



жащими на одной прямой, и ее применение к пучкам дифференциальных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 69–72.

6. Рыхлов В.С. О полноте собственных функций одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 6. С. 42–53.

УДК 517.984

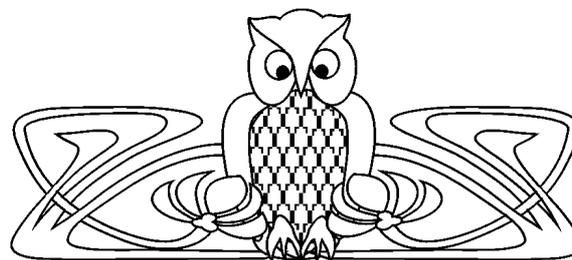
## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ-КУСТЕ

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительной математики  
и математической физики  
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля на произвольном графе с циклом. Приведена конструктивная процедура решения и установлена его единственность.

**Ключевые слова:** операторы Штурма – Лиувилля, пространственные сети, обратные спектральные задачи.



### Recovering Differential Operators on a Bush-Type Graph

V.A. Yurko

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Physics and Numerical Analysis  
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem is studied for Sturm – Liouville operators on arbitrary graphs with a cycle. A constructive procedure for the solution is provided and the uniqueness is established.

**Key words:** Sturm – Liouville operators, spatial networks, inverse spectral problems.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследуется обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на так называемом графе-кусте, т.е. на произвольном графе с циклом. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении коэффициентов операторов по их спектральным характеристикам. Основные результаты по обратным спектральным задачам на *интервале* представлены в [1]. Обратные задачи на графах являются более трудными, и в настоящее время есть только несколько работ в этой области. В частности, обратные задачи восстановления коэффициентов дифференциальных операторов на произвольного вида деревьях (т.е. на графах без циклов) исследовались в работах [2–6] и других. Обратные задачи на графах с циклом изучались в работах [7–9], но только для весьма частных случаев. В данной статье рассматриваются более общие графы, чем в работах [7–9], а именно произвольные графы с циклом. Для этого класса графов дается постановка и решение обратной задачи спектрального анализа. Доказана соответствующая теорема единственности и получена конструктивная процедура построения решения этого класса обратных задач.

Рассмотрим компактный граф  $G$  в  $\mathbf{R}^l$  ( $l \geq 2$ ) с множеством ребер  $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$  и множеством вершин  $W = V \cup U$ , где  $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ ,  $U = \{u_1, \dots, u_N\}$ . Граф имеет вид  $G = e_0 \cup T$ , где  $e_0$  – цикл,  $u_i \in e_0$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $v_j \notin e_0$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $T \cap e_0 = U$ ,  $T = T_1 \cup \dots \cup T_m$ ,  $T_j$  – дерево с корнем из множества  $U$  и с одним корневым ребром из  $\mathcal{E}$ . Множество  $T$  состоит из  $N$  групп деревьев:  $T = Q_1 \cup \dots \cup Q_N$ ,  $Q_i \cap e_0 = u_i$ , т.е. все деревья из  $Q_i$  имеют общий корень  $u_i$ . Пусть  $m_i$  – число деревьев в блоке  $Q_i$ ; т.е.  $m_1 + \dots + m_N = m$ . Обозначим  $s_0 = 1$ ,  $s_i = m_1 + \dots + m_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Тогда

$$Q_i = \bigcup_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j, \quad \bigcap_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j = u_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Зафиксируем  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, m}$  и рассмотрим дерево  $T_j \in Q_i$ . Для двух точек  $a, b \in T_j$  будем писать  $a \leq b$ , если  $a$  лежит на единственном простом пути, соединяющем корень  $u_i$  с  $b$ . Будем писать  $a < b$ , если  $a \leq b$  и  $a \neq b$ . Отношение  $<$  определяет частичную упорядоченность на  $T_j$ . Если  $a < b$ , то обозначим  $[a, b] := \{z \in T_j : a \leq z \leq b\}$ . В частности, если  $e = [v, w]$  – ребро, то мы будем называть  $v$  его начальной точкой,  $w$  – его конечной точкой, и будем говорить, что  $e$  выходит из  $v$  и заканчивается



в  $w$ . Для каждой вершины  $v \in T_j$  мы обозначим через  $R(v) := \{e \in T_j : e = [v, w], w \in T_j\}$  множество ребер, выходящих из  $v$ . Для каждой  $v \in T_j$  через  $|v|$  обозначим число ребер между  $u_i$  и  $v$ . Для любой  $v \in V$  число  $|v|$  является целым неотрицательным числом, которое называется порядком  $v$ . Порядок ребра  $e \in T$  определяется как порядок его конечной точки. Число  $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$  называется высотой  $T$ . Пусть  $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$ ,  $\mu = \overline{0, \sigma}$  — множество вершин порядка  $\mu$ , и пусть  $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in T : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$ ,  $\mu = \overline{1, \sigma}$  — множество ребер порядка  $\mu$ .

Цикл  $e_0$  состоит из  $N$  частей:

$$e_0 = \cup_{i=1}^N e_i^0, \quad e_i^0 = [u_i, u_{i+1}], \quad i = \overline{1, N}, \quad u_{N+1} := u_1.$$

Здесь  $u_i$  и  $u_{i+1}$  — начальная и конечная точки для  $e_i^0$  соответственно. Для определенности занумеруем вершины  $v_j \in V$  следующим образом:  $\Gamma := \{v_1, \dots, v_p\}$  — граничные вершины  $G$ , а  $v_j, j > p + 1$  занумерованы в порядке возрастания  $|v_j|$ . Аналогично занумеруем ребра, а именно:  $e_j = [v_{j_k}, v_j]$ ,  $j = \overline{1, r}, j_k < j$ . В частности,  $E := \{e_1, \dots, e_p\}$  — множество граничных ребер  $G$ . Ясно, что  $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$  тогда и только тогда, когда  $v_j \in V^{(\mu)}$ .

Пусть  $d_j$  — длина ребра  $e_j, j = \overline{0, r}$ . Каждое ребро  $e_j, j = \overline{0, r}$ , рассматривается как отрезок  $[0, d_j]$  и параметризуется параметром  $x \in [0, d_j]$ . Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на ребрах: для  $j = \overline{1, r}$  конечной вершине  $v_j$  соответствует  $x_j = 0$ , а начальной вершине соответствует  $x_j = d_j$ ; для цикла  $e_0$  оба конца  $x_0 = +0$  и  $x_0 = d_0 - 0$  соответствуют точке  $u_1$ . Пусть  $d_i^0$  — длина  $e_i^0$ . Тогда  $d_0 = d_1^0 + \dots + d_N^0$ . Каждая часть  $e_i^0 (i = \overline{1, N})$  цикла  $e_0$  параметризуется параметром  $\xi_i \in [0, d_i^0]$ , причем  $\xi_i = 0$  соответствует точке  $u_i$ , а  $\xi_i = d_i^0$  соответствует точке  $u_{i+1}$ .

Интегрируемая функция  $Y$  на  $G$  может быть представлена в виде  $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$ , где функция  $y_j(x_j), x_j \in [0, d_j]$  определена на ребре  $e_j$ . Функция  $y_0$  имеет вид  $y_0 = \{y_i^0\}_{i=\overline{1,N}}$ , где функция  $y_i^0(\xi_i), \xi_i \in [0, d_i^0]$ , определена на  $e_i^0$ .

Пусть  $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$  — интегрируемая вещественная функция на  $G$ ;  $q$  называется потенциалом. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на  $G$ :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, d_j], \quad (1)$$

где  $j = \overline{0, r}$ ,  $\lambda$  — спектральный параметр, функции  $y_j, y_j'$  абсолютно непрерывны на  $[0, d_j]$  и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренних вершинах  $u_i, i = \overline{1, N}$  и  $v_k, k = p + 1, r$ : для  $k = p + 1, r$ ,

$$y_j(d_j) = y_k(0) \quad \text{при всех } e_j \in R(v_k), \quad \sum_{e_j \in R(v_k)} y_j'(d_j) = y_k'(0), \quad (2)$$

и для  $i = \overline{1, N}$ ,

$$\left. \begin{aligned} y_i^0(0) &= y_{i-1}^0(d_{i-1}^0) = (Y_j)|_{u_i} \quad \text{при всех } T_j \in Q_i, \\ (y_i^0)'(0) &= (y_{i-1}^0)'(d_{i-1}^0) + \sum_{T_j \in Q_i} (Y_j)'|_{u_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $y_0^0 := y_N^0, d_0^0 := d_N^0, Y_j := \{Y\}_{T_j}$ . Условия склейки (2)–(3) называются стандартными условиями.

Рассмотрим краевую задачу  $L_0(G)$  для уравнения (1) с условиями склейки (2)–(3) и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах  $v_1, \dots, v_p$ :  $y_j(0) = 0, j = \overline{1, p}$ .

Пусть  $\Lambda_0 = \{\lambda_{n0}\}_{n \geq 1}$  — собственные значения (с учетом кратностей) задачи  $L_0(G)$ . Рассмотрим также краевые задачи  $L_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(G), \gamma = \overline{1, p}, 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p$  для уравнения (1) с условиями склейки (2)–(3) и краевыми условиями  $y_i'(0) = 0, i = \nu_1, \dots, \nu_\gamma, y_j(0) = 0, j = \overline{1, p}, j \neq \nu_1, \dots, \nu_\gamma$ .

Через  $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} := \{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}\}_{n \geq 1}$  обозначим собственные значения (с учетом кратностей) краевой задачи  $L_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(G)$ .

Пусть  $S_j(x_j, \lambda), C_j(x_j, \lambda), j = \overline{0, r}, x_j \in [0, d_j]$  — решения уравнения (1) на ребре  $e_j$  с начальными условиями  $S_j(0, \lambda) = C_j'(0, \lambda) = 0, S_j'(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1$ . При каждом фиксированном  $x_j \in [0, d_j]$  функции  $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda), C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda), j = \overline{0, r}, \nu = 0, 1$  являются целыми по  $\lambda$  порядка  $1/2$ . При этом  $\langle C_j(x_j, \lambda), S_j(x_j, \lambda) \rangle \equiv 1$ , где  $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$  — вронскиан функций  $y$  и  $z$ . Положим  $h(\lambda) := S_0(d_0, \lambda), H(\lambda) := C_0(d_0, \lambda) - S_0'(d_0, \lambda)$ . Пусть  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  — нули целой функции  $h(\lambda)$ , а  $\omega_n := \text{sign } H(z_n), \Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$ .



Выберем и зафиксируем по одной граничной вершине  $v_{\xi_i} \in Q_i$  из каждого блока  $Q_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Через  $\xi := \{k : k = \xi_1, \dots, \xi_N\}$  обозначим множество индексов  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Обратная задача ставится следующим образом.

**Обратная задача 1.** Даны  $2^N + p - N$  спектров  $\Lambda_j$ ,  $j = \overline{0, p}$ ,  $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}$ ,  $\gamma = \overline{2, N}$ ,  $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p$ ,  $\nu_j \in \xi$ , и  $\Omega$ , построить потенциал  $q$  на  $G$ .

**Пример 1.** Пусть  $N = 1$ . Тогда мы задаем  $p + 1$  спектров  $\Lambda_j$ ,  $j = \overline{0, p}$  и  $\Omega$ . Эта обратная задача решена в [9].

**Пример 2.** Пусть  $\sigma = 1$ ,  $N = r$ . Тогда мы задаем  $2^N$  спектров  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}$ ,  $\gamma = \overline{1, N}$ ,  $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq N$  и  $\Omega$ . Эта обратная задача решена в [8].

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с  $q$  рассмотрим потенциал  $\tilde{q}$ . Условимся, что если некоторый символ  $\alpha$  обозначает объект, относящийся к  $q$ , то  $\tilde{\alpha}$  обозначает аналогичный объект, относящийся к  $\tilde{q}$ .

**Теорема 1.** Если  $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j$ ,  $j = \overline{0, p}$ ,  $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}$ ,  $\gamma = \overline{2, N}$ ,  $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p$ ,  $\nu_j \in \xi$  и  $\Omega = \tilde{\Omega}$ , то  $q = \tilde{q}$ .

Эта теорема будет доказана в разделе 2. Кроме того, мы дадим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1.

## 1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Зафиксируем  $k = \overline{p+1, r}$ . Обозначим  $Q_k := \{z \in T : v_k < z\}$ ,  $G_k := \overline{G \setminus Q_k}$ . Тогда  $Q_k = \bigcup_{e_i \in R(v_k)} T_{ki}$ , где  $T_{ki}$  – дерево с корнем  $v_k$  и с одним корневым ребром  $e_i$ .

*Обозначения.* Если  $D \subset G$  – некоторый граф, то через  $L_0(D)$  будем обозначать краевую задачу для уравнения (1) на  $D$  со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Пусть  $\{Y\}_D := \{y_j\}_{e_j \in D}$ . Если  $v_j$  – граничная вершина  $D$ , то  $L_j(D)$  обозначает краевую задачу для уравнения (1) на  $D$  со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах, с условием Неймана  $Y'_{|v_j} = 0$  в вершине  $v_j$  и с краевыми условиями Дирихле во всех остальных граничных вершинах. Например,  $L_0(G_k)$  – краевая задача на  $G_k$  с краевыми условиями  $y_k(0) = 0$ ,  $y_m(0) = 0$ ,  $e_m \in E \cap G_k$ , а  $L_k(G_k)$  – краевая задача на  $G_k$  с краевыми условиями  $y'_k(0) = 0$ ,  $y_m(0) = 0$ ,  $e_m \in (E \cap G_k) \setminus e_k$ . Рассмотрим также краевую задачу  $L^1(T_j)$  для уравнения (1) на  $T_j \in Q_i$  с краевыми условиями  $Y'_{|u_i} = 0$ ,  $Y_{|v_j} = 0$ ,  $j = \Gamma \cap T_j$ .

Зафиксируем  $k = \overline{1, p}$ . Пусть  $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{0, r}}$  – решение уравнения (1) на  $G$ , удовлетворяющее условиям склейки (2)–(3) и краевым условиям

$$\Phi_{kj}(0, \lambda) = \delta_{kj}, \quad j = \overline{1, p}, \quad (4)$$

где  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера. Положим  $M_k(\lambda) := \Phi'_{kk}(0, \lambda)$ ,  $k = \overline{1, p}$ . Функция  $M_k(\lambda)$  называется функцией Вейля относительно вершины  $v_k$ .

Обозначим  $M_{kj}^0(\lambda) = \Phi'_{kj}(0, \lambda)$ ,  $M_{kj}^1(\lambda) = \Phi_{kj}(0, \lambda)$ ,  $j = \overline{0, r}$ . Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = M_{kj}^1(\lambda)C_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda)S_j(x_j, \lambda), \quad j = \overline{0, r}. \quad (5)$$

В частности,  $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$ ,  $M_{kk}^1(\lambda) = 1$ ,  $M_{kj}^1(\lambda) = 0$  для  $j = \overline{1, p} \setminus k$ . Следовательно,

$$\Phi_{kk}(x_k, \lambda) = C_k(x_k, \lambda) + M_k(\lambda)S_k(x_k, \lambda).$$

Подставляя (5) в (2)–(4), получаем линейную алгебраическую систему  $D_k$  относительно  $M_{kj}^0(\lambda)$ ,  $M_{kj}^1(\lambda)$ ,  $j = \overline{0, r}$ . Определитель  $\Delta_0(\lambda, G)$  этой системы не зависит от  $k$  и имеет вид [7]

$$\Delta_0(\lambda, G) = \sigma(\lambda) \left( d(\lambda) + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda) \omega_{\mu_1}(\lambda) \dots \omega_{\mu_k}(\lambda) \right), \quad (6)$$

где

$$\sigma(\lambda) = \prod_{k=1}^m \Delta_0(\lambda, T_k), \quad \omega_i(\lambda) = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} \frac{\Delta^1(\lambda, T_k)}{\Delta_0(\lambda, T_k)}, \quad (7)$$

$$d(\lambda) = C_0(d_0, \lambda) + S'_0(d_0, \lambda) - 2, \quad a_1(\lambda) = h(\lambda) = S_0(d_0, \lambda), \quad (8)$$



а  $\Delta_0(\lambda, T_k)$ ,  $\Delta^1(\lambda, T_k)$  – характеристические функции краевых задач  $L_0(T_k)$ ,  $L^1(T_k)$  соответственно, которые определены в [6]. Отметим, что коэффициенты  $d(\lambda)$ ,  $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda)$  в (6) зависят только от  $q_0$ . Функция  $\Delta_0(\lambda, G)$  является целой по  $\lambda$  порядка  $1/2$ , и ее нули (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями задачи  $L_0(G)$ . Функция  $\Delta_0(\lambda, G)$  называется характеристической функцией краевой задачи  $L_0(G)$ . Пусть  $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G)$ ,  $\gamma = \overline{1, p}$ ,  $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p$  получена из  $\Delta_0(\lambda, G)$  заменой  $S_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$  на  $C_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$  при  $j = \nu_1, \dots, \nu_\gamma$ ,  $\nu = 0, 1$ . Функция  $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G)$  является целой по  $\lambda$  порядка  $1/2$ , и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи  $L_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(G)$ . Функция  $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G)$  называется характеристической функцией краевой задачи  $L_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(G)$ . Ясно, что

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G) = \sigma_{(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\lambda) \left( d(\lambda) + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda) \omega_{\mu_1, (\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\lambda) \dots \omega_{\mu_k, (\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\lambda) \right), \quad (9)$$

где  $\sigma_{(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\lambda)$ ,  $\omega_{i, (\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\lambda)$  получены из  $\sigma(\lambda)$ ,  $\omega_i(\lambda)$  заменой  $S_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$  на  $C_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$  при  $j = \nu_1, \dots, \nu_\gamma$ ,  $\nu = 0, 1$ .

Решая систему  $D_k$ , находим по формулам Крамера:  $M_{kj}^s(\lambda) = \Delta_{kj}^s(\lambda, G) / \Delta_0(\lambda, G)$ ,  $s = 0, 1$ ,  $j = \overline{0, r}$ , где  $\Delta_{kj}^s(\lambda, G)$  получен из  $\Delta_0(\lambda, G)$  заменой столбца, соответствующего  $M_{kj}^s(\lambda)$ , на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda, G)}{\Delta_0(\lambda, G)}, \quad k = \overline{1, p}. \quad (10)$$

Зафиксируем  $k = \overline{p+1, r}$ . Пусть  $\Delta_0(\lambda, G_k)$  и  $\Delta_k(\lambda, G_k)$  – характеристические функции для  $L_0(G_k)$  и  $L_k(G_k)$  соответственно. Используя (6)–(8) и формулы для  $\Delta_0(\lambda, T_j)$ ,  $\Delta^1(\lambda, T_j)$  из [6], получаем

$$\Delta_0(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, Q_k) \Delta_0(\lambda, G_k) + \left( \prod_{e_i \in R(v_k)} \Delta_0(\lambda, T_{ki}) \right) \Delta_k(\lambda, G_k), \quad (11)$$

где  $\Delta_0(\lambda, Q_k)$  и  $\Delta_0(\lambda, T_{ki})$  – характеристические функции для задач  $L_0(Q_k)$  и  $L_0(T_{ki})$  соответственно, которые определены в [6]. Аналогично для  $e_j \in E \cap T_{ks}$ ,

$$\Delta_j(\lambda, G) = \Delta_j(\lambda, Q_k) \Delta_0(\lambda, G_k) + \left( \Delta_j(\lambda, T_{ks}) \prod_{e_i \in R(v_k), i \neq s} \Delta_0(\lambda, T_{ki}) \right) \Delta_k(\lambda, G_k), \quad (12)$$

где  $\Delta_j(\lambda, Q_k)$  и  $\Delta_j(\lambda, T_{ki})$  получены из  $\Delta_0(\lambda, Q_k)$  и  $\Delta_0(\lambda, T_{ki})$  заменой  $S_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$ ,  $\nu = 0, 1$ , на  $C_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$ .

Пусть  $\lambda = \rho^2$ ,  $\tau := \text{Im } \rho$ ,  $\Lambda := \{\rho : \tau \geq 0\}$ ,  $\Lambda^\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$ , и пусть  $\lambda_{n0}^0 = (\rho_{n0}^0)^2$ ,  $n \geq 1$  – собственные значения краевой задачи  $L_0(G)$  с нулевым потенциалом  $q = 0$ . Будем обозначать эту краевую задачу через  $L_0^0(G)$ . Пусть  $\Delta_0^0(\lambda, G)$  – характеристическая функция  $L_0^0(G)$ . Тогда  $\Delta_0^0(\lambda, G)$  имеет вид (6) с  $S_j(x_j, \lambda) \equiv \frac{\sin \rho x_j}{\rho}$ ,  $C_j(x_j, \lambda) \equiv \cos \rho x_j$ ,  $j = \overline{0, r}$ . Используя (6) и результаты из [6], получаем следующие свойства характеристической функции  $\Delta_0(\lambda, G)$  и собственных значений  $\Lambda_0$  краевой задачи  $L_0(G)$ .

1) При  $\rho \in \Lambda$ ,  $|\rho| \rightarrow \infty$  имеет место оценка  $\Delta_0(\lambda, G) = O\left(|\rho|^{-r} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r d_j\right)\right)$ .

2) Существуют  $h > 0$ ,  $C_h > 0$  такие, что  $|\Delta_0(\lambda, G)| \geq C_h |\rho|^{-r} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r d_j\right)$  при  $|\tau| \geq h$ . Собственные значения  $\lambda_{n0} = \rho_{n0}^2$  лежат в полосе  $|\tau| < h$ .

3) Число  $N_\xi$  нулей  $\Delta_0(\lambda, G)$  в прямоугольнике  $\Pi_\xi = \{\rho : |\text{Im } \rho| \leq h, \text{Re } \rho \in [\xi, \xi + 1]\}$  ограничено по  $\xi$ .

4) При  $n \rightarrow \infty$ ,  $\rho_{n0} = \rho_{n0}^0 + O((\rho_{n0}^0)^{-1})$ .

5) Справедливо представление

$$\Delta_0(\lambda, G) = A_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} - \lambda}{\lambda_{n0}^0}, \quad (13)$$



где  $\lambda_{n0}^{01} = \begin{cases} \lambda_{n0}^0, & \text{если } \lambda_{n0}^0 \neq 0, \\ 1, & \text{если } \lambda_{n0}^0 = 0, \end{cases}$   $A_0 = (-1)^\sigma \frac{1}{\sigma!} \left( \frac{\partial^\sigma}{\partial \lambda^\sigma} \Delta_0^0(\lambda, G) \right)_{|\lambda=0}$ ,  $\sigma \geq 0$  — кратность нулевого собственного значения задачи  $L_0^0(G)$ .

Функции  $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G)$  имеют аналогичные свойства. В частности,

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G) = O\left(|\rho|^{\gamma-r} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r d_j\right)\right), \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G) = A_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma} - \lambda}{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}^{01}}, \quad (14)$$

где  $\{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0\}_{n \geq 1}$  — собственные значения задачи  $L_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0(G)$  с нулевым потенциалом,

$$\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}^{01} = \begin{cases} \lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0, & \text{если } \lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0 \neq 0, \\ 1, & \text{если } \lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0 = 0, \end{cases}$$

$$A_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} = (-1)^{\sigma(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)} \frac{1}{\sigma(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)} \left( \frac{\partial^{\sigma(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}}{\partial \lambda^{\sigma(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}} \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0(\lambda, G) \right)_{|\lambda=0},$$

$\sigma(\nu_1, \dots, \nu_\gamma) \geq 0$  — кратность нулевого собственного значения задачи  $L_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0(G)$ , и  $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0(\lambda, G)$  — характеристическая функция для  $L_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^0(G)$ .

## 2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В этом разделе приводится конструктивная процедура решения обратной задачи 1 и устанавливается его единственность. Зафиксируем  $k = \overline{1, p}$  и рассмотрим сначала вспомогательную обратную задачу на ребре  $e_k$ , которую будем называть IP(k).

**IP(k).** Дана  $M_k(\lambda)$ , построить  $q_k(x_k)$ ,  $x_k \in [0, d_k]$ .

В задаче IP(k) потенциал строится только на ребре  $e_k$ , но функция Вейля  $M_k(\lambda)$  несет глобальную информацию со всего графа. Другими словами, IP(k) не является локальной задачей на  $e_k$ . Справедлива следующая теорема единственности решения задачи IP(k).

**Теорема 2.** *Фиксируем  $k = \overline{1, p}$ . Если  $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$ , то  $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$  п.в. на  $[0, d_k]$ . Таким образом, задание функции Вейля  $M_k$  однозначно определяет потенциал  $q_k$  на ребре  $e_k$ .*

Используя метод спектральных отображений [1] для оператора Штурма – Лиувилля на ребре  $e_k$ , можно построить конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k). Здесь мы дадим краткие пояснения [1]. Возьмем  $\tilde{q} = 0$ . Тогда  $\tilde{S}_k(x_k, \lambda) = \frac{1}{\rho} \sin \rho x_k$ . Фиксируем  $k = \overline{1, p}$ . Обозначим  $\lambda' = \min_{l \geq 1} (\lambda_{l0}, \tilde{\lambda}_{l0})$  и возьмем фиксированное  $\delta > 0$ . В  $\lambda$ -плоскости рассмотрим контур  $\theta$  (с обходом против часовой стрелки) вида  $\theta = \theta^+ \cup \theta^- \cup \theta'$ , где  $\theta^\pm = \{\lambda : \pm \text{Im } \lambda = \delta; \text{Re } \lambda \geq \lambda'\}$ ,  $\theta' = \{\lambda : \lambda - \lambda' = \delta \exp(i\alpha), \alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)\}$ . При каждом фиксированном  $x_k \in [0, d_k]$  функция  $S_k(x_k, \lambda)$  является единственным решением линейного интегрального уравнения:

$$S_k(x_k, \lambda) = \tilde{S}_k(x_k, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta} \tilde{D}_k(x_k, \lambda, \mu) S_k(x_k, \mu) d\mu, \quad (15)$$

где  $\tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \tilde{S}_k(t, \lambda) \tilde{S}_k(t, \mu) \hat{M}_k(\mu) dt$ ,  $\hat{M}_k(\mu) := M_k(\mu) - \tilde{M}_k(\mu)$ . Потенциал  $q_k$  на ребре  $e_k$  может быть построен из решения уравнения (15) по формуле

$$q_k(x_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta} (S_k(x_k, \lambda) \tilde{S}_k(x_k, \lambda))' \hat{M}_k(\lambda) d\lambda,$$

или  $q_k(x_k) = \lambda + S_k''(x_k, \lambda) / S_k(x_k, \lambda)$ .

Обозначим  $a(\lambda) := d(\lambda) + 2$ , т.е.  $a(\lambda) = C_0(d_0, \lambda) + S_0'(d_0, \lambda)$ . Рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре  $e_0$ , которую будем называть IP(0).

**IP(0).** Даны  $a(\lambda), a_1(\lambda), \Omega$ , построить  $q_0(x_0)$ ,  $x_0 \in [0, d_0]$ .



Эта обратная задача изучалась в работах [10–11] и других. Для удобства читателей приведем здесь решение задачи IP(0). Ясно, что

$$S'_0(d_0, z_n) = (a(z_n) - H(z_n))/2. \quad (16)$$

Так как  $\langle C_0(d_0, \lambda), S_0(d_0, \lambda) \rangle \equiv 1$ , то  $H^2(\lambda) - a^2(\lambda) = -4(1 + C'_0(d_0, \lambda)a_1(\lambda))$ , и следовательно,

$$H(z_n) = \omega_n \sqrt{a^2(z_n) - 4}. \quad (17)$$

Обозначим  $\alpha_n := \int_0^{d_0} S_0^2(t, z_n) dt$ . Тогда (см. [1])

$$\alpha_n = \dot{a}_1(z_n)S'_0(d_0, z_n), \quad \dot{a}_1(\lambda) := \frac{da_1(\lambda)}{d\lambda}. \quad (18)$$

Числа  $\{z_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$  называются спектральными данными для потенциала  $q_0$ . Известно [1], что функция  $q_0$  однозначно строится по спектральным данным  $\{z_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ . Таким образом, задача IP(0) решена, и справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Задание  $a(\lambda), a_1(\lambda), \Omega$  однозначно определяет потенциал  $q_0(x_0)$  на  $[0, d_0]$ . Функция  $q_0$  может быть построена по следующему алгоритму.*

**Алгоритм 1.** Даны  $a(\lambda), a_1(\lambda), \Omega$ .

1. Находим  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  – нули  $a_1(\lambda)$ .
2. Вычисляем  $H(z_n)$  по формуле (17).
3. Находим  $S'_0(d_0, z_n)$  по (16).
4. Вычисляем  $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ , используя (18).
5. Строим  $q_0$  по спектральным данным  $\{z_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ , решая классическую обратную задачу Штурма – Лиувилля.

Перейдем теперь к решению обратной задачи 1. Пусть даны  $\Lambda_j, j = \overline{0, p}, \Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}, \gamma = \overline{2, N}, 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p, \nu_j \in \xi$ , и  $\Omega$ . Решение обратной задачи 1 состоит в реализации так называемых  $D_\mu$ -процедур последовательно при  $\mu = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0$  где  $\sigma$  – высота  $T$ . Опишем  $D_\mu$  – процедуры.

**$D_\sigma$ -процедура**

1. Строим  $\Delta_0(\lambda, G)$  и  $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\lambda, G), \gamma = \overline{1, N}, 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p, \nu_j \in \xi$  по формулам (13) и (14).
2. При каждом  $k = \overline{1, p}$  вычисляем функцию Вейля  $M_k(\lambda)$  по формуле (10).
3. Для каждого ребра  $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$  решаем обратную задачу IP(k) и находим  $q_k(x_k), x_k \in [0, d_k]$  на ребре  $e_k$ .
4. Для каждого ребра  $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$  строим  $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda), S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda), \nu = 0, 1$ .
5. Для каждой фиксированной вершины  $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$  выберем и зафиксируем  $s$  и  $j$  так, чтобы  $e_j \in E \cap T_{ks}$ . Решая линейную алгебраическую систему (11)–(12), находим  $\Delta_0(\lambda, G_k)$  и  $\Delta_k(\lambda, G_k)$ .
6. Для каждой  $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$  строим функцию Вейля  $M_k(\lambda)$  для  $G_k$  по формуле

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda, G_k)}{\Delta_0(\lambda, G_k)}. \quad (19)$$

Теперь выполним  $D_\mu$ -процедуры при  $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$  по индукции. Зафиксируем  $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$  и предположим, что  $D_\sigma, \dots, D_{\mu+1}$ -процедуры уже выполнены. Выполним  $D_\mu$ -процедуру.

**$D_\mu$ -процедура**

1. Для каждого ребра  $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$  решаем обратную задачу IP(k) на  $G_k$  и находим  $q_k(x_k), x_k \in [0, d_k]$  на ребре  $e_k$ .
2. Для каждого ребра  $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$  вычисляем  $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda), S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda), \nu = 0, 1$ .
3. Для каждой вершины  $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$  выберем и зафиксируем  $s$  и  $j$  так, чтобы  $e_j \in E \cap T_{ks}$ . Решая линейную алгебраическую систему (11)–(12), находим  $\Delta_0(\lambda, G_k)$  и  $\Delta_k(\lambda, G_k)$ .
4. Для каждой вершины  $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$  вычисляем  $M_k(\lambda)$  для  $G_k$  по формуле (19).



### **D<sub>1</sub>-процедура**

1. Для каждого ребра  $e_k \in \mathcal{E}^{(1)}$  решаем обратную задачу IP(k) на  $G_k$  и находим  $q_k(x_k)$ ,  $x_k \in [0, d_k]$  на ребре  $e_k$ .
2. Для каждого ребра  $e_k \in \mathcal{E}^{(1)}$  вычисляем  $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$ ,  $S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$ ,  $\nu = 0, 1$ .
3. Находим  $d(\lambda)$  и  $a_1(\lambda)$ , используя (6) и (9).
4. Строим  $a(\lambda) = d(\lambda) + 2$ .

### **D<sub>0</sub>-процедура**

Используя  $a(\lambda)$ ,  $a_1(\lambda)$  и  $\Omega$ , строим  $q_0(x_0)$ ,  $x_0 \in [0, d_0]$  на  $e_0$  по алгоритму 1.

Таким образом, последовательно выполнив  $D_\sigma, D_{\sigma-1}, \dots, D_0$ -процедуры, получили решение обратной задачи 1 и доказали его единственность.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).*

### **Библиографический список**

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
2. Belishev M.I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. V. 20. P. 647–672.
3. Yurko V.A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. V. 21. P. 1075–1086.
4. Yurko V.A. Recovering differential pencils on compact graphs // J. Diff. Equations. 2008. V. 244. P. 431–443.
5. Юрко В.А. Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях // Мат. заметки. 2008. Т. 83, вып.1. С. 139–152.
6. Yurko V.A. Recovering Sturm-Liouville operators on trees from spectra. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, SM-DU-684. Duisburg: Universitaet Duisburg-Essen, 2009. 8 p.
7. Yurko V.A. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on graphs with a cycle // Operators and Matrices. 2008. V. 2, № 4. P. 543–553.
8. Юрко В.А. Об обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов на графе-еже // Докл. АН. 2009. Т.425, № 4. С. 466–470.
9. Yurko V.A. Spectral analysis for Sturm-Liouville operators on a graph with a rooted cycle. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik. SM-DU-686. Duisburg: Universitaet Duisburg-Essen, 2009. 10 p.
10. Станкевич И.В. Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.
11. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. 1975. Т. 97. С. 540–606.