УДК 532.529

Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси

В. Ш. Шагапов, М. Н. Галимзянов, У. О. Агишева

Шагапов Владислав Шайхулагзамович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71, shagapov@rambler.ru

Галимзянов Марат Назипович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71, monk@anrb.ru

Агишева Ульяна Олеговна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71, agisheva_u@mail.ru

Нелинейные волновые процессы в двухфазной среде (пузырьковой жидкости) не теряют актуальности как объект исследования в силу широкого распространения в различных областях физики, техники, химической и нефтегазовой промышленности. В последние десятилетия скачок развития вычислительной техники расширил возможности в исследовании существенно нелинейных задач. Целью данной работы стало получение стационарного решения уравнений, описывающих движение уединенной волны в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов. Было рассмотрено одномерное стационарное течение жидкости с газовыми пузырьками при следующих предположениях: смесь монодисперсная, т.е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса; вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков. Кроме того, предполагается, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости постоянна, в отличие от температуры газа в пузырьке. Последнее всегда выполняется при не очень высоких давлениях из-за преобладающего массового содержания жидкости (что позволяет считать ее термостатом) и существенно упрощает задачу, так как отпадает необходимость рассмотрения уравнения энергии жидкости. Давление в пузырьке предполагалось однородным, что обеспечивается, если радиальная скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе. Давление фаз и размер пузырьков были связаны условием совместного деформирования. В качестве такого условия в данном случае принималось уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного сферического пузырька в безграничной несжимаемой жидкости. Для поведения газа в пузырьках был принят политропический закон. На основе одномерных стационарных уравнений течения жидкости с газовыми пузырьками построено решение типа «уединенная волна», частным случаем которого для слабых солитонов являются результаты, полученные на основе модели Кортевега – де Вриза для пузырьковых сред.

Ключевые слова: уединенная волна, солитон, пузырьковая жидкость.

Поступила в редакцию: 12.03.2019 / Принята: 08.08.2019 / Опубликована: 01.06.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена аналитическому описанию нелинейного движения пузырьковой среды без учета диссипативных процессов. На основе одномерных стационарных уравнений течения жидкости с газовыми пузырьками построено решение типа «уединенная волна», частным случаем которого для слабых солитонов являются результаты, полученные на основе модели Кортевега – де Вриза для пузырьковых сред.

Нелинейные волновые процессы в двухфазной среде (пузырьковой жидкости) не теряют актуальности как объект исследования в силу широкого распространения в различных областях физики, техники, химической и нефтегазовой промышленности. В [1–3] подробно описаны аналитические, численные и экспериментальные исследования динамики акустических волн в жидкости с пузырьками. В последние десятилетия скачок развития вычислительной техники расширил возможности в исследовании существенно нелинейных задач. Но численные методы требуют верификации результатов, и аналитически построенные решения классических систем уравнений подходят для этой цели.

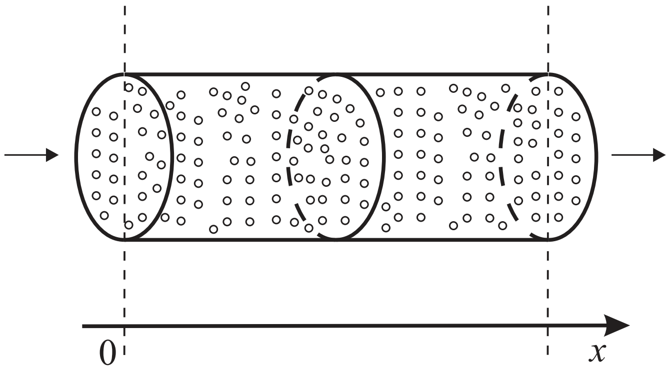
В работе [4] проведено сравнение трех различных численных моделей учета нелинейности при распространении волн в пузырьковой жидкости. Показано, что нелинейность газовых включений имеет определяющее значение, в длинноволновом приближении полулинейная гамильтонова модель является самодостаточной замкнутой моделью Кортевега – де Вриза, которая точно решается аналитическим методом обратной задачи рассеяния. В [5] проанализировано влияние вязкости и процесса теплообмена на межфазной границе на волновые процессы в пузырьковой жидкости. Построено семейство нелинейных эволюционных уравнений для описания волн давления в газожидкостной смеси. Построены точные решения полученных уравнений. В работах [6, 7] показано, что точные солитоноподобные решения эволюционных уравнений нелинейной волновой механики можно получать прямым методом возмущений на основе решения линеаризованного уравнения.

Авторами настоящей статьи был проведен ряд численных расчетов по распространению двумерных волн в пузырьковых и пенных структурах [8–11]. В [8] изучались особенности эволюции двумерных волн в жидкости, содержащей область с пузырьками газа, были установлены критерии усиления и ослабления сигнала. В [9] в двумерной постановке для случая цилиндрической симметрии численно исследован процесс формирования и распространения ударных волн в пузырьковых и пенных структурах, проведено сравнение с экспериментом. Особенности ударного и изоэнтропического воздействия на газожидкостные среды исследованы в [10] с использованием широкодиапазонного уравнения состояния воды и пара. На основе соотношений Рэнкина – Гюгонио получены параметры падающих и отраженных ударных волн в газожидкостной среде для случаев изотермического, адиабатического и ударного сжатий газовой компоненты. В [11] изучено распространение слабых возмущений в водовоздушной пузырьковой среде в условиях, когда в пузырьках помимо нерастворимого в воде газа присутствуют пары воды. Проанализировано влияние начальных параметров двухфазной смеси на эволюцию гармонических волн в пузырьковой жидкости. Данная работа является продолжением цикла работ [12, 13].

Цель настоящей работы — получение стационарного решения уравнений, описывающих движение уединенной волны в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов. Результаты аналитического построения существенно нелинейного солитонного решения расширят знания в области механики многофазных систем и могут быть использованы для тестирования численных моделей.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим одномерное стационарное течение жидкости с газовыми пузырьками при следующих предположениях: смесь монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса; вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков. Такое течение, например, может возникнуть при ламинарном движении пузырьковой жидкости в канале постоянного сечения, когда влияние стенок канала на внутриканальные процессы отсутствует (рисунок).



Схематическое изображение одномерного стационарного течения
Schematic representation of a one-dimensional stationary flow

Кроме того, предполагается, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости T_ℓ постоянна, в отличие от температуры газа в пузырьке. Последнее ($T_\ell = T_0 = \mathrm{const}$) всегда выполняется при не очень высоких давлениях из-за преобладающего массового содержания жидкости (что позволяет считать ее термостатом) и существенно упрощает задачу, так как отпадает необходимость рассмотрения уравнения энергии жидкости.

Расчеты [14] показывают, что даже при очень сильном сжатии пузырька ($p_\ell/p_0 \sim 10$), когда в центре пузырька реализуются высокие значения температуры (газа), температура поверхности пузырька повышается незначительно ($T_a \approx 1.1T_0$). Давление в пузырьке достигает при этом значений, многократно превосходящих парциальное давление насыщенных паров, соответствующее таким значениям температуры поверхности пузырька. Это обстоятельство свидетельствует в пользу допущения о несущественности межфазного массообмена.

Для рассматриваемой смеси в рамках представлений сплошной среды запишем дифференциальные уравнения сохранения массы каждой фазы, числа пузырьков и импульса всей смеси в одномерном стационарном движении:

$$\frac{d(\rho_i \upsilon)}{dx} = 0, \quad \frac{d(n\upsilon)}{dx} = 0, \quad \rho\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} + \frac{dp_\ell}{dx} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_\ell + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3}\pi a^3 n, \quad \rho = \rho_\ell + \rho_g,$$

где индекс $i = \ell$ и g относится соответственно к параметрам жидкости и газа, a – радиус пузырька.

Уравнения состояния фаз примем в виде

$$p_g = \rho_g^0 B T_g, \quad u_g = c_{vg} T_g, \quad \rho_\ell^0 = \mathrm{const}.$$

Для удобства использования уравнения теплопроводности внутри пузырька запишем его в переменных Лагранжа:

$$\rho_g^0 c_{pg} \upsilon \frac{dT_g}{dx} = \frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0 \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_g \frac{\rho_g^0 r^4}{\rho_{g0}^0 \xi^2} \cdot \frac{\partial T_g}{\partial \xi} \right) + \upsilon \frac{dp_g}{dt}, \tag{2}$$

где r — сферическая эйлерова координата, $0 \leqslant r \leqslant a(x)$; ξ — лагранжева координата, $0 \leqslant \xi \leqslant a_0$. Для малых объемных содержаний газа ($\alpha_g < 0.1$) и не очень сильных волн ($p_\ell / p_0 \leqslant 10$), как показано в [14], граничное условие на поверхности пузырька можно представить в виде $T_g = T_0 = \text{const}$, так как обычно жидкость обладает значительно большей теплопроводностью и значительно меньшей температуропроводностью, чем газ.

Из микроуравнения неразрывности для газа внутри пузырьков в лагранжевых координатах имеем

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\rho_{g0}^0 \xi^2}{\rho_g^0 r^2}.$$

Давление в пузырьке предполагается однородным (гомобаричность [15]), что обеспечивается, если радиальная скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе.

Уравнение для давления, являющееся интегралом уравнения (2) при сделанных допущениях и граничных условиях, имеет вид

$$\upsilon \frac{dp_g}{dx} = -3\gamma p_g \frac{w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \quad w = \upsilon \frac{da}{dx}, \quad q = -\lambda_0 \left(\frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0} \frac{\partial T_g}{\partial \xi} \right)_{a_0},$$

где q — поток тепла из пузырька в жидкость, w — радиальная скорость стенок пузырька.

Давление фаз и размер пузырьков должны быть связаны условием совместного деформирования. Таким условием в данном случае является уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного сферического пузырька в безграничной несжимаемой жидкости. Для рассматриваемого случая оно имеет вид

$$a\upsilon \frac{dw}{dx} + \frac{3}{2} w^2 + 4\nu_\ell \frac{w}{a} = \left(p_g - p_\ell - \frac{2\sigma}{a} \right) / \rho_\ell^0. \tag{3}$$

Уравнения (1) полностью интегрируются. Интегралы запишем в виде

$$\rho_\ell \upsilon = \rho_{\ell 0} \upsilon_0, \quad \rho_g \upsilon = \rho_{g0} \upsilon_0, \quad n\upsilon = n_0 \upsilon_0, \quad \rho \upsilon^2 + p_\ell = \rho_0 \upsilon_0^2 + p_0. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем индекс (0) внизу относится к равновесному состоянию перед волной.

Отметим, что при умеренных давлениях $p_\ell \sim 10^{-1} \div 10$ МПа отношение истинных плотностей фаз $\rho_g^0 / \rho_\ell^0 \ll 1$ (при $p_\ell \sim 10^{-1}$ МПа имеем $\rho_g^0 / \rho_\ell^0 \sim 10^{-3}$). В этом случае массовым содержанием газа можно пренебречь по сравнению с ρ_ℓ (т. е. можно положить $\rho \approx \rho_\ell$). В настоящей работе речь идет о пузырьковых жидкостях, для которых выполнено условие $\alpha_g \gg \alpha_{gk}$, где $\alpha_{gk} = p_0 / \rho_\ell C_\ell^2$, C_ℓ — скорость звука в жидкости. Для таких сред рассмотренные давления $p_0 = 0.1$ МПа могут считаться умеренными. В частности, для воды с пузырьками при $p_0 = 0.1$ МПа имеем $\alpha_{gk} \approx 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Тогда систему первых интегралов (4) с учетом кинематических зависимостей (1) можно привести к виду

$$\upsilon - \upsilon_0 = \alpha_{g0} \upsilon_0 (\bar{a}^3 - 1), \quad p_\ell = p_{\ell 0} + \rho_\ell^0 \alpha_{\ell 0} \alpha_{g0} \upsilon_0^2 (1 - \bar{a}^3), \quad (\bar{a} = a/a_0). \tag{5}$$

2. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ СМЕСИ

Рассмотрим стационарные решения уравнений пузырьковой жидкости, пренебрегая диссипативными процессами из-за межфазного теплообмена и вязкости. Для поведения газа в пузырьках примем политропический закон

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left(\frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0}\right)^n . \tag{6}$$

Значения $n = 1$ и $n = \gamma$ соответствуют изотермическому и адиабатическому процессам. При $n = 0$ имеем предельный закон для парового пузырька. При отсутствии массообмена между пузырьками и жидкостью, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_g^0 = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho_{g0}^0, \tag{7}$$

из (6) и (7) получим

$$p_g/p_{g0} = \bar{a}^{-3n}. \tag{8}$$

Тогда уравнение (3), пренебрегая капиллярными силами и с учетом (5) и (8), можно привести к виду

$$\bar{a}\frac{d}{d\bar{a}}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{3}{2}w^2 = \frac{p_0}{\rho_\ell^0}\left(\bar{a}^{-3n} - 1\right) + \alpha_{g0}\alpha_{\ell 0}\upsilon_0^2\left(\bar{a}^3 - 1\right). \tag{9}$$

Нетривиальное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $w = 0$ при $\bar{a} = 1$, имеет вид

$$w^2 = f(\bar{a}), \tag{10}$$

$$f(\bar{a}) = \frac{2}{3}\frac{p_0}{\rho_\ell^0}\left(\frac{n\bar{a}^{-3} - \bar{a}^{-3n}}{n-1} - 1\right) + \frac{1}{3}\alpha_{g0}\alpha_{\ell 0}\upsilon_0^2\left(\bar{a}^{3/2} - \bar{a}^{-3/2}\right)^2.$$

Чтобы это решение имело физический смысл в окрестности $\bar{a} = 1$, его правая часть должна быть положительной ($f(\bar{a}) > 0$). Как следует из (9) и (10), функция $f(\bar{a})$ удовлетворяет условиям $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$. Следовательно, для положительности $f'(\bar{a})$ достаточно выполнения условия $f''(1) > 0$ [16]. Уравнение (9) с учетом (10) запишем в виде

$$\bar{a}f'(\bar{a}) + 3f(\bar{a}) = \frac{2p_0}{\rho_\ell^0}(\bar{a}^{-3n} - 1) + 2\alpha_{g0}\alpha_{\ell 0}\upsilon_0^2(\bar{a}^3 - 1).$$

Продифференцируем это уравнение по $\bar{a}$ и запишем полученное выражение при $\bar{a} = 1$. Тогда будем иметь

$$f''(1) = -\frac{6np_0}{\rho_\ell^0} + 6\alpha_{g0}\alpha_{\ell 0}\upsilon_0^2 > 0.$$

Отсюда получим условие $\upsilon_0 > C$, $C = \sqrt{\dfrac{np_0}{\rho_\ell^0\alpha_{\ell 0}\alpha_{g0}}}$. Приравняв к нулю правую часть (10), получим уравнение, связывающее скорость волны υ_0 с минимальным безразмерным радиусом $\bar{a}_s$:

$$\frac{\upsilon_0^2}{C^2} = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{n\bar{a}_s^{-3} - \bar{a}_s^{-3n}}{n-1}\right)\Big/\left(\bar{a}_s^{3/2} - \bar{a}_s^{-3/2}\right)^2. \tag{11}$$

Кроме того, из интеграла импульса для амплитуды уединенной волны имеем

$$\frac{\Delta p_{\ell s}}{p_0} = n\frac{\upsilon_0^2}{C^2}(1-\bar{a}_s^3) \quad (\Delta p_{\ell s} = p_{\ell s} - p_0)\,. \tag{12}$$

Соотношения (11) и (12) описывают зависимость скорости υ_0 уединенной волны от ее амплитуды в параметрической форме ($\bar{a}_s$ — параметр). В случае слабых волн ($\Delta p_{\ell s} \ll p_0$) можно получить явную зависимость, описываемую формулой Накорякова – Шрейбера [17]:

$$\upsilon_0 = C\left(1 + \frac{n+1}{6n}\frac{\Delta p_{\ell s}}{p_0}\right).$$

С помощью выражения $\upsilon da/dx = w$, используя формулы (5) и (10) соответственно для υ и w, связь между безразмерным радиусом и текущей координатой имеет вид

$$\int_{\bar{a}_s}^{\bar{a}} \frac{\upsilon d\bar{a}}{\sqrt{f(\bar{a})}} = \pm\frac{x}{a_0}. \tag{13}$$

При записи (13) полагалось, что минимальное значение радиуса достигается в начале координат ($x = 0$). Таким образом, выражения (5), (10) и (13) задают решение в виде уединенной волны или солитона. В работах [18, 19] рассмотрен частный случай, а именно получено лишь одно решение в виде уединенной волны. В настоящей же работе получено одно общее волновое уравнение, которое, в частности, допускает известные решения в виде уединенной волны, когда сжимаемость несущей жидкости несущественна.

Соотношения (5), (10) и (13) задают солитонное решение в параметрической форме. В случае слабых солитонов ($\Delta p_{\ell s} \ll p_0$) из (5), (8), (10) и (13) следуют зависимости

$$p_\ell = p_{\ell 0} + \Delta p_{\ell s}\mathrm{sech}^2\,(2x/L)\,, \quad p_g = p_\ell, \quad \bar{a} = 1 + \Delta a_s \mathrm{sech}^2\,(2x/L)\,/a_0,$$
$$u = \upsilon_0 - \upsilon = \alpha_{g0}C(1-\bar{a}), \quad f(\bar{a}) = (n+1)\frac{\Delta p_{\ell s}}{\rho_\ell^0}(\bar{a}-1)^2\mathrm{th}^2(2x/L)/a_0^2,$$
$$\left(L = 4a_0C\sqrt{\rho_\ell^0/\,(n+1)\,\Delta p_{\ell s}}\right),$$

совпадающие с решением, полученным на основе модели Кортевега – де Вриза для пузырьковых сред [17].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически построена система соотношений, задающих в параметрической форме солитонное решение в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов. Записано нетривиальное решение уравнения Рэлея как условия совместного деформирования фаз. В случае слабых возмущений данная система сводится к результатам, получаемым на основе модели Кортевега – де Вриза.

Благодарности. Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019–2023 годы (проект № 0246-2019-0052).

Библиографический список

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред : в 2 т. М. : Наука, 1987. Т. 1, 360 с. ; Т. 2, 464 с.

2. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск : Наука, 1984. 301 с.
3. *Кедринский В. К.* Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
4. *Ким Д. Ч.* Физическая природа акустических солитонов в жидкости с распределенными пузырьками газа // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 5. С. 619–623.
5. *Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И.* Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа при учете вязкости и теплообмена // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 108–127. DOI: https://doi.org/10.1134/S0015462810010114
6. *Землянухин А. И., Бочкарев А. В.* Новые точные решения обобщенного уравнения Конно – Камеямы – Сануки // Вест. СГТУ. 2015. Т. 2, вып. 1. С. 5–9.
7. *Землянухин А. И., Бочкарев А. В.* Точные уединенно-волновые решения уравнений Бюргерса – Хаксли и Бредли – Харпера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 62–70. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70
8. *Галимзянов М. Н.* Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 27–35. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35
9. *Агишева У. О.* Воздействие ударных волн на пузырьковые и пенные структуры в двумерных осесимметричных объемах // Вестн. Башкир. ун-та. 2013. Т. 18. № 3. С. 640–645.
10. *Агишева У. О., Болотнова Р. Х., Бузина В. А., Галимзянов М. Н.* Параметрический анализ режимов ударно-волнового воздействия на газожидкостные среды // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 2. С. 15–28. DOI: https://doi.org/10.1134/S0015462813020038
11. *Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С.* Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // ИФЖ. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921. DOI: https://doi.org/10.1007/s10891-018-1809-9
12. *Галимзянов М. Н., Шагапов В. Ш.* Аналитические исследования акустики суспензий // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 27–35. DOI: https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.004
13. *Galimzyanov M. N., Agisheva U. O.* Wave equation for bubble liquid in Lagrangian variables // Lobachevskii Journal Mathematics. 2019. Vol. 40, № 11. P. 1922–1928. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508021911009X
14. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М. : Наука, 1978. 306 с.
15. *Нигматулин Р. И.* Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред // ПММ. 1971. Т. 35, № 3. С. 451–465.
16. *Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбах С. А.* Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1976. № 6. С. 90–96.
17. *Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск : Ин-т теплофизики, 1983. 237 с.
18. *Богуславский Ю. Я., Григорьев С. Б.* О распространении волн произвольной амплитуды в газожидкостной смеси // Акустический журнал. 1977. Т. 23. № 4. С. 636–639.
19. *Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И.* Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды : сб. науч. тр. Новосибирск : Ин-т гидродинамики, 1983. Вып. 62. С. 75–92.

Образец для цитирования: *Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Агишева У. О.* Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 232–240. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240

Single Waves in a Gas-Liquid Bubble Mixture

V. Sh. Shagapov, M. N. Galimzyanov, U. O. Agisheva

Vladislav Sh. Shagapov, https://orcid.org/0000-0002-3650-971X, Mavlyutov Institute of Mechanics, 71 Prospekt Oktyabrya, Ufa 450054, Russia, shagapov@rambler.ru

Marat N. Galimzyanov, https://orcid.org/0000-0001-6548-5174, Mavlyutov Institute of Mechanics, 71 Prospekt Oktyabrya, Ufa 450054, Russia, monk@anrb.ru

Uliana O. Agisheva, https://orcid.org/0000-0002-7470-7303, Mavlyutov Institute of Mechanics, 71 Prospekt Oktyabrya, Ufa 450054, Russia, agisheva_u@mail.ru

Nonlinear wave processes in a two-phase medium (bubbly liquid) do not lose their relevance as an object of study due to their wide use in various fields of physics, engineering, chemical and petroleum industries. Last decades the jump in the development of computing has expanded the possibilities for the study of significantly nonlinear problems. The aim of this work was to obtain a stationary solution of equations describing the motion of a solitary wave in a gas-liquid mixture without taking into account dissipative processes. A one-dimensional stationary flow of a liquid with gas bubbles was considered under the following assumptions: the mixture is monodisperse, i.e. in each elemental volume all bubbles are spherical and of the same radius; viscosity and thermal conductivity are considerable only in the process of interfacial interaction and during bubble pulsations. Moreover, it is assumed that there is no mass transfer between the phases, and the liquid temperature is constant unlike the gas temperature in a bubble. This is always fulfilled under not very high pressures due to the bigger mass content of the liquid (therefore it can be considered as a thermostat). It greatly simplifies the task since there is no need to consider the equation of the energy in the liquid. The pressure in the bubble was assumed to be uniform. It is ensured if the radial velocity of the bubble walls is significantly less than the speed of sound in the gas. Phase pressure and bubble size were bound by the condition of combined deformation. The Rayleigh equation corresponding to the pulsations of a single spherical bubble in an infinite incompressible fluid was taken as the condition in this case. Properties of the gas in bubbles were described by the polytropic law. Based on one-dimensional stationary equations of fluid flow with gas bubbles, a solution of the “solitary wave” type is constructed. This solution in a special case of weak solitons is equal to the results taken on the basis of the Korteweg – de Vries equation for bubble media.

Keywords: solitary wave, soliton, bubbly liquid.

Received: 12.03.2019 / Accepted: 08.08.2019 / Published: 01.06.2020

Acknowledgements: This work was supported by the government budget for the state task for 2019–2023 years (project No. 0246-2019-0052).

References

1. Nigmatulin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media: in 2 vols.]. Moscow, Nauka, 1987. Vol. 1, 360 p.; vol. 2, 464 p. (in Russian).
2. Kutateladze S. S., Nakoriakov V. E. *Teplomassoobmen i volny v gazozhidkostnykh sistemakh* [Heat and mass transfer and waves in gas-liquid systems]. Novosibirsk, Nauka, 1984. 301 p. (in Russian).
3. Kedrinskii V. K. *Gidrodinamika vzryva: eksperiment i modeli* [Explosion hydrodynamics: experiment and models]. Novosibirsk, Publishing House SB RAS, 2000. 435 p. (in Russian).

4. Kim D. Ch. Physical nature of acoustical solitons in liquid with distributed gas bubbles. *Doklady Physics*, 2008, vol. 53, iss. 2, pp. 66–70. DOI: https://doi.org/10.1007/s11446-008-2004-9
5. Kudriashov N. A., Sinelshchikov D. I. Nonlinear waves in liquids with gas bubbles with account of viscosity and heat transfer. *Fluid Dynamics*, 2010, vol. 45, iss. 1, pp. 96–112. DOI: https://doi.org/10.1134/S0015462810010114
6. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. New Exact Solutions to the Generalized Konno – Kameyama – Sanuki Equation. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2015, vol. 2, iss. 1, pp. 5–9 (in Russian).
7. Zemlianukhin A. I., Bochkarev A. V. Exact Solitary-wave Solutions of the Burgers – Huxley and Bradley – Harper Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 62–70 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70
8. Galimzyanov M. N. Propagation of Pressure Waves in Finite-Size Bubbles Zones. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 27–35 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35
9. Agisheva U. O. Shock wave impact on bubble and foam structures in two-dimensional axisymmetric volumes. *Vestnik Bashkirskogo Universiteta*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 640–645 (in Russian).
10. Agisheva U. O., Bolotnova R. Kh., Buzina V. A., Galimzyanov M. N. Parametric analysis of the regimes of shock-wave action on gas-liquid media. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, iss. 2, pp. 151–162. DOI: https://doi.org/10.1134/S0015462813020038
11. Shagapov V. S., Galimzyanov M. N., Vdovenko I. I., Khabeev N. S. Characteristic Features of Sound Propagation in a Warm Bubble-Laden Water. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2018, vol. 91, no. 4, pp. 854–863. DOI: https://doi.org/10.1007/s10891-018-1809-9
12. Galimzyanov M. N., Shagapov V. Sh. Analytical studies of suspension acoustics. *Multiphase Systems*, 2019, vol. 14, no. 1, pp. 27–35 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.004
13. Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Wave equation for bubble liquid in Lagrangian variables. *Lobachevskii Journal Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1922–1928. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508021911009X
14. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of Heterogeneous Media Mechanics]. Moscow, Nauka, 1978. 306 p. (in Russian).
15. Nigmatulin R. I. Small-scale flows and surface effects in the hydrodynamics of multiphase media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, iss. 3, pp. 409–423.
16. Goncharov V. V., Naugol'nykh K. A., Rybakh S. A. Steady-state perturbations in a liquid containing gas bubbles. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1976, vol. 17, iss. 6, pp. 824–829. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00858105
17. Nakoriakov V. E., Pokusaev B. G., Shreiber I. R. *Rasprostranenie voln v gazo- i parozhidkostnykh sredakh* [Wave propagation in gas and vapor-liquid environments]. Novosibirsk, Institut teplofiziki, 1983. 237 p. (in Russian).
18. Boguslavskii Yu. Ya., Grigor'ev S. B. On arbitrary amplitude sound propagation in gas-liquid mixture. *Akusticheskij Zhurnal*, 1977, vol. 23, iss. 4, pp. 636–639 (in Russian).
19. Lyapidevskey V. Yu., Plaksin S. I. The structure of shock waves in a gas-liquid medium with nonlinear state equation. *Dinamika sploshnoi sredy* [Continuous Media Dynamics]. Novosibisk, Institut gidrodinamiki, 1983, iss. 62, pp. 75–92 (in Russian).

Cite this article as:

Shagapov V. Sh., Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Single Waves in a Gas-Liquid Bubble Mixture. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 232–240 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240