



УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДАЛЬНОГО ПОЛЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович

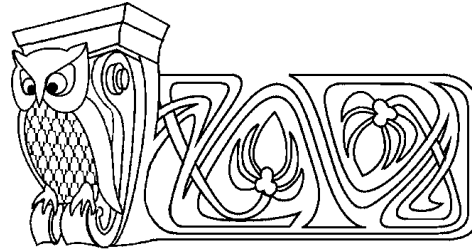
Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: mv_wilde@mail.ru

Предложена асимптотическая модель, направленная на описание дальнего поля волны Рэлея в бесконечной многослойной пластине при действии нестационарной поверхностной нагрузки. При выводе уравнений модели используются общие асимптотические принципы. В результате получена система двух одномерных интегро-дифференциальных уравнений (головная система), описывающая распространение волн Рэлея вдоль поверхностей пластины, и ряд краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих затухающее волновое поле в каждом из слоев. Головная система является замкнутой и может быть решена отдельно, так что задача по сути сводится к одномерной. При построении модели предполагается, что упругие свойства слоев удовлетворяют следующему условию: скорость той волны Рэлея, на которую ориентирована модель, меньше скоростей волн сдвига во всех слоях.

Ключевые слова: нестационарные упругие волны, поверхностные волны, волна Рэлея, асимптотические методы.

ВВЕДЕНИЕ

Существование нестационарной волны Рэлея, возникающей при силовом воздействии на свободную поверхность упругого полупространства, было впервые установлено в классической работе Н. Лэмба [1]. В случае локализованного воздействия типа сосредоточенной силы данная волна выглядит как существенный всплеск НДС, быстро затухающий с глубиной и распространяющийся вдоль поверхности тела со скоростью стационарной волны Рэлея [2]. Исследование поля волны Рэлея имеет важное значение как для практических приложений (в таких областях, как сейсмология и дефектоскопия), так и с теоретической точки зрения, например для завершения построения асимптотической схемы расчленения нестационарного НДС пластин и оболочек в случае воздействия нормального типа [3]. Несмотря на то что за работой Лэмба последовало множество публикаций, посвященных различным обобщениям так называемой «задачи Лэмба» (см., например, обзоры в [4, 5]), исследования в этом направлении еще ведутся. В частности, продолжает оставаться актуальной проблема построения упрощенных прикладных теорий. Характер решений нестационарных задач (разрывы на фронтах, высокочастотная осцилляция), как правило, таков, что «непосредственная» численная реализация оказывается неэффективной или попросту невозможной, а анализ аналитического решения неупрощенных уравнений, если оно вообще существует, требует изощренного математического аппарата и громоздких выкладок. Так, например, анализ поля Рэлея до последнего времени был осложнен тем, что в традиционных формулировках динамических задач теории упругости волна Рэлея не присутствует в явном виде, и для ее выявления требовалось осуществить некоторые дополнительные преобразования. В работе [6] (для случая полупространства, находящегося в условиях плоской деформации) впервые была предложена асимптотическая модель, направленная непосредственно на описание поля волны Рэлея. Эта модель включает в себя одномерное волновое уравнение, содержащее в явном виде скорость волны Рэлея и описывающее распространение волны вдоль поверхности, и краевые задачи Неймана для потенциалов Ламе, описывающие затухание волнового поля вглубь полупространства. Приближенная теория [6] существенно облегчает количественный и качественный



An Asymptotic Model for the Far-Field of Rayleigh Wave in Multilayered Plate

M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich

Saratov State University,
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics
E-mail: mv_wilde@mail.ru

An asymptotic model is proposed, which allows to calculate far-field of Rayleigh wave in an infinite multilayered plate subjected to non-stationary surface load. The model is derived by using of the standard asymptotic techniques. As a result, a system of two one-dimensional integro-differential equations (head system) is obtained, which describes the propagation of Rayleigh waves along the plate surfaces. For the decaying wave fields in layers the boundary problems for elliptic equations are obtained. Head system is closed and can be solved separately, thus the problem is reduced to one-dimensional one. By deriving of the model it is assumed that the elastic properties of the layers satisfy the following condition: the speed of Rayleigh wave, for which the model is derived, is less than the shear wave speeds in all the layers.

Key words: non-stationary elastic waves, surface waves, Rayleigh wave, asymptotic methods.



анализ поля нестационарной волны Рэлея. Решения приближенных уравнений, представляющих собой классические уравнения математической физики, легко записываются в замкнутой форме. Кроме того, сама структура приближенной модели соответствует интуитивным представлениям о волне Рэлея, отражая её основные свойства: распространение вдоль поверхности с определенной скоростью и затухание с глубиной. Результаты, которые представлены в статье [6], распространены в работе [7] на случай дальнего поля Рэлея в бесконечном упругом слое при нормальном воздействии на его поверхности, в работе [8] — на случай полуполосы при действии торцевой нагрузки, в работах [9, 10] — на аналогичные задачи для цилиндрической оболочки.

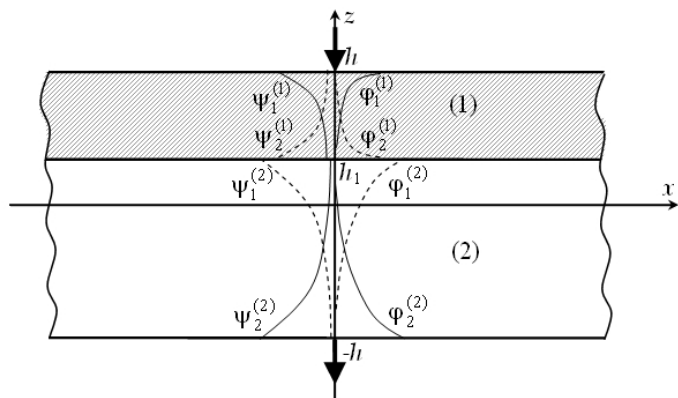
Данная работа посвящена построению асимптотической модели для описания дальнего поля волны Рэлея в бесконечной многослойной пластине при действии поверхностной нормальной нагрузки, не зависящей от одной из координат (плоская деформация). Исследование является развитием работ [6–10]. В первой части работы рассматривается двухслойная пластина, во второй части полученные результаты обобщаются на случай произвольного числа слоев. Методика вывода приближенных уравнений совпадает с использованной в [6–10], с тем отличием, что вместо техники символического интегрирования применяется эквивалентная ей итерационная техника. В результате получена система двух одномерных уравнений, описывающих распространение волны вдоль поверхностей пластины, и ряд краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих затухающее волновое поле в каждом из слоев. «Головная система» является замкнутой и может быть решена отдельно (двумерные краевые задачи решаются на следующем шаге, когда решение «головной системы» уже известно), так что исходная задача, по сути, сводится к одномерной. При построении модели предполагается, что упругие свойства слоев удовлетворяют следующему условию: скорость той волны Рэлея, на которую ориентирована модель, меньше скоростей волн сдвига во всех слоях. В противном случае волновое поле в некоторых слоях не имеет затухающего характера, что делает невозможным непосредственное обобщение результатов работ [6–10]. Построение приближенной модели для таких случаев требует дополнительного исследования.

1. ДВУХСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения нестационарного НДС бесконечной двухслойной пластины, занимающей в декартовых координатах (x, y, z) область $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, |z| \leq h)$, при этом положение поверхности раздела слоев характеризуется координатой $z = h_1$ (рисунок).

Будем считать, что приложенная нагрузка не зависит от переменной y , тогда искомое НДС будет определяться как решение динамических уравнений плоской задачи теории упругости. Все характеристики, относящиеся k -му слою ($k = \overline{1, n}$, в первой части во всех формулах $n = 2$), будем отмечать верхним (для искомых функций) или нижним (для постоянных параметров, в случае двух индексов — второй) индексом k . В частности, упругие константы Ламе и плотность материала обозначаются символами λ_k, μ_k и ρ_k соответственно. В безразмерных переменных уравнения движения для каждого из слоев могут быть представлены в виде



Двухслойная бесконечная пластина

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} - \theta_k^2 \kappa_k^2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} - \theta_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1)$$

где $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ — объемный и сдвиговой потенциалы Ламе, $\theta_k = c_{2,1}/c_{2,k}$, $\kappa_k = c_{2,k}/c_{1,k}$, $\xi = x/h$, $\zeta = z/h$, $\tau = tc_{2,1}/h$, $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ — скорости волн расширения и сдвига соответственно, t — время.



Компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}$ и вектора перемещений $v_1^{(k)}, v_3^{(k)}$ выражаются через потенциалы $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{\kappa_k^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} + (1 - 2\kappa_k^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2\kappa_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{\kappa_k^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + (1 - 2\kappa_k^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} - 2\kappa_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \gamma_k \left(2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} \right), \\ v_1^{(k)} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} \right), \quad v_3^{(k)} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma_k = \mu_k / \mu_1$.

Запишем граничные условия на лицевых поверхностях и поверхности контакта:

$$\begin{aligned} \zeta = 1: \quad & \sigma_{13}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = P_1(\xi, \tau); \\ \zeta = r_1: \quad & \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad v_1^{(1)} = v_1^{(2)}, \quad v_3^{(1)} = v_3^{(2)}; \\ \zeta = -1: \quad & \sigma_{13}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = P_2(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) $P_1(\xi, \tau), P_2(\xi, \tau)$ – заданные напряжения, $r_1 = h_1/h$. Введем также обозначения $r_0 = 1, r_n = -1$. При $\tau = 0$ ставятся нулевые начальные условия.

Безразмерная скорость волны Рэлея определяется из известного трансцендентного уравнения [2] в обозначениях данной работы принимающего вид

$$\left(1 - \frac{1}{2} \theta_k^2 k_{R,k}^2 \right)^2 - \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_{R,k}^2} \sqrt{1 - \theta_k^2 k_{R,k}^2} = 0. \quad (4)$$

Без ограничения общности можно принять $k_{R,1} \leq k_{R,2}$.

1.2. Вывод приближенных уравнений

Построим асимптотическую модель для описания дальнего поля волны Рэлея, распространяющейся вдоль поверхности $\zeta = 1$ со скоростью, характеризуемой безразмерным параметром $k_{R,1} = k_R$. Следуя [6], введем малый параметр ε как отношение характерного размера h к расстоянию, пройденному волной Рэлея за достаточно большой промежуток времени:

$$\varepsilon = \frac{h}{k_R c_{2,1} T} \ll 1. \quad (5)$$

Примем также, что заданная нагрузка локализована (либо быстро изменяется) в области, размеры которой сравнимы с толщиной пластины. Тогда можно предположить, что для больших времен, когда фронты всех волн «расходятся» достаточно далеко, решение в окрестности условного фронта волны Рэлея будет иметь вид волнового профиля, медленно изменяющегося со временем и распространяющегося с постоянной скоростью $k_R c_{2,1}$. Следовательно, в подвижной системе координат, связанной со скоростью волны Рэлея, изменимость решения по времени должна быть мала по сравнению с изменением по пространственным координатам. Исходя из этих соображений, введем новые переменные

$$y = \xi - k_R \tau, \quad \tau_* = \varepsilon \tau, \quad (6)$$

где переменная τ_* является масштабированной [11], и примем, что дифференцирование по переменным y, ζ, τ_* не меняет порядка искомых величин. Предположение об одинаковой изменчивости по переменным y и ζ подсказано тем, что аналогичным свойством обладает решение для стационарной волны Рэлея. Анализ этого решения позволяет сформулировать ещё одно предположение, касающееся асимптотических свойств искомых функций. Рассмотрим, например, решение уравнения (1)



для потенциала $\varphi^{(k)}$, имеющее вид гармонической волны с безразмерной фазовой скоростью k_R и экспоненциально затухающее при $\zeta \rightarrow \infty$ (знак «+») или при $\zeta \rightarrow -\infty$ (знак «-»):

$$\varphi_0^{(k)} = C e^{-\chi \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} (\pm \zeta)} e^{i\chi(\xi - k_R \tau)} = C e^{-\chi \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} (\pm \zeta)} e^{i\chi y}, \quad (7)$$

где χ — волновое число. Нетрудно убедиться, что производные от функции $\varphi_0^{(k)}$ по пространственным переменным связаны соотношением

$$\frac{\partial \varphi_0^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \varphi_0^{(k)}}{\partial y} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \varphi_0^{(k)}}{\partial \xi}. \quad (8)$$

Поскольку нестационарная волна Рэлея может быть представлена как суперпозиция гармонических волн, среди которых преобладают волны Рэлея, то естественно предположить, что и в нестационарной задаче потенциал $\varphi^{(k)}$ в первом приближении будет удовлетворять соотношению вида (8):

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} + O(\varepsilon). \quad (9)$$

Для потенциала $\psi^{(k)}$ имеем аналогично

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} + O(\varepsilon). \quad (10)$$

В (9), (10) и далее считается, что искомые функции являются комплекснозначными функциями переменных y, ζ (или ξ, ζ), действительная часть которых дает решение поставленной задачи.

Введем следующие обозначения:

$$k_{1,k} = \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2}, \quad k_{2,k} = \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2}, \quad k_{3,k}^2 = 1 - \frac{\theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2}{2}. \quad (11)$$

Из условия $k_{R,1} \leq k_{R,2}$ следует, что все параметры (11) являются действительными для любых λ_k, μ_k, ρ_k . Переходя в (1) к новым переменным (6), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} k_{1,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) &= 0, \\ k_{2,k}^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В дальнейшем нам понадобятся уточненные соотношения (9), (10). Запишем их в виде

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{1,k} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} + \varepsilon \varphi_\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{2,k} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} + \varepsilon \psi_\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (13)$$

где $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ — пока неизвестные функции. Предположим, что эти функции также удовлетворяют соотношениям (9), (10), и определим их методом итераций. Подставим (13) в (12) и выразим функции $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ через функции φ, ψ , требуя удовлетворения уравнений (12) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. В результате соотношения (13) запишутся в виде

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{1,k} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} \pm i \varepsilon \frac{\theta_k^2 \kappa_k^2 k_R}{k_{1,k}} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \tau_*} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{2,k} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} \pm i \varepsilon \frac{\theta_k^2 \kappa_k^2 k_R}{k_{2,k}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \tau_*} + O(\varepsilon^2). \quad (14)$$

Преобразуем выражения для напряжений $\sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}$ из (2), переходя в них к новым переменным (6) и заменяя вторые производные по ζ их выражениями, полученными из уравнений (12):

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left(-k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y \partial \zeta} - \varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) \right), \\ \sigma_{13}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y \partial \zeta} - k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y^2} - \varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) \right), \end{aligned} \quad (15)$$



Представим искомые функции в виде суммы

$$\varphi^{(k)} = \varphi_1^{(k)} + \varphi_2^{(k)}, \quad \psi^{(k)} = \psi_1^{(k)} + \psi_2^{(k)}, \quad (16)$$

где функции с нижним индексом 1 затухают при $\zeta \rightarrow -\infty$, а функции с нижним индексом 2 — при $\zeta \rightarrow \infty$ (направления затухания схематически представлены на рисунке). Уравнения эллиптического типа для определения функций $\varphi_1^{(k)}$, $\varphi_2^{(k)}$, $\psi_1^{(k)}$, $\psi_2^{(k)}$ в первом приближении легко получаются из уравнений (12), если отбросить в них малые члены. В соотношениях (9), (10) и (14) функциям $\varphi_1^{(k)}$, $\psi_1^{(k)}$ соответствует знак «-», а функциям $\varphi_2^{(k)}$, $\psi_2^{(k)}$ — знак «+».

Рассмотрим граничные условия (3). Из выражений для $k_{1,k}$, $k_{2,k}$ (11) следует, что потенциалы $\varphi_1^{(k)}$, $\varphi_2^{(k)}$ затухают гораздо быстрее, чем потенциалы $\psi_1^{(k)}$, $\psi_2^{(k)}$ (так как $\kappa_k^2 \leq 0.5$), поэтому при удовлетворении граничным условиям мы будем пренебрегать тем из потенциалов $\varphi_1^{(k)}$, $\varphi_2^{(k)}$, который затухает при удалении от противоположной границы (см. рисунок) (например, при удовлетворении граничным условиям при $\zeta = 1$ мы отбрасываем слагаемые с $\varphi_2^{(1)}$), а также аналогичным ему потенциалом $\psi_1^{(k)}$ или $\psi_2^{(k)}$, если он умножается на малый параметр ε .

Подставим представление (16) в выражение для напряжения $\sigma_{13}^{(1)}$ и удовлетворим граничному условию для этого напряжения при $\zeta = 1$. Используя (14) и пренебрегая слагаемыми, малыми вследствие затухания соответствующих функций, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial y^2} &= i \frac{k_{3,1}^2}{k_{1,1}} \left(\frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial y^2} \right) - \varepsilon \frac{\theta_1^2 \kappa_1^2 k_R}{k_{1,1}^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} + i \varepsilon \frac{\theta_1^2 k_R}{k_{1,1}} \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} &= i \frac{k_{3,1}^2}{k_{1,1}} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь удовлетворим граничному условию при $\zeta = 1$ для напряжения $\sigma_{33}^{(1)}$, подставляя в первое соотношение (15) представления (16), (17) и преобразуя смешанные производные от функций $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$ во вторые производные по y с помощью (14). Асимптотически главные члены в полученном выражении сократятся в силу уравнения (4), а оставшиеся малые члены дадут уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial \zeta \partial \tau_*} + \varepsilon^{-1} B_1 \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial y \partial \zeta} + O(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1} \frac{B_1 P_1 h^2}{4\mu_1 \gamma_1}, \quad (18)$$

где

$$B_1 = \left[\frac{\theta_1^2 k_R}{2} \left(\frac{\kappa_1^2}{k_{1,1}^2} + \frac{1}{k_{2,1}^2} - \frac{2}{k_{3,1}^2} \right) \right]^{-1}. \quad (19)$$

Следует отметить, что в уравнении (18) неявно присутствует одномерный волновой оператор, содержащий скорость волны Рэлея. Это нетрудно показать, дифференцируя (18) по y и возвращаясь к исходным переменным ξ , τ .

Выполняя аналогичные действия с граничными условиями при $\zeta = -1$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial y^2} &= -i \frac{k_{3,2}^2}{k_{1,2}} \left(\frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1^{(2)}}{\partial y^2} \right) - \varepsilon \frac{\theta_2^2 \kappa_2^2 k_R}{k_{1,2}^2} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} - i \varepsilon \frac{\theta_2^2 k_R}{k_{1,2}} \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} &= -i \frac{k_{3,2}^2}{k_{1,2}} \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$-\frac{B_2 D_2}{2} \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y \partial \zeta} - \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial \zeta \partial \tau_*} - \frac{B_2'}{2} \frac{\partial^2 \psi_1^{(2)}}{\partial y \partial \zeta} + O(\varepsilon^2) = \frac{B_2 P_2 h^2}{4\mu_1 \gamma_2}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} B_2 &= \left[\frac{\theta_n^2 k_R}{2} \left(\frac{k_{3,n}^4 \kappa_n^2}{k_{1,n}^3 k_{2,n}} + \frac{k_{3,n}^4}{k_{1,n} k_{2,n}^3} - \frac{2k_{3,n}^2}{k_{1,n} k_{2,n}} \right) \right]^{-1}, \\ D_2 &= 1 - \frac{k_{3,n}^4}{k_{1,n} k_{2,n}}, \quad B_2' = B_2 \left(\frac{k_{3,n}^4}{k_{1,n} k_{2,n}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$



Второе слагаемое в (21), вообще говоря, мало по сравнению с первым. Оно оставлено для того чтобы полученная модель была применима в случае $k_{R,1} = k_{R,2}$.

Уравнения (18) и (21) представляют собой уравнения для граничных значений функций $\partial\psi_i^{(k)}/\partial\zeta$. Из (17) и (20) следуют граничные условия для $\varphi_k^{(k)}$.

Рассмотрим теперь контактные условия при $\zeta = r_1$. Подставим в них, с учетом (16), выражения для перемещений (см. (2)) и напряжений (15), сохраняя в последних только асимптотически главные члены. Интегрируя условия для напряжений по y и преобразуя $\partial\varphi_i^{(k)}/\partial\zeta$ в $\partial\varphi_i^{(k)}/\partial y$ и $\partial\psi_i^{(k)}/\partial y$ в $\partial\psi_i^{(k)}/\partial\zeta$ с помощью соотношений (9) и (10), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \left(k_{1,1} \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{k_{3,1}^2}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) + \gamma_2 \left(k_{1,2} \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{k_{3,2}^2}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) = \\ & = \gamma_1 \frac{k_{3,1}^2}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2 \frac{k_{3,2}^2}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \\ & \gamma_1 \left(k_{3,1}^2 \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) - \gamma_2 \left(k_{3,2}^2 \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) = -\gamma_1 \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2 \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \quad (23) \\ & k_{1,1} \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} + k_{1,2} \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{1}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} = \frac{1}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \frac{1}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \\ & \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} - \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \end{aligned}$$

которую можно рассматривать как систему линейных функциональных уравнений относительно неизвестных

$$\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta}.$$

Условие равенства нулю определителя системы (23) совпадает с уравнением для определения скорости волны Стоунли (см., например, [12]), в которое на место искомого параметра подставлено значение скорости волны Рэлея. Даже если волна Стоунли существует, её скорость не совпадает со скоростью волны Рэлея k_R . Следовательно, определитель системы (23) отличен от нуля, и её можно однозначно разрешить относительно упомянутых неизвестных. Полученные выражения дадут граничные условия для потенциалов $\varphi_2^{(1)}$, $\varphi_1^{(2)}$, $\psi_2^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$ при $\zeta = r_1$.

Отбрасывая в соотношениях (12), (15), (17)–(21) малые члены и возвращаясь к исходным переменным, получим приближенную модель, которая включает в себя:

А) Одномерные уравнения для функций

$$\Psi_1^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=1}, \quad \Psi_2^{(n)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_2^{(n)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=-1}, \quad (24)$$

описывающие распространение волнового процесса вдоль наружных поверхностей:

$$\frac{\partial^2\Psi_1^{(1)}}{\partial\tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2\Psi_1^{(1)}}{\partial\xi^2} - 2k_R B_1 \frac{\partial^2\Psi_{2,h}^{(1)}}{\partial\xi^2} = \frac{k_R B_1 h^2}{2\mu_1 \gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial\xi}, \quad (25)$$

$$-k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2\Psi_2^{(n)}}{\partial\xi^2} + \left(\frac{\partial^2\Psi_2^{(n)}}{\partial\tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2\Psi_2^{(n)}}{\partial\xi^2} \right) - k_R B_2' \frac{\partial^2\Psi_{1,h}^{(n)}}{\partial\xi^2} = \frac{k_R B_2 h^2}{2\mu_1 \gamma_n} \frac{\partial P_2}{\partial\xi}, \quad (26)$$

где

$$\Psi_{2,h}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=1}, \quad \Psi_{1,h}^{(n)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_1^{(n)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=-1}, \quad (27)$$

постоянные B_1 , B_2 , B_2' и D_2 определяются формулами (19) и (22).

В) Краевые задачи Неймана для функций $\psi_i^{(k)}$ ($i = 1, 2$): найти решение уравнения

$$k_{2,k}^2 \frac{\partial^2\psi_i^{(k)}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi_i^{(k)}}{\partial\zeta^2} = 0 \quad (28)$$



в области $D_i^{(k)}$, удовлетворяющее граничному условию

$$\left. \frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial \zeta} \right|_{L_i^{(k)}} = \Psi_i^{(k)} \quad (29)$$

при $k = 1, i = 1$ и $k = n, i = 2$, или одному из условий

$$\left. \frac{\partial \psi_2^{(p)}}{\partial \zeta} \right|_{L_2^{(p)}} = S_{11}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_1^{(p)}}{\partial \zeta} \right|_{L_2^{(p)}} + S_{12}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_2^{(p+1)}}{\partial \zeta} \right|_{L_2^{(p)}}, \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1^{(p+1)}}{\partial \zeta} \right|_{L_1^{(p+1)}} = S_{21}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_1^{(p)}}{\partial \zeta} \right|_{L_1^{(p+1)}} + S_{22}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_2^{(p+1)}}{\partial \zeta} \right|_{L_1^{(p+1)}}, \quad (31)$$

где $p = 1$ (p – номер контактной поверхности).

С) Краевые задачи Дирихле для функций $\varphi_i^{(p)}$ ($i = 1, 2$): найти решение уравнения

$$k_{1,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi_i^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(k)}}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (32)$$

в области $D_i^{(k)}$, удовлетворяющее граничному условию

$$\left. \frac{\partial \varphi_i^{(k)}}{\partial \xi} \right|_{L_i^{(k)}} = -\frac{k_{3,k}^2}{k_{1,k} k_{2,k}} \Psi_i^{(k)} \quad (33)$$

при $k = 1, i = 1$ и $k = n, i = 2$, или одному из условий

$$\left. \frac{\partial \varphi_2^{(p)}}{\partial \xi} \right|_{L_2^{(p)}} = P_{11}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_1^{(p)}}{\partial \xi} \right|_{L_2^{(p)}} + P_{12}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_2^{(p+1)}}{\partial \xi} \right|_{L_2^{(p)}}, \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1^{(p+1)}}{\partial \xi} \right|_{L_1^{(p+1)}} = P_{21}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_1^{(p)}}{\partial \xi} \right|_{L_1^{(p+1)}} + P_{22}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_2^{(p+1)}}{\partial \xi} \right|_{L_1^{(p+1)}}, \quad (35)$$

где $p = 1$. В краевые задачи (28)–(31) и (32)–(35) переменная τ входит как параметр.

Д) Выражения для напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)} &= -2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left(k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi^2} + k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} - k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \xi^2} - k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \xi^2} \right), \\ \sigma_{11}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{k_{1,k}^2} \left[(1 - k_{1,k}^2 - k_{3,k}^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \zeta^2} \right) + k_{1,k}^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right], \\ v_1^{(k)} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_1^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi_2^{(k)}}{\partial \zeta} \right), \quad v_3^{(k)} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi_1^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_2^{(k)}}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Области $D_i^{(k)}$ определены следующим образом:

$$D_1^{(k)} : (\zeta < r_{k-1}, -\infty < \xi < \infty); \quad D_2^{(k)} : (\zeta > r_k, -\infty < \xi < \infty), \quad (37)$$

а линии $L_i^{(k)}$ представляют собой границы полуплоскостей $D_i^{(k)}$:

$$L_1^{(k)} : (\zeta = r_{k-1}, -\infty < \xi < \infty); \quad L_2^{(k)} : (\zeta = r_k, -\infty < \xi < \infty), \quad (38)$$



причем $L_1^{(k+1)} = L_2^{(k)}$. Коэффициенты в (30), (31), (34), (35) определяются при решении системы (23) и имеют вид

$$\begin{aligned} S_{i_0 i_0}^{(p)} &= \frac{1}{\Delta_0^{(p)}} [(k_{3,i}^4 + k_{1,i} k_{2,i}) (k_{1,l} k_{2,l} - 1) \gamma_i^2 + s_{il} \gamma_i \gamma_l + (k_{1,l} k_{2,l} - k_{3,l}^4) (k_{1,i} k_{2,i} + 1) \gamma_i^2], \\ s_{il} &= (2 + k_{1,i} k_{2,l} - k_{1,l} k_{2,i}) k_{3,i}^2 k_{3,l}^2 - (2k_{1,l} k_{2,l} + k_{1,i} k_{2,i} - k_{1,l} k_{2,i}) k_{3,i}^2 + \\ &\quad + (2k_{1,i} k_{2,i} + k_{1,l} k_{2,l} - k_{1,i} k_{2,l}) k_{3,l}^2 - 2k_{1,i} k_{2,i} k_{1,l} k_{2,l} - k_{1,l} k_{2,i} + k_{1,i} k_{2,l}, \\ S_{i_0 l_0}^{(p)} &= \frac{2k_{2,i}}{\Delta_0^{(p)}} (k_{3,l}^2 - 1) [(k_{3,l}^2 k_{1,i} - k_{1,l}) \gamma_1^2 + (k_{3,i}^2 k_{1,l} - k_{1,i}) \gamma_l \gamma_i], \\ P_{i_0 i_0}^{(p)} &= \frac{2}{\Delta_0^{(p)}} [k_{3,i}^2 (1 - k_{1,l} k_{2,l}) \gamma_i^2 - (k_{3,i}^2 + 1) (k_{3,l}^2 - k_{1,l} k_{2,l}) \gamma_i \gamma_l + (k_{3,l}^4 - k_{1,l} k_{2,l}) \gamma_l^2], \\ P_{i_0 l_0}^{(p)} &= \frac{2}{\Delta_0^{(p)}} (k_{3,l}^2 - 1) [-(k_{3,l}^2 - k_{1,l} k_{2,i}) \gamma_l^2 + (k_{3,i}^2 - k_{1,l} k_{2,i}) \gamma_l \gamma_i], \end{aligned} \quad (39)$$

где $l, i = p, p+1, l \neq i, i_0 = i - p + 1, l_0 = l - p + 1$, и

$$\Delta_0^{(p)} = \begin{vmatrix} \gamma_p k_{1,p} & \gamma_p k_{3,p}^2 & \gamma_{1,p+1} k_{1,p+1} & \gamma_{p+1} k_{3,p+1}^2 \\ \gamma_p k_{3,p}^2 & \gamma_p k_{2,p} & -\gamma_{p+1} k_{3,p+1}^2 & -\gamma_{p+1} k_{2,p+1} \\ k_{1,p} & 1 & k_{1,p+1} & 1 \\ 1 & k_{2,p} & -1 & -k_{2,p+1} \end{vmatrix}$$

(в первой части в (39) $p = 1$).

Уравнения (25), (26) неудобны тем, что они не отделяются от двумерных задач из-за наличия величин $\Psi_{2,h}^{(1)}, \Psi_{1,h}^{(n)}$. Выразим эти величины через $\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(n)}$, последовательно решая краевые задачи для функций $\psi_i^{(k)}$ (28)–(31). Поскольку нам требуются не сами функции $\psi_i^{(k)}$, а их производные по ζ , то задачи (28)–(31) сводятся к задачам Дирихле. Решение последних записывается в виде интеграла Пуассона для полуплоскости (см., например, [13]), позволяющего восстановить значения функции, гармонической в полуплоскости $z > 0$, по её значениям на границе $z = 0$.

Подставляя записанные с помощью интеграла Пуассона выражения для $\Psi_{2,h}^{(1)}, \Psi_{1,h}^{(2)}$ в (25), (26), приходим к системе двух одномерных интегродифференциальных уравнений относительно функций $\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(n)}$. Эту систему можно записать как систему для составляющих перерезывающего усилия. Используя (28), представим выражение для напряжения $\sigma_{13}^{(k)}$ из (36) в виде

$$\sigma_{13}^{(k)} = 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{k_{3,k}^2}{k_{2,k}^2} \frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \zeta^2} + \frac{k_{3,k}^2}{k_{2,k}^2} \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \zeta^2} \right), \quad (40)$$

позволяющем вычислить в явном виде интегралы в выражении для перерезывающего усилия. Пренебрегая членами, малыми вследствие затухания потенциалов при удалении от соответствующих границ, приходим, учитывая граничные условия (33), к следующему выражению:

$$N_1 = h \left[\int_{-1}^{r_1} \sigma_{13}^{(2)} d\zeta + \int_{r_1}^1 \sigma_{13}^{(1)} d\zeta \right] \approx 2\mu_1 h^{-1} (K_{N,1} \Psi_1^{(1)} - K_{N,2} \Psi_2^{(n)}) = N_1^{(1)} - N_1^{(2)}, \quad (41)$$

где

$$K_{N,1} = \gamma_1 \frac{\theta_1^4 k_R^4}{4k_{2,1}^2 k_{3,1}^2}, \quad K_{N,2} = \gamma_n k_{3,n}^2 \frac{k_{1,n} - k_{2,n}}{k_{1,n} k_{2,n}^2}. \quad (42)$$

Выражая величины $\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(n)}$ через $N_1^{(1)}, N_1^{(2)}$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)} (q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\ - \frac{2k_R B_1 S_{12}^{(1)} K_{N,1}}{\pi^2 K_{N,2}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)} (q_2 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{hk_R B_1 K_{N,1}}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) - \\
 & - \frac{k_R B_2' S_{22}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)}(q_2 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_2^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\
 & - \frac{k_R B_2' S_{21}^{(1)} K_{N,2}}{\pi^2 K_{N,1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{h k_R B_2 K_{N,2}}{\gamma_2} \frac{\partial P_2}{\partial \xi},
 \end{aligned} \tag{43}$$

где $q_k = 2\eta_k k_{2,k}$, $\eta_k = (r_{k-1} - r_k) / 2$, η_k — относительные полутолщины слоев.

Система (43) является замкнутой. Таким образом, задача, по сути, сводится к одномерной, подобно тому, как при построении длинноволновых приближений трехмерные динамические уравнения для пластины или оболочки сводятся к двумерным уравнениям для величин, не зависящих от толщины координаты (см. [14]). После нахождения решения системы (43) можно восстановить затухающее поле во всей области пластины, решая стандартные краевые задачи для уравнений эллиптического типа (28)–(31) и (32)–(35).

Вид уравнений (43) позволяет проанализировать характер особенностей решения в зависимости от приложенной нагрузки. В частности, если нагрузка имеет вид

$$P_k = \pm I_k \delta(\xi) H(\tau),$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, $H(\tau)$ — функция Хевисайда, то перерезывающая сила на фронте волны Рэлея имеет разрыв первого рода. Появление этого разрыва связано с бесконечным разрывом напряжений на границе. Внутри тела, в том числе и в точках, сколь угодно близких к границе, все напряжения и перемещения являются непрерывными, что соответствует условному характеру фронта волны Рэлея и тому факту, что внутри упругого тела разрывы не могут распространяться со скоростями, отличными от скоростей волн расширения и сдвига.

При применении построенной модели следует иметь в виду, что она не предназначена для описания длинноволновых колебаний, поэтому частные решения подобного рода должны быть отброшены. Также следует отметить, что волновой оператор во втором уравнении системы (43) необходим, строго говоря, только в случае $k_{R,1} = k_{R,2}$ (равные скорости волны Рэлея), когда постоянная D_2 обращается в нуль. Если же скорости волн Рэлея различны, то с течением времени их фронты расходятся достаточно далеко и перестают влиять друг на друга. Однако в случае очень близких значений скоростей возможны ситуации, когда даже в дальнем поле фронт второй волны попадает в окрестность фронта первой волны. В этом случае построенная модель при сохранении волнового оператора во втором уравнении описывает оба фронта, однако скорость движения второго фронта определяется приближенно — чем ближе значения скоростей, тем точнее. В случае существенного различия скоростей учет волнового оператора во втором уравнении становится неэффективным. Отбрасывая его и следующее слагаемое, малое по сравнению с первым, получим упрощенную систему:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\
 & - \frac{2k_R B_1 S_{12}^{(1)} K_{N,1}}{\pi^2 K_{N,2}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)}(q_2 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{h k_R B_1 K_{N,1}}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \\
 & -k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{k_R B_2' S_{21}^{(1)} K_{N,2}}{\pi^2 K_{N,1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{h k_R B_2 K_{N,2}}{\gamma_2} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Критерием выбора между системами (43) и (44) является погрешность аппроксимации величины $k_{R,2}$ выражением $\sqrt{k_R^2 + k_R B_2 D_2}$. Если она мала (порядка десятых долей процента), то следует пользоваться системой (43), в противном случае — системой (44).



Заметим также, что построенная модель без каких-либо изменений применима и для описания поля в окрестности фронта большей скорости волны Рэлея (для этого следует выбрать нумерацию из условия $k_{R,1} > k_{R,2}$), если при этом выполняется неравенство $k_{R,1} < \theta_2^{-1}$ (скорость волны Рэлея в первом слое больше скорости волны Рэлея во втором слое, но меньше скорости волны сдвига в нем).

2. ПЛАСТИНА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СЛОЕВ

2.1. Формулировка асимптотической модели

Будем считать теперь, что рассматриваемая пластина имеет n слоев, положение плоскостей раздела которых характеризуется координатами $z = h_p$, $p = \overline{1, n-1}$, $h > h_1 > \dots > h_{n-1} > -h$. Постановка задачи из п.1.1 не изменится, за исключением граничных условий (3), которые примут вид

$$\begin{aligned} \zeta = 1 : \quad & \sigma_{13}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = P_1(\xi, \tau); \\ \zeta = r_p : \quad & \sigma_{13}^{(p)} = \sigma_{13}^{(p+1)}, \quad \sigma_{33}^{(p)} = \sigma_{33}^{(p+1)}, \quad v_1^{(p)} = v_1^{(p+1)}, \quad v_3^{(p)} = v_3^{(p+1)}; \\ \zeta = -1 : \quad & \sigma_{13}^{(n)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(n)} = P_2(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (45)$$

где $r_p = h_p/h$, $p = \overline{1, n-1}$. В уравнениях п.1.1 теперь следует полагать $k = \overline{1, n}$. Все безразмерные переменные и безразмерные параметры вводятся так же, как и в п.1.1.

Примем, что упругие параметры материалов слоев таковы, что выполняется условие $k_{R,1} \leq k_{R,n}$, и при этом $k_{R,1} < \theta_k^{-1}$ для всех $k = \overline{1, n}$ (скорость волны Рэлея в первом слое меньше всех скоростей волн сдвига в остальных слоях). Тогда параметры (11) будут действительными для любого k .

Из хода рассуждений при выводе приближенных уравнений в п.1.2 ясно, что для обобщения асимптотической модели (24)–(39) на случай многослойной пластины достаточно заменить слой (2) слоем (n) и записать систему (23) для каждой поверхности контакта. Таким образом, уравнения (24)–(39) остаются в силе и для многослойной пластины, если полагать в них $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n-1}$.

2.2. Вывод разрешающей системы

В случае многослойной пластины также можно получить замкнутую систему двух одномерных уравнений, описывающую распространение волнового процесса вдоль наружных поверхностей. Для этого следует выразить величины $\Psi_{2,h}^{(1)}$, $\Psi_{1,h}^{(n)}$ через $\Psi_1^{(1)}$, $\Psi_2^{(n)}$, последовательно решая краевые задачи для функций $\psi_i^{(k)}$ (28)–(31) с помощью интеграла Дирихле. Запишем, например, решение для $\psi_1^{(1)}$:

$$\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1^{(1)}((r_0 - \zeta)k_{2,1}x_1 + \xi, \tau)}{x_1^2 + 1} dx_1. \quad (46)$$

Для сокращения записи будем опускать параметр τ . Введем обозначение

$$I_i f(a_1 x_i + \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a_1 x_i + \xi)}{x_i^2 + 1} dx_i, \quad (47)$$

где i — некоторое целое число, a_1 — величина, не зависящая от x_i и ξ . Результат повторного применения оператора (47) с другим множителем при переменной интегрирования записывается в виде

$$I_j I_i f(a_1 x_i + a_2 x_j + \xi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a_1 x_i + a_2 x_j + \xi)}{(x_i^2 + 1)(x_j^2 + 1)} dx_i dx_j. \quad (48)$$

Если мы переименуем переменные $x_i \leftrightarrow x_j$ и изменим порядок интегрирования, то придем к соотношению

$$I_j I_i f(a_1 x_i + a_2 x_j + \xi) = I_j I_i f(a_1 x_j + a_2 x_i + \xi). \quad (49)$$

Введем также обозначения

$$\Psi_{i,r_p}^{(k)} = \left. \frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=r_p}. \quad (50)$$



С учетом введенных обозначений и формулы (46) имеем:

$$\Psi_{1,r_1}^{(1)} = I_1 \Psi_1^{(1)} (q_1 x_1 + \xi). \quad (51)$$

Аналогично получим

$$\Psi_{2,r_{n-1}}^{(n)} = I_1 \Psi_2^{(n)} (q_n x_1 + \xi). \quad (52)$$

Здесь и далее величины q_k определяются как в системе (43) при $k = \overline{1, n}$. Запишем решение задачи (28), (30)

$$\frac{\partial \psi_2^{(p)}}{\partial \zeta} = \frac{S_{11}^{(p)} I_l \Psi_{1,r_p}^{(p)} ((\zeta - r_p) k_{2,p} x_l + \xi) + S_{12}^{(p)} I_l \Psi_{2,r_p}^{(p+1)} ((\zeta - r_p) k_{2,p} x_l + \xi)}{\partial \zeta} \quad (53)$$

и решение задачи (28), (31)

$$\frac{\partial \psi_1^{(p,1)}}{\partial \zeta} = \frac{S_{21}^{(p)} I_l \Psi_{1,r_p}^{(p)} ((r_p - \zeta) k_{2,p+1} x_l + \xi) + S_{22}^{(p)} I_l \Psi_{2,r_p}^{(p+1)} ((r_p - \zeta) k_{2,p+1} x_l + \xi)}{\partial \zeta}. \quad (54)$$

В дальнейших выкладках будем пренебрегать «переотражением» во внутренних слоях, то есть при выводе выражения для $\Psi_{2,h}^{(1)}$ будем отбрасывать второе слагаемое в формуле (54), а при выводе выражения для $\Psi_{1,h}^{(n)}$ — первое слагаемое в формуле (53) (в (53), (54) подчеркнуты те слагаемые, которые нужно отбросить). В силу затухания волнового поля влияние отброшенных слагаемых должно быть мало. Последовательное применение формул (53) и (54) позволяет свести выражения для $\Psi_{2,h}^{(1)}$ и $\Psi_{1,h}^{(n)}$ к соотношениям, содержащим величины, определяемые формулами (51) и (52). Пользуясь методом математической индукции, нетрудно установить общие формулы:

$$\begin{aligned} \Psi_{2,h}^{(1)} &= S_{11}^{(1)} I_1 I_2 \Psi_1^{(1)} (q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi) + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} S_{11}^{(k)} \left(\prod_{l=1}^{k-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) I_1 \dots I_{2k} \Psi_1^{(1)} \left(\sum_{j=1}^k (q_j x_{2j-1} + q_j x_{2j}) + \xi \right) + \\ &+ \left(\prod_{l=1}^{n-1} S_{12}^{(l)} \right) I_1 \dots I_n \Psi_2^{(n)} \left(\sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi \right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1,h}^{(n)} &= S_{22}^{(n-1)} I_1 I_2 \Psi_2^{(n)} (q_n x_1 + q_n x_2 + \xi) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} S_{22}^{(k)} \left(\prod_{l=k+1}^{n-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) I_1 \dots I_{2(n-k)} \Psi_n^{(n)} \left(\sum_{j=1}^{n-k} q_{n+1-j} (x_{2j-1} + x_{2j}) + \xi \right) + \\ &+ \left(\prod_{l=1}^{n-1} S_{21}^{(l)} \right) I_1 \dots I_n \Psi_1^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (25), (26), приходим к замкнутой системе уравнений для функций $\Psi_1^{(1)}$ и $\Psi_2^{(n)}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1^{(1)} (q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\ &- 2k_R B_1 \sum_{k=2}^{n-1} \frac{S_{11}^{(k)}}{\pi^{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2k} \frac{\Psi_1^{(1)} \left(\sum_{j=1}^k q_j (x_{2j-1} + x_{2j}) + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^{2k} (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_{2k} - \\ &- \frac{2k_R B_1}{\pi^n} \left(\prod_{l=1}^{n-1} S_{12}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \frac{\Psi_2^{(n)} \left(\sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^n (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_n = \frac{h^2 k_R B_1}{2\mu_1 \gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (57)$$



$$\begin{aligned}
 & -k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \xi^2} \right) - \\
 & - \frac{k_R B_2' S_{22}^{(n-1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_2^{(n)}(q_n x_1 + q_n x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - k_R B_2' \sum_{k=1}^{n-2} \frac{S_{22}^{(k)}}{\pi^{2(n-k)}} \left(\prod_{l=k+1}^{n-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) \times \\
 & \times \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2(n-k)} \frac{\Psi_2^{(n)} \left(\sum_{j=1}^{n-k} q_{n+1-j} (x_{2j-1} + x_{2j}) + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^{2(n-k)} (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_{2(n-k)} - \\
 & - \frac{k_R B_2'}{\pi^n} \left(\prod_{l=1}^{n-1} S_{21}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \frac{\Psi_1^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^n (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_n = \frac{h^2 k_R B_2}{2\mu_1 \gamma_n} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}.
 \end{aligned}$$

Формулы перехода от $\Psi_1^{(1)}$ и $\Psi_2^{(n)}$ к составляющим перерезывающего усилия (см. (41)) не изменяются, так как в них участвуют только величины, относящиеся к внешним поверхностям пластины. Полагая в (57)

$$\Psi_1^{(1)} = \frac{h N_1^{(1)}}{2\mu_1 K_{N,1}}, \quad \Psi_2^{(n)} = \frac{h N_1^{(2)}}{2\mu_1 K_{N,2}}, \quad (58)$$

где величины $K_{N,1}$, $K_{N,2}$ определяются формулами (42), получим систему двух уравнений для величин $N_1^{(1)}$ и $N_1^{(2)}$. Все замечания о порядке применения построенной модели, приведенные в конце п.1.2, относятся и к многослойным пластинам. В частности, если скорости волн Рэлея на верхней и нижней поверхностях существенно различны, следует использовать упрощенную систему, первое уравнение которой совпадает с первым уравнением (57), а второе имеет вид

$$- \frac{k_R B_2'}{\pi^n} \left(\prod_{l=1}^{n-1} S_{21}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \frac{\Psi_1^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^n (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_n - k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \xi^2} = \frac{k_R B_2 h^2}{2\mu_1 \gamma_n} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}.$$

Критерием выбора между полной и упрощенной системами по-прежнему является погрешность аппроксимации величины $k_{R,n}$ выражением $\sqrt{k_R^2 + k_R B_2 D_2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотическая модель, представленная в данной работе, значительно упрощает анализ дальнего поля волны Рэлея в многослойных пластинах. Задача описания распространения волны сводится к решению замкнутой системы двух одномерных интегродифференциальных уравнений, в которой присутствует скорость волны Рэлея в явном виде. Результаты работы могут быть применены при формулировке асимптотической схемы расчленения НДС слоистых пластин и оболочек при ударных воздействиях нормального типа.

Кроме волн Рэлея в двухслойной пластине при определенных соотношениях параметров существует поверхностная волна Стоунли. Данная модель не описывает условного фронта этой волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).

Библиографический список

1. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Phil. Trans. R. Soc. A203. 1904. P. 1–42 .
2. Rayleigh J. W. S. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.



3. Коссович Л. Ю., Кушеккалиев А. Н. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2003. № 5. С. 10–22.
4. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. N.Y., 1957.
5. Miklowitz J. Elastic wave propagation // In Applied mechanics surveys (Ed. H. N. Abramson, H. Liebowitz, J. M. Crowley, S. Juhasz). Washington D.C., 1966.
6. Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // Докл. АН. 2004. Т. 395, № 4. С. 482–484.
7. Коссович Л. Ю., Кушеккалиев А. Н. Поле Рэлея в бесконечном упругом слое // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 5. С. 159–161.
8. Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Таранов О. Г. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуплоскости при действии торцевой нагрузки // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 89–96.
9. Коссович Л. Ю., Ковалев В. А., Таранов О. Г. Поле Рэлея в задаче Лэмба для цилиндрической оболочки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. 2004. С. 52–54.
10. Ковалев В. А., Таранов О. Г. Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела : материалы V Рос. конф. с междунар. участием / под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов, 2005. С. 78–82.
11. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., 1974. 274 с.
12. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев, 1981. 284 с.
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1987. 688 с.
14. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego, 1998. 226 p.

УДК 539.374

СВЯЗАННЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ТРЕТЬЕГО ТИПА ЗАДАННОГО АЗИМУТАЛЬНОГО ПОРЯДКА В ВОЛНОВОДЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ ДЛЯ ТЕПЛА СТЕНКОЙ

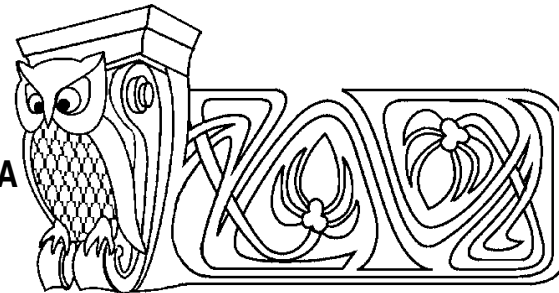
В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*

Московский городской университет управления
Правительства Москвы,
кафедра прикладной математики;

* Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
E-mail: vlad_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

Работа посвящена изучению распространения обобщенных связанных термоупругих волн заданного азимутального порядка в длинном цилиндрическом волноводе кругового поперечного сечения. При этом предполагается, что стенка волновода свободна от нагрузок и является проницаемой для тепла. Исследование проводится в рамках теории связанной обобщенной термоупругости третьего типа (GNIII), согласующейся с основными принципами термомеханики.

Данная теория сочетает оба известных типа распространения тепла в твердых деформируемых телах: термодиффузионный и волновой. Предельными случаями обобщенной термоупругости типа III являются классическая термоупругость (GNI/CTE) и гиперболическая термоупругость (GNII), которые могут быть сформулированы в терминах классической теории поля. Дифференциальные уравнения поля в этом случае принадлежат гиперболическому аналитическому типу. Методом разделения переменных в связанных уравнениях линейной термоупругости третьего типа получено их замкнутое аналитическое решение, которое удовлетворяет необходимым краевым условиям на боковой стенке волновода, в том числе условию конвективного теплообмена с окружающей средой. Установлено, что краевые условия на поверхности волновода выполняются отдельно для



Cross-Coupled Type-III Thermoelastic Waves of a Given Azimuthal Number in a Waveguide under Sidewall Heat Interchanging

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev*

Moscow City Government University of Management,
Chair of Applied Mathematics

* Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow
E-mail: vlad_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

The paper is devoted to a study of cross-coupled type-III generalized thermoelastic waves of a given azimuthal order propagating via a long cylindrical waveguide with circular cross-section. Sidewall of the waveguide is assumed free from tractions and permeable to heat. The study is carried out in the framework of coupled generalized theory of type-III thermoelasticity (GNIII) consistent with the fundamental principles of continuum thermomechanics.

The type-III theory combines the both possible mechanisms of heat transfer: thermodiffusion and wave. Type-III generalized thermoelasticity includes classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII) as limiting cases.