



Сопоставляя (4.1), (4.2) с (2.5), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть $a > 0$ и $\delta_N^2 n^4 \leq a$. Тогда существует постоянная $c(a) > 0$ такая, что

$$|\hat{p}_n(x)| \leq c(a) \left(\delta_N n^{5/2} + 1 \right) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

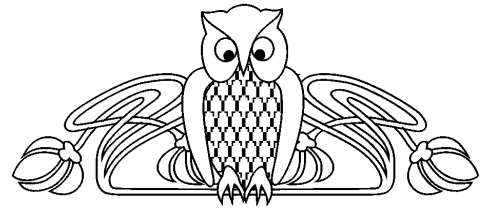
В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И.И. Шарапудинову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. Даугавет И.К., Рафальсон С.З. О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестник Ленингр. ун-та. 1974. № 19. С. 18–24.
2. Сега Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
3. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. С. 244–271.
4. Конягин С.В. О неравенстве В.А. Маркова для многочленов в метрике L // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1980. № 145. С. 117–125.
5. Шарапудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: Изд-во ДНЦ, 2004. С. 35–36.

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНЫХ УЗЛОВЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА



В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

On Inverse Nodal and Spectral Problems for Boundary Value Problems with Discontinuity Conditions Inside the Interval

V.A. Yurko

Получено решение обратных узловых и обратных спектральных задач для дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала, выявлены связи между этими двумя классами обратных задач.

The solution of inverse nodal and inverse spectral problems is presented for second-order differential operators on a finite interval with discontinuity conditions inside the interval. Connections between these two classes of inverse problems are established.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуются обратные узловых и обратных спектральных задачи для дифференциальных операторов. Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в естествознании и технике (см., например, [1]–[4] и список литературы в них). Обратные узловых задачи заключаются в построении операторов по заданным узлам (нулям) собственных функций [5]–[7]. В данной работе получены результаты по обратным спектральным и узловым задачам для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала, а также выявлены тесные связи между этими двумя классами обратных задач.

Рассмотрим краевую задачу $B = B(q)$ для уравнения Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (1)$$

на конечном интервале $0 < x < T$ с краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = y(T) = 0 \quad (2)$$

и с условиями разрыва

$$y(T/2 + 0) = a_1 y(T/2 - 0), \quad y'(T/2 + 0) = a_1^{-1} y'(T/2 - 0) + a_2 y(T/2 - 0). \quad (3)$$



Здесь λ – спектральный параметр, $q(x) \in L(0, T)$, a_1, a_2 – вещественны, $a_1 > 0$. Не нарушая общности, в дальнейшем считаем, что $\int_0^T q(x) dx = 0$.

Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала связаны с разрывными свойствами среды. Например, разрывные обратные задачи встречаются в радиоэлектронике при синтезе параметров неоднородных линий передач с заданными техническими характеристиками [8]–[9]. Спектральная информация может быть использована для восстановления коэффициентов, характеризующих свойства одномерных разрывных сред [10]–[11]. Краевые задачи с условиями разрыва во внутренней точке появляются также в геофизических моделях земного шара [12]–[13]. Разрывные обратные задачи в различных постановках рассматривались в [14]–[17] и других работах.

2. ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В этом разделе исследуется так называемая неполная обратная задача восстановления потенциала $q(x)$ по заданной части спектра краевой задачи B вида (1)–(3). При этом предполагается, что потенциал известен априори на части интервала. Получены условия согласования искомой части спектра с величиной интервала восстановления потенциала. Отметим, что в общем случае для восстановления $q(x)$ на всем интервале $(0, T)$ необходимо задание двух спектров краевых задач с различными краевыми условиями на одном из концов интервала [17].

Лемма 1. *Краевая задача B имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$. Все собственные значения являются простыми вещественными и при $n \rightarrow \infty$*

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{T} + \frac{1}{2\pi n} \left(\omega + (-1)^{n-1} \omega_1 \right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4)$$

$$\text{где } \omega = \int_0^T q(t) dt + \frac{a_2}{b_1}, \quad \omega_1 = \frac{b_2}{b_1} \left(\int_0^T q(t) dt - 2 \int_0^{T/2} q(t) dt \right) + \frac{a_2}{b_1}, \quad b_1 = \frac{a_1 + a_1^{-1}}{2}, \quad b_2 = \frac{a_1 - a_1^{-1}}{2}.$$

Доказательство. Пусть $S(x, \lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$ и условиям склейки (3). Пусть $\lambda = \rho^2, \tau := \text{Im } \rho$. При $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по x имеют место асимптотические формулы [17]:

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} - \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} \int_0^x q(t) dt + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau|x)\right), \quad x < \frac{T}{2}, \quad (5)$$

$$S(x, \lambda) = \left(b_1 \frac{\sin \rho x}{\rho} + b_2 \frac{\sin \rho(T-x)}{\rho} \right) + \left(f_1(x) \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} + f_2(x) \frac{\cos \rho(T-x)}{2\rho^2} \right) + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau|x)\right), \quad x > \frac{T}{2}, \quad (6)$$

где

$$f_1(x) = -b_1 \int_0^x q(t) dt - a_2, \quad f_2(x) = b_2 \left(\int_0^x q(t) dt - 2 \int_0^{T/2} q(t) dt \right) + a_2.$$

Обозначим $\Delta(\lambda) := S(T, \lambda)$. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой аналитической по λ порядка $1/2$, и ее нули $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ совпадают с собственными значениями краевой задачи B . Из (6) вытекает, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$\Delta(\lambda) = b_1 \left(\frac{\sin \rho T}{\rho} - \omega \frac{\cos \rho T}{2\rho^2} + \frac{\omega_1}{2\rho^2} \right) + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau|T)\right). \quad (7)$$

Используя (7) и теорему Руше [18], известным методом (см, например, [4]) получаем

$$\rho_n = \frac{\pi n}{T} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Подставляя это выражение в (7), приходим к (4). Так как краевая задача B является самосопряженной, то все собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ являются вещественными и простыми. \square

Наряду с B рассмотрим краевую задачу $\tilde{B} = B(\tilde{q})$ того же вида, но с другим потенциалом \tilde{q} . Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче B , то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче \tilde{B} .



Теорема 1. Зафиксируем $b \in (0, T/2)$. Пусть $\Lambda \subset \mathbf{N}$ – подмножество натуральных чисел, а $\Omega := \{\lambda_n\}_{n \in \Lambda}$ – часть спектра задачи B такая, что система функций $\{\cos 2\rho_n x\}_{n \in \Lambda}$ полна в $L_2(0, b)$. Пусть $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на (b, T) , $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$.

Доказательство. Обозначим $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$. Так как

$$\begin{aligned} -S''(x, \lambda) + q(x)S(x, \lambda) &= \lambda S(x, \lambda), & -\tilde{S}''(x, \lambda) + \tilde{q}(x)\tilde{S}(x, \lambda) &= \lambda \tilde{S}(x, \lambda), \\ S(0, \lambda) = \tilde{S}(0, \lambda) &= 0, & \langle S(x, \lambda), \tilde{S}(x, \lambda) \rangle_{x=T/2+0} &= \langle S(x, \lambda), \tilde{S}(x, \lambda) \rangle_{x=T/2-0}, \end{aligned}$$

то

$$\int_0^T r(x)S(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda) dx = S'(T, \lambda)\tilde{S}(T, \lambda) - S(T, \lambda)\tilde{S}'(T, \lambda),$$

где $r(x) = q(x) - \tilde{q}(x)$. Используя условия теоремы, получаем

$$\int_0^b r(x)S(x, \lambda_n)\tilde{S}(x, \lambda_n) dx = 0, \quad n \in \Lambda. \quad (8)$$

При $x \leq T/2$ справедливо представление (см. [1], [2], [4]):

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt,$$

где $K(x, t)$ – непрерывная функция, не зависящая от λ . Следовательно,

$$2\rho^2 S(x, \lambda)\tilde{S}(x, \lambda) = 1 - \cos 2\rho x - \int_0^x V(x, t) \cos 2\rho t dt, \quad (9)$$

где $V(x, t)$ – непрерывная функция, не зависящая от λ и выражающаяся через $K(x, t)$ и $\tilde{K}(x, t)$. Подставляя (9) в (8) и учитывая соотношение $\int_0^T r(x) dx = 0$, получаем

$$\int_0^b \left(r(x) + \int_x^b V(t, x)r(t) dt \right) \cos 2\rho_n x dx = 0, \quad n \in \Lambda,$$

и, следовательно,

$$r(x) + \int_x^b V(t, x)r(t) dt = 0 \quad \text{п.в. на } (0, b).$$

Так как однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет только нулевое решение, то отсюда заключаем, что $r(x) = 0$, п.в. на $(0, b)$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, b)$. \square

3. ОБРАТНАЯ УЗЛОВАЯ ЗАДАЧА

В первой части этого раздела получены теоремы единственности и процедура восстановления потенциала $q(x)$ на всем интервале $(0, T)$ по всюду плотному подмножеству узловых точек. Во второй части раздела выявлены связи между обратными спектральными и обратными узловыми задачами. С использованием этих связей, в частности, доказано, что при некоторых дополнительных условиях потенциал $q(x)$ может быть восстановлен на всем отрезке $(0, T)$ по подмножеству узловых точек, расположенных только на части отрезка. При исследовании этой неполной обратной узловой задачи используются результаты предыдущего параграфа по обратным спектральным задачам.

Собственные функции задачи B имеют вид $y_n(x) = S(x, \lambda_n)$. Отметим, что $y_n(x)$ являются вещественнозначными функциями. Подставляя (4) в (5)–(6), получаем асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x :

$$\rho_n y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{T} x + \frac{1}{2\pi n} \left(-T \int_0^x q(t) dt + \omega x + (-1)^{n-1} \omega_1 x \right) \cos \frac{\pi n}{T} x + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x < \frac{T}{2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho_n y_n(x) &= (b^+ + (-1)^{n-1} b^-) \sin \frac{\pi n}{T} x + \frac{1}{2\pi n} \left(T f_1(x) + (-1)^n T f_2(x) + \right. \\ &\left. + b^+ (\omega + (-1)^{n-1} \omega_1) x + b^- (\omega + (-1)^{n-1} \omega_1) (T - x) \right) \cos \frac{\pi n}{T} x + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x > \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$



Для краевой задачи B справедлив аналог теоремы Штурма об осцилляции. Точнее, собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $n - 1$ (простых) нулей внутри интервала $(0, T)$: $0 < x_n^1 < \dots < x_n^{n-1} < T$. Множество $X_B := \{x_n^j\}_{n \geq 2, j=1, n-1}$ называется множеством узловых точек краевой задачи B . Определим $x_n^0 := 0, x_n^n := T$.

Обратная узловая задача заключается в построении потенциала $q(x)$ по заданному множеству X_B узловых точек или некоторой его части. Обозначим $X_B^k := \{x_{2m-k}^j\}_{m \geq 1, j=1, 2m-k-1}, k = 0, 1$. Множества X_B^k являются всюду плотными на $(0, T)$ и $X_B^0 \cup X_B^1 = X_B$.

Учитывая (10)–(11), получаем асимптотические формулы для узловых точек при $n \rightarrow \infty$ равномерно по j :

$$\begin{aligned} x_n^j &= \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2} \left(T \int_0^{jT/n} q(t) dt - \frac{(\omega - \omega_1)jT}{n} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad x_n^j \in (0, T/2), \quad n = 2m, \\ x_n^j &= \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2} \left(T \int_0^{jT/n} q(t) dt - \frac{(\omega + \omega_1)jT}{n} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad x_n^j \in (0, T/2), \quad n = 2m - 1, \\ x_n^j &= \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2} \left(T \int_0^{jT/n} q(t) dt - \frac{(\omega - \omega_1)jT}{n} + c_0 \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad x_n^j \in (T/2, T), \quad n = 2m, \\ x_n^j &= \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2} \left(T \int_0^{jT/n} q(t) dt - \frac{(\omega + \omega_1)jT}{n} + c_1 \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad x_n^j \in (T/2, T), \quad n = 2m - 1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2Tb_2}{b_1 - b_2} \int_0^{T/2} q(t) dt - \frac{Tb_2(\omega - \omega_1)}{b_1 - b_2}, \\ c_1 &= -\frac{2Tb_2}{b_1 + b_2} \int_0^{T/2} q(t) dt + \frac{Tb_2(\omega + \omega_1)}{b_1 + b_2} + \frac{2Ta_2}{b_1 + b_2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Используя вышеприведенные асимптотические формулы, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$ и $x \in [0, T]$. Пусть последовательность $\{x_n^{j_n}\} \in X_B^k$ выбрана так, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{j_n} = x$. Тогда существует конечный предел*

$$g_k(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi^2 n}{T^2} (x_n^{j_n} n - j_n T), \tag{13}$$

причем

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \int_0^x q(t) dt - \frac{\omega + (-1)^{k+1} \omega_1}{T} x, \quad x \leq \frac{T}{2}, \\ g_k(x) &= \int_0^x q(t) dt - \frac{\omega + (-1)^{k+1} \omega_1}{T} x + c_k, \quad x \geq \frac{T}{2}, \end{aligned} \tag{14}$$

где c_0 и c_1 определяются по формулам (12).

Приведем теперь теорему единственности и процедуру решения обратной узловой задачи.

Теорема 3. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$. Пусть $X \subset X_B^k$ – всюду плотное на $(0, T)$ подмножество узловых точек. Пусть $X = \tilde{X}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$. Таким образом, задание множества X однозначно определяет потенциал $q(x)$ на $(0, T)$. При этом функция $q(x)$ может быть построена по формуле*

$$q(x) = g'_k(x) - \frac{1}{T} (g_k(T) - g_k(0)), \tag{15}$$

где $g_k(x)$ вычисляется по формуле (13).

Доказательство. Формула (15) следует из (14) и соотношения $\int_0^T q(x) dx = 0$. Если $X = \tilde{X}$, то из (13) вытекает, что $g_k(x) \equiv \tilde{g}_k(x), x \in [0, T]$. В силу (15) это дает $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$. \square

Аналогичным образом доказывается следующее более общее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $X \subset X_B$ – всюду плотное на $(0, T)$ подмножество узловых точек. Пусть $X = \tilde{X}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$.*



Перейдем теперь к исследованию неполной узловой задачи, когда узловые точки заданы лишь на части интервала. Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Зафиксируем n, j . Пусть $x_n^j = \tilde{x}_n^j$, $x_n^{j+1} = \tilde{x}_n^{j+1}$ и пусть $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на (x_n^j, x_n^{j+1}) . Тогда $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$.*

Доказательство. На интервале $x \in (x_n^j, x_n^{j+1})$ рассмотрим краевую задачу B_{nj} для уравнения (1) с условиями склейки (3) (если $T/2 \in (x_n^j, x_n^{j+1})$) и крайвыми условиями Дирихле $y(x_n^j) = y(x_n^{j+1}) = 0$. Функция $y_n(x) = S(x, \lambda_n)$ является собственной функцией краевой задачи B и одновременно является собственной функцией задачи B_{nj} . Так как $y_n(x)$ не имеет нулей при $x \in (x_n^j, x_n^{j+1})$, то λ_n является первым собственным значением задачи B_{nj} , а $y_n(x)$ – первой собственной функцией. Так как $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на (x_n^j, x_n^{j+1}) , то $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$. \square

Для $X \subset X_B$ обозначим $\Lambda_X := \{n : \exists j x_n^j \in X\}$.

Определение 1. Пусть $X \subset X_B$. Множество X называется *сдвоенным*, если вместе с любой своей точкой x_n^j множество X содержит по крайней мере одну из соседних узловых точек x_n^{j-1} и/или x_n^{j+1} .

Теорема 5. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$ и $b \in (0, T/2)$. Пусть $X \subset X_B^k \cap (b, T)$ – всюду плотное на (b, T) сдвоенное подмножество узловых точек такое, что система функций $\{\cos 2\rho_n x\}_{n \in \Lambda_X}$ полна в $L_2(0, b)$. Пусть $X = \tilde{X}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$.*

Доказательство. Так как $X = \tilde{X}$, то по теореме 3 $g_k(x) \equiv \tilde{g}_k(x)$ при $x \in (b, T)$, и, следовательно, $g'_k(x) = \tilde{g}'_k(x)$ п.в. на (b, T) . Вместе с (14) это дает $q(x) - \tilde{q}(x) = d$ п.в. на (b, T) , где d константа. Обозначим $q_0(x) := \tilde{q}(x) + d$, $x \in (0, T)$. Тогда $q(x) = q_0(x)$ п.в. на (b, T) . Пусть $\{\lambda_n^0\}_{n \geq 1}$ – спектр задачи $B(q_0)$. По лемме 2 $\lambda_n = \lambda_n^0$ при $n \in \Lambda_X$. Применяя теорему 1, получаем $q(x) = q_0(x)$ п.в. на $(0, T)$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x) + d$ п.в. на $(0, T)$. Учитывая соотношение $\int_0^T q(t) dt = \int_0^T \tilde{q}(t) dt = 0$, вычисляем $d = 0$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

Библиографический список

1. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. Yurko V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
4. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
5. McLaughlin J.R. Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness result // J. Differ. Equat. 1988. V.73. P.354–362.
6. Shen C.L., Tsai T.M. On a uniform approximation of the density function of a string equation using EVs and nodal points and some related inverse nodal problems // Inverse Problems. 1995. V. 11, № 5. P. 1113–1123.
7. Law C.K., Yang C.-F. Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data // Inverse Problems. 1988. V. 14, № 2. P. 299–312.
8. Литвиненко О.Н., Сошников В.И. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1964.
9. Мещанов В.П., Фельдштейн А.Л. Автоматизированное проектирование направленных ответвителей СВЧ. М.: Связь, 1980.
10. Shepelsky D.G. The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions // Spectral operator theory and related topics. Advances in Soviet Math. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. P. 209–232.
11. Krueger R.J. Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties // J. Math. Phys. 1982. V. 23, № 3. P. 396–404.
12. Anderssen R.S. The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1997. V. 50. P. 303–309.
13. Lapwood F.R., Usami T. Free Oscillations of the Earth. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
14. Hald O.H. Discontinuous inverse eigenvalue problems // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 539–577.
15. Freiling G., Yurko V.A. Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. 757–773.
16. Юрко В.А. О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала // Диф. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1139–1140.
17. Yurko V.A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems // Integral Transforms and Special Functions. 2000. V. 10, № 2. P. 141–164.
18. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967.