}{dx}.$$

Дифференцируя далее и используя рекуррентные соотношения, получим выражения для определения производных старших порядков:

$$\begin{aligned} \frac{d^3K_0(x)}{dx^3} &= -\frac{1}{x}K_0(x) + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \frac{dK_0(x)}{dx}; \\ \frac{d^4K_0(x)}{dx^4} &= \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) K_0(x) - \frac{2}{x} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \frac{dK_0(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Заменяем в выражениях для производной переменную x на $xe^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2K_0(xe^{i\varphi})}{dx^2} &= e^{2i\varphi}K_0(xe^{i\varphi}) - \frac{1}{x} \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx}; \\ \frac{d^3K_0(xe^{i\varphi})}{dx^3} &= -e^{2i\varphi} \frac{1}{x}K_0(xe^{i\varphi}) + \left(e^{2i\varphi} + \frac{2}{x^2}\right) \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx} = -e^{2i\varphi} \frac{1}{x}K_2(xe^{i\varphi}) - e^{3i\varphi}K_1(xe^{i\varphi}); \\ \frac{d^4K_0(xe^{i\varphi})}{dx^4} &= e^{2i\varphi} \left(e^{2i\varphi} + \frac{3}{x^2}\right) K_0(xe^{i\varphi}) - \frac{2}{x} \left(e^{2i\varphi} + \frac{3}{x^2}\right) \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx} = e^{2i\varphi} \left(e^{2i\varphi} + \frac{3}{x^2}\right) K_2(xe^{i\varphi}). \end{aligned}$$

После разделения действительной и мнимой частей комплексного числа получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ker_0(x, \varphi)}{dx^2} &= \cos 2\varphi \cdot \ker_0(x, \varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei_0(x, \varphi) - \frac{1}{x} \ker'_0(x, \varphi); \\ \frac{d^2 kei_0(x, \varphi)}{dx^2} &= \cos 2\varphi \cdot kei_0(x, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_0(x, \varphi) - \frac{1}{x} kei'_0(x, \varphi); \\ \frac{d^3 \ker_0(x, \varphi)}{dx^3} &= -\frac{1}{x} (\cos 2\varphi \cdot \ker_2(x, \varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei_2(x, \varphi)) + \cos 2\varphi \cdot \ker'_0(x, \varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi); \\ \frac{d^3 kei_0(x, \varphi)}{dx^3} &= -\frac{1}{x} (\cos 2\varphi \cdot kei_2(x, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_2(x, \varphi)) + \cos 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker'_0(x, \varphi); \\ \frac{d^4 \ker_0(x, \varphi)}{dx^4} &= (\cos 2\varphi (\cos 2\varphi + \frac{3}{x^2}) - \sin^2 2\varphi) \ker_2(x, \varphi) - \sin 2\varphi (2 \cos 2\varphi + \frac{3}{x^2}) kei_2(x, \varphi); \\ \frac{d^4 kei_0(x, \varphi)}{dx^4} &= (\cos 2\varphi (\cos 2\varphi + \frac{3}{x^2}) - \sin^2 2\varphi) kei_2(x, \varphi) + \sin 2\varphi (2 \cos 2\varphi + \frac{3}{x^2}) \ker_2(x, \varphi), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \ker_2(x, \varphi) &= \ker_0(x, \varphi) - \frac{2}{x} (\cos 2\varphi \cdot \ker'_0(x, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi)); \\ kei_2(x, \varphi) &= kei_0(x, \varphi) - \frac{2}{x} (\cos 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi) - \sin 2\varphi \cdot \ker'_0(x, \varphi)). \end{aligned}$$

Следует также привести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \ker_0(x, \varphi) &= \cos 2\varphi \cdot \ker_0(x, \varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei_0(x, \varphi); \\ \Delta kei_0(x, \varphi) &= \cos 2\varphi \cdot kei_0(x, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_0(x, \varphi). \end{aligned}$$



Важное значение в практическом применении имеют следующие интегралы:

$$\int \frac{1}{x} \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx} dx; \quad \int K_2(xe^{i\varphi}) dx; \quad \int \frac{1}{x} K_2(xe^{i\varphi}) dx; \quad \int \frac{3}{x^2} K_2(xe^{i\varphi}) dx.$$

Взятие этих интегралов осуществим с помощью рекуррентных соотношений и применяя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx} dx &= e^{2i\varphi} \int K_0(xe^{i\varphi}) dx - \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx}; \\ \int K_2(xe^{i\varphi}) dx &= - \int K_0(xe^{i\varphi}) dx + 2e^{-2i\varphi} \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx}; \\ \int \frac{1}{x} K_2(xe^{i\varphi}) dx &= e^{2i\varphi} \frac{1}{x} \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx}; \\ \int \frac{3}{x^2} K_2(xe^{i\varphi}) dx &= e^{2i\varphi} \int K_0(xe^{i\varphi}) dx - \frac{1}{x} K_2(xe^{i\varphi}) - \frac{dK_0(xe^{i\varphi})}{dx}. \end{aligned}$$

После разделения действительной и мнимой частей получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} ker'_0(x, \varphi) dx &= \cos 2\varphi \int ker_0(x, \varphi) dx - \sin 2\varphi \int kei_0(x) dx - ker'_0(x, \varphi); \\ \int \frac{1}{x} kei'_0(x, \varphi) dx &= \cos 2\varphi \int kei_0(x, \varphi) dx + \sin 2\varphi \int ker_0(x) dx - kei'_0(x, \varphi); \\ \int ker_2(x, \varphi) dx &= - \int ker_0(x, \varphi) dx + 2 \cos 2\varphi \cdot ker'_0(x, \varphi) + 2 \sin 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi); \\ \int kei_2(x, \varphi) dx &= - \int kei_0(x, \varphi) dx + 2 \cos 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi) - 2 \sin 2\varphi \cdot ker'_0(x, \varphi); \\ \int \frac{1}{x} ker_2(x, \varphi) dx &= \frac{1}{x} (\cos 2\varphi \cdot ker'_0(x, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi)); \\ \int \frac{1}{x} kei_2(x, \varphi) dx &= \frac{1}{x} (\cos 2\varphi \cdot kei'_0(x, \varphi) - \sin 2\varphi \cdot ker'_0(x, \varphi)); \\ \int \frac{3}{x^2} ker_2(x, \varphi) dx &= \cos 2\varphi \int ker_0(x, \varphi) dx - \sin 2\varphi \int kei_0(x, \varphi) dx - \frac{1}{x} ker_2(x, \varphi) - ker'_0(x, \varphi); \\ \int \frac{3}{x^2} kei_2(x, \varphi) dx &= \cos 2\varphi \int kei_0(x, \varphi) dx + \sin 2\varphi \int ker_0(x, \varphi) dx - \frac{1}{x} kei_2(x, \varphi) - kei'_0(x, \varphi). \end{aligned}$$

Приведем необходимые для реализации алгоритма производные фундаментального решения в локальной системе координат:

$$\begin{aligned} G(t, \zeta) &= A kei_0(r/l, \varphi), \quad \text{где } A = -1/(2\pi D\beta^2), \\ \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n} &= \frac{A}{l} kei'_0(r/l, \varphi) \cos \gamma; \quad \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} = -\frac{A}{l} kei'_0(r/l, \varphi) \cos \gamma_1; \\ \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial \tau} &= -\frac{A}{l} kei'_0(r/l, \varphi) \sin \gamma; \quad \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial \tau_1} = \frac{A}{l} kei'_0(r/l, \varphi) \sin \gamma_1; \\ \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n^2} &= \frac{A}{l^2} \left[kei''_0(r/l, \varphi) \cos^2 \gamma + \left(\frac{l}{r}\right) kei'_0(r/l, \varphi) \sin^2 \gamma \right]; \\ \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2} &= \frac{A}{l^2} \left[kei''_0(r/l, \varphi) \sin^2 \gamma + \left(\frac{l}{r}\right) kei'_0(r/l, \varphi) \cos^2 \gamma \right]; \\ \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau} &= -\frac{A}{l^2} (\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_2(r/l, \varphi)) \cos \gamma \sin \gamma; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} &= -\frac{A}{l^2} \left[kei_0''(r/l, \varphi) \cos \gamma \cos \gamma_1 + \left(\frac{l}{r}\right) kei_0'(r/l, \varphi) \sin \gamma \sin \gamma_1 \right]; \\
 \Delta G(t, \zeta) &= \frac{A}{l^2} (\cos 2\varphi \cdot kei_0(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0(r/l, \varphi)); \\
 \frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n} &= \frac{A}{l^3} (\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \cos \gamma; \\
 \frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n_1} &= -\frac{A}{l^3} (\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \cos \gamma_1; \\
 \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} &= -\frac{A}{l^3} ((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \sin^2 \gamma \cos \gamma_1 + \\
 &\quad + \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_2(r/l, \varphi)) \cos(2\gamma + \gamma_1)); \\
 \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n^2 \partial n_1} &= -\frac{A}{l^3} ((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \cos^2 \gamma \cos \gamma_1 - \\
 &\quad - \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_2(r/l, \varphi)) \cos(2\gamma + \gamma_1)); \\
 \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2} &= \frac{A}{l^3} ((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \sin^2 \gamma \cos \gamma - \\
 &\quad - \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_2(r/l, \varphi)) \cos \gamma (1 - \cos 2\gamma)); \\
 \frac{\partial^2 \Delta G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} &= -\frac{A}{l^4} ((\cos 2\varphi \cdot kei_0''(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0''(r/l, \varphi)) \cos \gamma_1 \cos \gamma + \\
 &\quad + \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \sin \gamma_1 \sin \gamma); \\
 \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau \partial n_1} &= \frac{A}{l^3} ((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \cos \gamma_1 \sin \gamma \cos \gamma - \\
 &\quad - \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_2(r/l, \varphi)) \sin(2\gamma + \gamma_1)); \\
 \frac{\partial^4 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2 \partial n_1} &= -\frac{A}{l^4} (\cos 2\varphi \cdot kei_0''(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0''(r/l, \varphi)) \sin^2 \gamma \cos \gamma_1 \cos \gamma + \\
 &\quad + \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi)) \cos^2 \gamma \sin \gamma_1 \sin \gamma - \\
 &\quad - \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l, \varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l, \varphi) - 3 \left(\frac{l}{r}\right) (\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l, \varphi) + \\
 &\quad + \sin 2\varphi \cdot ker_2(r/l, \varphi))) (2 \sin 2\gamma \sin(\gamma + \gamma_1) - \cos(\gamma - \gamma_1)).
 \end{aligned}$$

Как показывает анализ ядер интегральных уравнений, применительно к асимптотике обобщенных функций Томпсона – Кельвина и их производных, для задачи изгиба изотропной пластины, выполненный по методике, изложенной в статье О.И. Панича [6], при переходе через гладкий контур обобщенная поперечная сила V_n и изгибающий момент M_n терпят разрывы первого рода:

$$M_n^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \cdot m(t) + M_n(t); V_n^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \cdot q(t) + V_n(t), t \in \Gamma. \quad (8)$$

Подставляя (3) в граничные условия (5)–(7), получаем систему сингулярных интегральных уравнений с неизвестными компенсирующими нагрузками $q(\zeta)$, $m(\zeta)$, которая примет следующий вид.

Для жесткой заделки

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + w^r(t) &= 0, \\
 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n} q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + \frac{\partial w^r(t)}{\partial n} &= 0.
 \end{aligned} \quad (9)$$



Для свободного опирания

$$\int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + w^r(t) = 0,$$

$$\frac{1}{2}m(t) - D \int_{\Gamma} \left[\Delta G(t, \zeta) - (1 - \nu) \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2} \right] q(\zeta) ds(\zeta) +$$

$$+ D \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n_1} - (1 - \nu) \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right] m(\zeta) ds(\zeta) + M_n^r(t) = 0. \tag{10}$$

Для свободного края

$$\frac{1}{2}m(t) - D \int_{\Gamma} \left[\Delta G(t, \zeta) - (1 - \nu) \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2} \right] q(\zeta) ds(\zeta) +$$

$$+ D \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n_1} - (1 - \nu) \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right] m(\zeta) ds(\zeta) + M_n^r(t) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}q(t) - D \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n} + (1 - \nu) \left[\frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2} - \kappa(t) \left(\frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2} \right) \right] \right] q(\zeta) ds(\zeta) +$$

$$+ D \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 \Delta G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} + (1 - \nu) \left[\frac{\partial^4 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2 \partial n_1} - \kappa(t) \left(\frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n^2 \partial n_1} - \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right) \right] \right] m(\zeta) ds(\zeta) + V_n^r(t) = 0.$$

Для приближенного решения одной из систем (9)–(11) контур разобьем на N граничных элементов. В пределах каждого элемента функции компенсирующих нагрузок $q(\zeta)$, $m(\zeta)$ будем считать постоянными. Для принятой аппроксимации $q(\zeta)$, $m(\zeta)$ точки коллокации располагаем в узлах элементов.

Контрольный пример: Прямоугольная пластина, находящаяся под действием равномерно распределенной внешней нагрузки, все стороны которой свободно оперты, лежит на двухпараметрическом упругом основании. Механические характеристики и размеры пластины следующие: $h = 1$ (см), $a = 10$ (см), $b = 5$ (см), $E = 2 \cdot 10^6$ (кГ/см²), $\nu = 0,3$, $k_z = 1540$ (кГ/см³), $k_t = 1000$ (кГ/см³). В таблице приведено сравнение численного решения МГЭ с точным решением, которое является обобщением решения Навье на случай двухпараметрического упругого основания [7]. Сравнение проводится для точки, являющейся центром тяжести пластины.

q(кГ/см ²)	МГЭ (3)	Решение Навье
	w(см) *10 ⁻³	w(см)*10 ⁻³
100	0.7180	0.7179
250	1.7949	1.7947
500	3.5897	3.5895

Библиографический список

1. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. Казань: Фэн, 2002. 199 с.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 340 с.
3. Шевченко В.П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек: Учеб. пособие. Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1977. 115 с.
4. Корнев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 458 с.
5. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты / Пер. с пол. М.В. Предтеченского; Под ред. А.И. Цейтлина. М.: Стройиздат, 1984. 480 с.
6. Панич О.И. О потенциалах полигармонического уравнения четвертого порядка // Мат. сборник. Одесса, 1960. Т. 50, вып. 3. С. 335–354.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.