



МЕХАНИКА

УДК 517.958

Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости

Т. В. Быкова, Е. Д. Грушенкова,
В. С. Попов, А. А. Попова

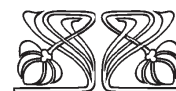
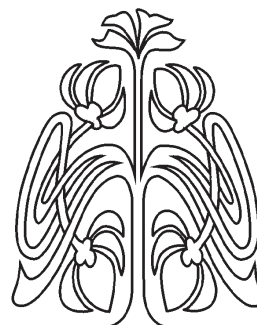
Быкова Татьяна Викторовна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, tbykova69@mail.ru

Грушенкова Екатерина Дмитриевна, аспирант кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, katenok.09041992@gmail.com

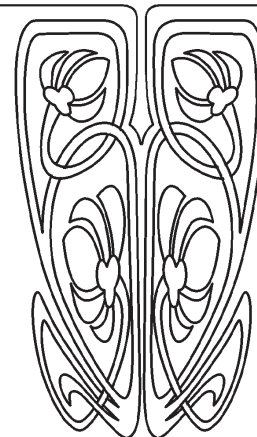
Попов Виктор Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, vic_p@bk.ru

Попова Анна Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, anay_p@bk.ru

Исследовано взаимодействие трехслойной пластины с вибрирующим жестким штампом через тонкий слой вязкой жидкости. Пластина и штамп образуют узкий канал с параллельными прямоугольными стенками. Канал полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Движение жидкости в канале изучается как ползущее. Закон движения штампа считается заданным как гармонический по времени, и исследуется вопрос о вынужденных установившихся колебаниях трехслойной пластины. Верхний и нижний слои пластины удовлетворяют гипотезам Кирхгофа. Заполнитель пластины рассматривается как сжимаемый. Полагается, что амплитуда колебаний стенок канала значительно меньше расстояния между ними, а продольный размер канала значительно больше его поперечного размера. Исследуется



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





плоская задача гидроупругости, состоящая из уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности и уравнений динамики трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. Граничными условиями задачи являются: условия совпадения скоростей жидкости и ограничивающих ее стенок канала, условия совпадения давления на торцах канала с давлением в окружающей жидкости и условия свободного опирания пластины на торцах. При исследовании были учтены нормальные и касательные напряжения жидкости, действующие на верхний слой пластины. Форма упругих перемещений трехслойной пластины выбрана в виде рядов по тригонометрическим функциям продольной координаты. Из решения задачи найдены выражения для гидродинамических параметров слоя жидкости и упругих перемещений слоев пластины. Построены частотозависимые функции распределения амплитуд упругих перемещений слоев пластины и давления в слое вязкой жидкости.

Ключевые слова: гидроупругость, колебания, трехслойная пластина, вязкая жидкость, вибрирующий штамп.

Поступила в редакцию: 13.03.2019 / Принята: 09.04.2019 / Опубликовано: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>

ВВЕДЕНИЕ

Исследования колебаний упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью, имеют большое значение как для развития современной механики, так и для различных инженерных приложений. В большинстве случаев изучение данной проблемы сводится к постановке и решению задачи гидроупругости, в рамках которой совместно рассматриваются уравнения динамики упругой конструкции и жидкости с соответствующими начальными и граничными условиями. Одним из первых исследований данной проблемы можно считать работу [1], в которой рассмотрены колебания круглой пластины, жестко защемленной на контуре с абсолютно жесткой плоской стенкой, с одной стороны которой находится неограниченный объем идеальной несжимаемой жидкости. Решение задачи основывается на энергетическом подходе (метод Рэлея) определения собственных частот колебаний упругой конструкции при задании формы прогиба пластины, как в задаче статического прогиба. Учет влияния жидкости приводит к снижению частот колебаний за счет эффекта увеличения инерции в колебательной системе (присоединенная масса) и демпфированию колебаний за счет преобразования энергии на волнообразование в жидкости. В [2] решение указанной выше задачи осуществлено на базе рассмотрения задачи гидроупругости. В [3] исследуются свободные колебания круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в жестком цилиндре. Аналогичная задача для круглой пластины, погруженной под свободную поверхность идеальной жидкости, находящейся в жестком цилиндре, рассмотрена в [4]. Собственные колебания пластины, плавающей на свободной поверхности идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины, исследованы в [5]. В [6] рассмотрена плоская задача изгибных колебаний и устойчивости пластины, являющейся частью абсолютно жесткой стенки проточного канала с идеальной сжимаемой жидкостью, а в [7] исследована задача собственных гидроупругих колебаний и устойчивости прямоугольной пластины, являющейся стенкой канала заполненного идеальной сжимаемой жидкостью. Хаотические колебания пластины, взаимодействующей с обеих сторон с идеальным потоком несжимаемой жидкости,



ти, изучены в [8]. Работа [9] посвящена моделированию изгибных колебаний прямоугольной пластины, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью. Задача о распространении акустической волны в идеальной несжимаемой жидкости, вызванной вынужденными колебаниями пластины, соединенной с одной стороны с вибрирующей машиной, а с другой стороны контактирующей с жидкостью, рассмотрена в [10]. В [11] исследованы свободные изгибные колебания консольных пластин, частично погруженных в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью.

Исследования колебаний упругих элементов конструкций, взаимодействующих с вязкой жидкостью, также представляют интерес, так как вязкость определяет демпфирующие свойства в колебательной системе упругое тело – жидкость. Например, в [12] решение Г. Ламба [1] обобщено учетом вязкости жидкости. В [13] исследованы колебания бесконечной пластинки-полоски, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости. Гидроупругая реакция упругих стенок плоского канала, взаимодействующих со слоем вязкой жидкости, в условиях вибрации основания канала исследована в [14]. Задача о гидроупругих колебаниях консольнозакрепленной балки-полоски, погруженной в неограниченный объем вязкой жидкости, решена в [15]. Поперечные колебания дисков, взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости между ними, изучены в [16]. Гидроупругие колебания пластин, опирающихся на упругие основания различных типов, изучены в [17–19].

Трехслойные элементы конструкций в виде балок и пластин широко применяются в различных отраслях современной промышленности в связи с одновременным обеспечением необходимой жесткости при сохранении малой массы конструкции, а также возможностью выполнения защиты от агрессивных воздействий различной природы (температура, радиация и т. д.). Подходы к изучению их статики и динамики достаточно хорошо разработаны и представлены, например, в обзорной части монографии [20]. Термосиловой изгиб упругопластического трехслойного стержня с несжимаемым жестким наполнителем на упругом основании Винклера исследован в [21]. Изгибные колебания круглой трехслойной пластины, установленной на винклеровском основании и имеющей несжимаемый легкий наполнитель, при воздействии на пластину теплового удара изучены в [22]. В обеих работах для описания кинематики трехслойного пакета использована гипотеза ломаной нормали. Исследование деформирования трехслойной балки со сжимаемым наполнителем под действием локальной синусоидальной нагрузки и теплового потока проведено в [23]. В [24] изучена статическая и динамическая устойчивость трехслойной пластины с вязкоупругим наполнителем, установленной на основании Пастернака с переменной жесткостью, под действием пульсирующей осевой нагрузки и температурного градиента. Изучение изгиба трехслойного упругопластического стержня с учетом сжимаемости его наполнителя под воздействием непрерывных и локально распределенных нагрузок и находящегося в нейтронном потоке выполнено в [25].

Исследования гидроупругих колебаний многослойных балок и пластин недостаточно отражены в современной научной литературе. Например, в [26] исследованы свободные гидроупругие колебания многослойных пластин, взаимодействующих с идеальной жидкостью. В частности, рассмотрены случаи колебаний пластин в воздухе и погруженных в воду. Задачи вынужденных колебаний трехслойных пластин с несжимаемым наполнителем, контактирующих со слоем вязкой жидкости, при описании их кинематики в рамках гипотезы ломаной нормали по [20] рассмотрены в [27, 28], а с дополнительным учетом упругого основания Винклера, на котором



установлена трехслойная балка, в [29]. С другой стороны, за рамками рассмотрения указанных выше работ остались вопросы изучения гидроупругой реакции трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, взаимодействующей с вибрирующим штампом, через слой вязкой жидкости, находящейся между ними. Рассмотрим ниже данную задачу при учете действующих на пластину нормальных и касательных напряжений со стороны жидкости, а также особенностей торцевого истечения и закрепления пластины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ

Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину, образующую стенку плоского канала (рис. 1). Пластина свободно опирается на торцы, толщины ее верхнего и нижнего несущих слоев 1 и 2 полагаем равными h_1 и h_2 , толщина наполнителя 3 равна 2. Центр декартовой системы координат xz свяжем с центром срединной плоскости наполнителя пластины в недеформированном состоянии. Вторая стенка канала представляет собой прямоугольный абсолютно жесткий штамп, совершающий колебания вдоль оси z , амплитуда его колебаний z_m . Размер обеих стенок канала в плане $2\ell \times b$.

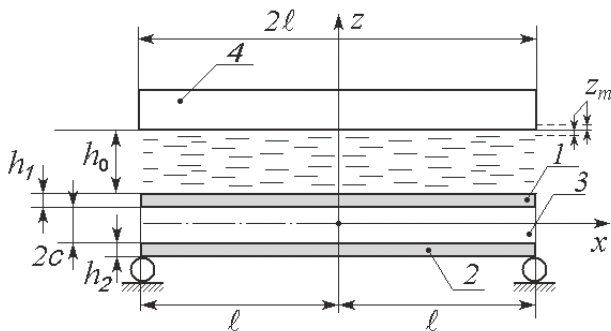


Рис. 1. Плоский канал, нижняя стенка которого образована трехслойной пластиной: 1, 2 — несущие слои пластины, 3 — наполнитель пластины, 4 — вибрирующий штамп

Fig. 1. Flat channel, the lower wall of which is formed by a three-layer plate: 1, 2 — plate carrier layers, 3 — plate filler, 4 — vibrating stamp

которой на торцах можно считать свободным в ту же жидкость, т.е. давление жидкости в торцевом сечении канала совпадает с давлением в окружающей жидкости. Будем полагать данное давление p_0 постоянным. Амплитуды упругих перемещений трехслойной пластины и колебаний штампа значительно меньше h_0 . Таким образом, будем изучать гидроупругие колебания пластины, вызванные ее взаимодействием с вибрирующим штампом через тонкий слой вязкой несжимаемой жидкости. Принимая во внимание, что в узком канале возникают существенные силы трения [30], обуславливающие быстрое затухание переходных процессов, будем опускать влияние начальных условий [31], т.е. ограничимся рассмотрением установившихся вынужденных колебаний.

Закон движения штампа представим в виде

$$h = z_0 + z_m f(\omega t), \quad z_0 = c + h_1 + h_0, \quad (1)$$

где z_m — амплитуда колебаний штампа, ω — частота колебаний, t — время.

Трехслойная пластина состоит из верхнего и нижнего несущих слоев, между которыми находится наполнитель, обеспечивающий их совместную работу как единого пакета. Для описания кинематики пластины воспользуемся подходом, предложенным в [20], т.е. считаем, что несущие слои изотропны, несжимаемы в по-



перечном направлении и удовлетворяют гипотезам Кирхгофа. Заполнитель считается жестким с учетом его обжатия, т. е. для него выполняются точные соотношения теории упругости, а зависимость перемещений его точек от поперечной координаты z представляется линейной. Деформации полагаем малыми, а на границах слоев пластины выполняются условия непрерывности их перемещений. Для указанного случая напряженно-деформируемое состояние пластины полностью описывается через продольные перемещения и прогибы срединных плоскостей ее верхнего и нижнего несущих слоев. В рассматриваемой постановке уравнения движения трехслойной пластины представляют собой полученные в [20] уравнения динамики трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
 F_1 + a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_5 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + a_3 \frac{\partial w_2}{\partial x} - 2a_6 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + a_7 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} &= P_{zx}, \\
 F_2 - a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_9 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - a_3 \frac{\partial w_1}{\partial x} - a_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} - a_6 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + 2a_7 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} &= 0, \\
 F_3 - a_{17} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{10} \frac{\partial u_2}{\partial x} + 2a_6 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + a_6 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + a_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - a_{12} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + & \\
 + a_{15} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - 2a_{16} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = P_{zz} + \frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x}, & \quad (2) \\
 F_4 - a_{18} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{19} \frac{\partial u_2}{\partial x} - a_7 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - 2a_7 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} - a_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + a_{14} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - & \\
 - a_{16} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + a_{13} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = 0. &
 \end{aligned}$$

Здесь u_1, u_2 — упругие продольные перемещения верхнего и нижнего несущих слоев пластины, w_1, w_2 — прогибы верхнего и нижнего несущих слоев пластины, P_{zz}, P_{zx} — нормальные и касательные напряжения, действующие на верхний несущий слой пластины со стороны жидкости, данные напряжения запишутся как

$$\begin{aligned}
 P_{zx} &= -\rho\nu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad \text{при } z = c + h_1 + w_1, \\
 P_{zz} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \text{при } z = c + h_1 + w_1,
 \end{aligned}$$

где ρ, ν — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости, u_x, u_z — проекции вектора скорости жидкости на оси координат, p — давление жидкости, ρ_k — плотность материала k -го слоя пластины, G_k, K_k — модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя пластины, $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, K_k^- = K_k - \frac{4}{3}G_k$.

При этом введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2G_3}{c}, \quad a_2 = 2G_3 \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad a_3 = 2G_3 \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \\
 a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}, \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}, \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}, \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}, \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \\
 a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}, \\
 a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{G_3 c}{6}, \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 a_{14} &= \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}, & a_{15} &= \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}, & a_{16} &= \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}, \\
 a_{17} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, & a_{18} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}, & a_{19} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \\
 F_1 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(m_1 u_1 + m_8 u_2 + 2m_5 \frac{\partial w_1}{\partial x} - m_7 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right), \\
 F_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(m_8 u_1 + m_2 u_2 + m_5 \frac{\partial w_1}{\partial x} - 2m_7 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right), \\
 F_3 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-2m_5 \frac{\partial u_1}{\partial x} - m_5 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_1 w_1 + m_8 w_2 - m_3 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + m_6 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right), \\
 F_4 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(m_7 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2m_7 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_8 w_1 + m_2 w_2 + m_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - m_4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right), \\
 m_1 &= \rho_1 h_1 + \frac{2}{3} \rho_3 c, & m_2 &= \rho_2 h_2 + \frac{2}{3} \rho_3 c, & m_3 &= \frac{\rho_1 h_1^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_1^2}{6}, & m_4 &= \frac{\rho_2 h_2^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_2^2}{6}, \\
 m_5 &= \frac{\rho_3 c h_1}{6}, & m_6 &= \frac{\rho_3 c h_1 h_2}{12}, & m_7 &= \frac{\rho_3 c h_2}{6}, & m_8 &= \frac{\rho_3 c}{3}.
 \end{aligned}$$

Краевые условия уравнений (2) имеют вид

$$w_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \ell, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Движение вязкой жидкости в узкой щели, образованной пластиной и штампом, можно рассматривать как ползущее [30]. В этом случае уравнения ее динамики имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Краевые условия уравнений (4) имеют вид условий совпадения скоростей ограничивающих жидкость стенок со скоростями движения жидкости на них:

$$\begin{aligned}
 u_x &= 0, & u_z &= \frac{dh}{dt} \quad \text{при} \quad z = c + h_1 + h_0 + z_m f(\omega t), \\
 u_x &= \frac{\partial u_1}{\partial t}, & u_z &= \frac{\partial w_1}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = c + h_1 + w,
 \end{aligned} \quad (5)$$

и условий для давления на торцах канала

$$p = p_0 \quad \text{при} \quad x = \pm \ell. \quad (6)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$\begin{aligned}
 \tau &= \omega t, & \xi &= \frac{x}{\ell}, & \zeta &= \frac{z - c - h_1}{h_0}, \\
 u_x &= z_m \omega \frac{\ell}{h_0} U_\xi, & u_z &= z_m \omega U_\zeta, & p &= p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0} \frac{\ell^2}{h_0^2} P.
 \end{aligned} \quad (7)$$



В переменных (7) уравнения динамики жидкости (4) и краевые условия для скоростей (5) и давления (6) запишутся как

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2 \left[\left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1 + \frac{z_m}{h_0} f(\tau), \quad (9)$$

$$U_\xi = \frac{h_0}{\ell} \frac{u_{m1}}{z_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau}, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_{m1}}{z_m} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \zeta = \frac{w_{m1}}{h_0} \frac{\partial W_1}{\partial \tau},$$

$$P = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1.$$

Здесь упругое продольное перемещение и прогиб верхнего несущего слоя пластины были представлены в форме $u_1 = u_{m1} U_1(\xi, \tau)$, $w_1 = w_{m1} W_1(\xi, \tau)$.

В рассматриваемой постановке $\frac{u_{m1}}{z_m} = O(1)$, а параметры $\frac{h_0}{\ell} = \frac{z_m}{h_0} = \frac{w_{m1}}{h_0} = o(1)$, поэтому члены при данных параметрах в уравнениях (8) и краевых условиях (9) можно опустить [32], и мы получим следующую задачу динамики тонкого слоя вязкой жидкости:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (10)$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1; \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_{m1}}{z_m} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (11)$$

$$P = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1. \quad (12)$$

В переменных (7), с учетом сделанного выше замечания, напряжения P_{zz} и P_{zx} , действующие на верхний несущий слой пластины со стороны жидкости, примут вид

$$P_{zx} = -\frac{\rho \nu z_m \omega \ell}{h_0^2} \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad P_{zz} = -p_0 - \frac{\rho \nu z_m \omega \ell^2}{h_0^3} P \Big|_{\zeta=0}. \quad (13)$$

Решая задачу (10)–(12), определили безразмерное давление и необходимые далее производные продольной компоненты скорости жидкости в виде

$$P = 6(\xi^2 - 1) \frac{df}{d\tau} + 12 \frac{w_{m1}}{z_m} \int_\xi^1 \int_0^\xi \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\xi d\xi + 6(\xi - 1) \frac{w_{m1}}{z_m} \int_{-1}^1 \int_0^\xi \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\xi d\xi, \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = -6\xi \frac{df}{d\tau} + 6 \frac{w_{m1}}{z_m} \int_0^\xi \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\xi - 3 \frac{w_{m1}}{z_m} \int_{-1}^1 \int_0^\xi \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\xi d\xi, \quad (14) \\ \frac{h_1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=0} = \frac{h_1}{\ell} \left(-6 \frac{df}{d\tau} + 6 \frac{w_{m1}}{z_m} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \right).$$

Решение уравнений (2) представим в виде, удовлетворяющем краевым условиям (3):

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} T_k^n(\omega t) \sin \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{\ell}, \quad w_k = \sum_{n=0}^{\infty} R_k^n(\omega t) \cos \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{\ell}, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$



Тогда, учитывая (15) в (14) и разложив постоянный уровень давления p_0 и все входящие в P_{zz} и P_{zx} функции от ξ в ряды по соответствующим тригонометрическим функциям продольной координаты получим

$$P_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho\nu\ell^2}{h_0^3} \left(\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left(p_0 \frac{h_0^3}{\rho\nu\ell^2} - 12 \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{dh}{dt} \right) - 12 \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{dR_1^n}{dt} \right) \cos \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{\ell}, \quad (16)$$

$$P_{zx} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho\nu\ell}{h_0^2} \left(12(-1)^{n+1} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{dh}{dt} + 6 \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right] \frac{dR_1^n}{dt} \right) \sin \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{\ell},$$

$$\frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{h_0}{\ell} \frac{h_1}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho\nu\ell^2}{h_0^3} \left(12(-1)^{n+1} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right] \frac{dh}{dt} + 6 \frac{dR_1^n}{dt} \right) \cos \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{\ell}.$$

Из полученных выражений (16) следует, что $\frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} / P_{zz} = O(h_0 h_1 / \ell^2) = o(1)$ и слагаемое $\frac{h_1}{2} \frac{\partial P_{zx}}{\partial x}$ в (2) можно исключить из рассмотрения, так как оно мало по сравнению с P_{zz} . Принимая это во внимание, подставляя (15), (16) в (2) и приравнявая в полученной системе члены при одинаковых тригонометрических функциях, перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую входят два однородных уравнения. Используя однородные уравнения, найдем связь между T_2^n, R_2^n через T_1^n, R_1^n :

$$\begin{aligned} T_2^n &= \frac{T_1^n (b_{24}b_{41} - b_{44}b_{21}) + R_1^n (b_{24}b_{43} - b_{44}b_{23})}{b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}}, \\ R_2^n &= \frac{T_1^n (b_{42}b_{21} - b_{22}b_{41}) + R_1^n (b_{42}b_{23} - b_{22}b_{43})}{b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, учитывая, что согласно постановке задачи рассматриваются гармонические установившиеся колебания, т.е., используя $\frac{d^2 R_1^n}{dt^2} = -\omega^2 R_1^n$, окончательно получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} b_{11}^* T_1^n + b_{13}^* R_1^n + 2K_n^1 \frac{dR_1^n}{dt} &= - \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} 2K_n^1 \frac{dh}{dt}, \\ b_{31}^* T_1^n + b_{33}^* R_1^n + 2K_n \frac{dR_1^n}{dt} &= \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left[p_0 - 2K_n \frac{dh}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta &= b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}, \quad b_{11}^* = b_{11} + b_{12} \frac{b_{24}b_{41} - b_{44}b_{21}}{\Delta} + b_{14} \frac{b_{42}b_{21} - b_{22}b_{41}}{\Delta}, \\ b_{13}^* &= b_{12} \frac{b_{24}b_{43} - b_{44}b_{23}}{\Delta} + b_{13} + b_{14} \frac{b_{42}b_{23} - b_{22}b_{43}}{\Delta}, \\ b_{31}^* &= b_{31} + b_{32} \frac{b_{24}b_{41} - b_{44}b_{21}}{\Delta} + b_{34} \frac{b_{42}b_{21} - b_{22}b_{41}}{\Delta}, \\ b_{33}^* &= b_{32} \frac{b_{24}b_{43} - b_{44}b_{23}}{\Delta} + b_{33} + b_{34} \frac{b_{42}b_{23} - b_{22}b_{43}}{\Delta}, \\ 2K_n &= 12 \frac{\rho\nu\ell^2}{h_0^3} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2, \quad 2K_n^1 = 6 \frac{\rho\nu\ell}{h_0^2} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right], \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
b_{11} &= a_1 + a_4 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_1 \omega^2, & b_{12} &= -a_1 + a_5 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_8 \omega^2, \\
b_{13} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[-a_2 - 2a_6 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + 2m_5 \omega^2 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right) \right], \\
b_{14} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[-a_3 + a_7 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_7 \omega^2 \right], \\
b_{21} &= -a_1 + a_5 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_8 \omega^2, & b_{22} &= a_1 + a_9 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_2 \omega^2, \\
b_{23} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[a_3 - a_6 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + m_5 \omega^2 \right], \\
b_{24} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[a_2 + 2a_7 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - 2m_7 \omega^2 \right], \\
b_{31} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[a_{17} - 2a_6 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + 2m_5 \omega^2 \right], \\
b_{32} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[a_{10} - a_6 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + m_5 \omega^2 \right], \\
b_{33} &= a_8 - a_{11} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + a_{15} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^4 - \left[m_1 + m_3 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2, \\
b_{34} &= -a_8 + a_{12} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - a_{16} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - \left[m_8 - m_6 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2, \\
b_{41} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[-a_{18} + a_7 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_7 \omega^2 \right], \\
b_{42} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[a_{19} + 2a_7 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - 2m_7 \omega^2 \right], \\
b_{43} &= -a_8 + a_{12} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - a_{16} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^4 - \left[m_8 - m_3 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2, \\
b_{44} &= a_8 - a_{14} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + a_{13} \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^4 - \left[m_2 + m_4 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2.
\end{aligned}$$

Из (18) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{dR_1^n}{dt} \left[\frac{2K_n}{b_{31}^*} - \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \right] + R_1^n \left[\frac{b_{33}^*}{b_{31}^*} - \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \right] &= \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left[\frac{p_0}{b_{31}^*} - \left(\frac{2K_n}{b_{31}^*} - \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \right) \frac{dh}{dt} \right], \\
T_1^n &= -\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} R_1^n - \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \frac{dR_1^n}{dt} - \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \frac{dh}{dt}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Представляя $R_1^n = R_1^{n0} + \bar{R}_1^n$, $T_1^n = T_1^{n0} + \bar{T}_1^n$, где верхний индекс 0 соответствует



статическому давлению p_0 , в силу линейности (19) находим, что

$$R_1^{n0} = p_0 \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{1}{d_1} \Big|_{\omega=0}, \quad T_1^{n0} = -R_1^{n0} \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \Big|_{\omega=0} = p_0 \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \left(\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \frac{1}{d_1} \right) \Big|_{\omega=0}, \quad (20)$$

а функции \bar{R}_1^n и \bar{T}_1^n имеют вид

$$\bar{R}_1^n = -\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{d_2\omega}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2\omega^2}} e^{i\psi} z_m e^{i\omega t}, \quad \bar{T}_1^n = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \sqrt{d_3^2 + d_4^2} e^{i\theta} z_m e^{i\omega t}, \quad (21)$$

где

$$d_1 = b_{33}^* - b_{31}^* \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*}, \quad d_2 = 2K_n - \frac{b_{31}^* 2K_n^1}{b_{11}^*}, \quad \text{tg } \psi = \frac{d_1}{d_2\omega}, \quad d_3 = \frac{b_{13}^*(d_2\omega)^2 - 2K_n^1\omega d_1 d_2\omega}{b_{11}^*(d_1^2 + d_2^2\omega^2)},$$

$$d_4 = \frac{b_{13}^* d_1 d_2\omega}{b_{11}^*(d_1^2 + d_2^2\omega^2)} + \frac{2K_n^1\omega}{b_{11}^*} \left(\frac{d_2^2\omega^2}{d_1^2 + d_2^2\omega^2} - 1 \right), \quad \text{tg } \theta = \frac{d_4}{d_3}.$$

Учитывая (20), (21) в (15), получим выражения для прогиба и продольного перемещения первого несущего слоя пластины в виде

$$w_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{1}{d_1} \Big|_{\omega=0} \cos \frac{2n+1}{2\ell} \pi x \right) + z_m \Pi_{w1}(\omega, x) \sin(\omega t + \varphi_{w1}),$$

$$u_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \left(\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \frac{1}{d_1} \right) \Big|_{\omega=0} \sin \frac{2n+1}{2\ell} \pi x \right) + z_m \Pi_{u1}(\omega, x) \sin(\omega t + \varphi_{u1}). \quad (22)$$

Здесь

$$\Pi_{w1}(\omega, x) = \sqrt{E_h^2 + F_h^2}, \quad \Pi_{u1}(\omega, x) = \sqrt{A_h^2 + B_h^2},$$

$$E_h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{(d_2\omega)^2}{d_1^2 + d_2^2\omega^2} \cos \frac{2n+1}{2\ell} \pi x,$$

$$F_h = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{d_1 d_2\omega}{d_1^2 + d_2^2\omega^2} \cos \frac{2n+1}{2\ell} \pi x,$$

$$A_h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} d_3 \sin \frac{2n+1}{2\ell} \pi x, \quad B_h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} d_4 \sin \frac{2n+1}{2\ell} \pi x,$$

$$\varphi_{w1} = \text{arctg} \frac{F_h}{E_h}, \quad \varphi_{u1} = \text{arctg} \frac{B_h}{A_h}.$$

Введенные в рассмотрение функции $\Pi_{w1}(\omega, x)$, $\Pi_{u1}(\omega, x)$ представляют собой частотозависимые функции распределения амплитуд прогиба и продольного перемещения вдоль верхнего слоя пластины соответственно. Заметим, что, принимая во внимание связь (17), мы также определили прогиб и продольное перемещение второго несущего слоя пластины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате постановки и решения задачи об изгибных и продольных колебаниях трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, взаимодействующей с



вибрирующим штампом через слой вязкой несжимаемой жидкости, найдены выражения для упругих перемещений несущих слоев пластины, полностью определяющие напряженно деформированное состояние сэндвич-пакета. На основе полученного решения построены частотозависимые функции распределения амплитуд прогиба $\Pi_{w1}(\omega, x)$ и продольного перемещения $\Pi_{u1}(\omega, x)$ первого несущего слоя. Данные функции при фиксированном значении продольной координаты трансформируются в амплитудно-частотные характеристики соответствующего поперечного сечения. Таким образом, предложенные функции позволяют исследовать гидроупругие колебания трехслойной пластины, например, могут быть использованы для определения ее резонансных частот колебаний. Кроме того, полученное решение может использоваться для совершенствования методик неразрушающего контроля состояния трехслойной пластины, являющейся стенкой канала, заполненного вязкой жидкостью. Для этого достаточно экспериментально определить амплитудно-частотные характеристики прогиба и продольного перемещения второго несущего слоя в некотором фиксированном сечении канала при заданном гармоническом законе вибрации штампа. Это позволит, используя связь (17), пересчитать по снятым характеристикам второго слоя характеристики первого слоя. Сравнивая полученный результат с заранее известным расчетным результатом, можно судить о состоянии стенки канала. Принимая во внимание сказанное выше, разработанная математическая модель может быть использована как для исследования динамики трехслойных стенок каналов, так и для развития технологий неразрушающего контроля трехслойных конструкций по параметрам их вынужденных колебаний.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00014а, № 18-01-00127а).

Библиографический список

1. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc. A. 1921. Vol. 98. P. 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
2. Amabili M., Kwak M. K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revisiting the Lamb problem // J. Fluids Struct. 1996. Vol. 10, iss. 7. P. 743–761. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
3. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // J. Sound Vib. 2001. Vol. 245, iss. 2. P. 261–283. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3560>
4. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // J. Sound Vib. 2013. Vol. 332, iss. 12. P. 3064–3085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
5. Алексеев В. В., Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А. Колебания упругой пластины контактирующей со свободной поверхностью тяжелой жидкости // ЖТФ. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 16–21.
6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал СВМО. 2016. Т. 18, № 1. С. 94–107.
7. Бочкарев С. А., Лекомцев С. В., Матвеев В. П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016, № 6. С. 108–120. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0568528116060049>



8. Аврамов К. В., Стрельникова Е. А. Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости // Прикладная механика. 2014. Т. 50, № 3. С. 86–93.
9. Haddara M. R., Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Struct. 1996. Vol. 9, № 10. P. 913–933. DOI: [https://doi.org/10.1016/0951-8339\(96\)00006-8](https://doi.org/10.1016/0951-8339(96)00006-8)
10. Chapman C. J., Sorokin S. V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading // J. Sound Vib. 2005. Vol. 281, iss. 3. P. 719–741. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.013>
11. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // J. Fluids Struct. 2003. Vol. 17, iss. 7. P. 927–939. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00050-1](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00050-1)
12. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // J. Sound Vib. 2009. Vol. 326, iss. 1–2. P. 332–339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
13. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // J. Sound Vib. 1993. Vol. 163, iss. 2. P. 231–259. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1162>
14. Агеев Р. В., Быкова Т. В., Кондратова Ю. Н. Математическое моделирование взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругими стенками канала, установленного на вибрирующем основании // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 48–54. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-48-54>
15. Faria C. T., Inman D. J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mech. Syst. Signal Processing. 2014. Vol. 45, iss. 2. P. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003>
16. Могилевич Л. И., Попов В. С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 3, С. 42–55.
17. Алексеев В. В., Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А. Резонансные колебания упругой мембраны на дне бассейна с тяжелой жидкостью // ЖТФ. 1999. Т. 69. № 8, С. 37–42.
18. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation // J. Phys. : Conf. Ser. 2018. Vol. 944. 012057. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
19. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak Foundation // J. Phys. : Conf. Ser. 2018. Vol. 944. 012081. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
20. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупруго-пластических элементов конструкций. М. : Физматлит, 2005. 576 с.
21. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойного упругопластического стержня на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 160–168.
22. Леоненко Д. В., Старовойтов Э. И. Тепловой удар по круглой трехслойной пластине на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 1. С. 141–149.
23. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>



24. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient // *Meccanica*. 2016. Vol. 51, № 3. P. 725–739. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
25. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 196–208. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
26. Kramer M. R., Liu Z., Young Y. L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 254–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.017>
27. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2014. № 1. С. 3–11.
28. Popov V. S., Mogilevich L. I., Grushenkova E. D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer // Radionov A., Kravchenko O., Guzeev V., Rozhdestvenskiy Y. (eds). *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering. ICIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham : Springer, 2019. P. 459–467. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_49
29. Chernenko A., Kondratov D., Mogilevich L., Popov V., Popova E. Mathematical modeling of hydroelastic interaction between stamp and three-layered beam resting on Winkler foundation // *Studies in Systems, Decision and Control*. 2019. Vol. 199. P. 671–681. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_54
30. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
31. Пановко Я. Г., Губанова И. И. *Устойчивость и колебания упругих систем*. М. : Наука, 1987. 352 с.
32. Van Dyke M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Stanford : Parabolic Press, 1975. 271 p.

Образец для цитирования:

Быкова Т. В., Грушенкова Е. Д., Попов В. С., Попова А. А. Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 351–366. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>

Hydroelastic Response of a Sandwich Plate Possessing a Compressible Core and Interacting with a Rigid Die Via a Viscous Fluid Layer

T. V. Bykova, E. D. Grushenkova, V. S. Popov, A. A. Popova

Tatyana V. Bykova, <https://orcid.org/0000-0002-9634-3571>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, tbykova69@mail.ru

Ekaterina D. Grushenkova, <https://orcid.org/0000-0002-5090-9429>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, katnok.09041992@gmail.com



Victor S. Popov, <https://orcid.org/0000-0002-9582-7195>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, vic_p@bk.ru

Anna A. Popova, <https://orcid.org/0000-0002-7786-1680>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, anay_p@bk.ru

The three-layered plate interaction with a rigid die through a layer of viscous fluid was investigated. The plate and rigid die formed a narrow channel with rectangular parallel walls. The channel was completely filled with a viscous incompressible fluid. The fluid movement in the channel was studied as a creeping one. The motion law of the rigid die was considered to be given as a harmonic one and the forced steady-state oscillations problem of the sandwich plate was considered. The upper and lower face sheets of the plate satisfied Kirchhoff's hypotheses, as well as, the core was assumed a compressible one. The displacements of the channel walls were believed to be much smaller than the distance between them, and the longitudinal size of the channel was considered to be much larger than its transverse one. The plane hydroelastic problem consisting of the Navier – Stokes equations, the continuity equation and the dynamics equations of the three-layered plate with compressible core was studied. The boundary conditions of the problem were the no-slip conditions, the conditions for pressure at the channel edges and the simply supported conditions at the plate edges. In the course of study, normal and shear stresses of the fluid, acting on the upper face sheet of the plate were taken into account. The elastic displacements of the plate layers were chosen in the form of a trigonometric function series of the longitudinal coordinate. From the solution of the problem, expressions of the fluid layer hydrodynamic parameters and the plate layers elastic displacements were obtained. Also, the frequency-dependent amplitude distribution functions of the plate layers displacements and the pressure of the viscous fluid layer were constructed.

Keywords: hydroelasticity, oscillations, three-layered plate, compressible core, viscous liquid, rigid die.

Received: 13.03.2019 / Accepted: 09.04.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00127-a, No. 19-01-00014-a).

References

1. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. Roy. Soc. A*, 1921, vol. 98, pp. 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
2. Amabili M., Kwak M. K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revisiting the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, iss. 7, pp. 743–761. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
3. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem. *J. Sound Vib.*, 2001, vol. 245, iss. 2, pp. 261–283. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3560>
4. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface. *J. Sound Vib.*, 2013, vol. 332, iss. 12, pp. 3064–3085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
5. Alekseev V. V., Indeitsev D. A., Mochalova Yu. A. Vibration of a flexible plate in contact with the free surface of a heavy liquid. *Tech. Phys.*, 2002, vol. 47, iss. 5, pp. 529–534. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1479977>



6. Ankilov A. V., Vel'misov P. A., Tamarova Iu. A. Research on dynamics and stability of an elastic element of the flow channel. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 94–107 (in Russian).
7. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenkov V. P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 6, pp. 821–833. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462816060132>
8. Avramov K. V., Strel'nikova E. A. Chaotic oscillations of plates interacting on both sides with a fluid flow. *Int. Appl. Mech.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 303–309. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0633-y>
9. Haddara M. R., Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates. *Marine Struct.*, 1996, vol. 9, no. 10, pp. 913–933. DOI: [https://doi.org/10.1016/0951-8339\(96\)00006-8](https://doi.org/10.1016/0951-8339(96)00006-8)
10. Chapman C. J., Sorokin S. V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading. *J. Sound Vib.*, 2005, vol. 281, iss. 3, pp. 719–741. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.013>
11. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid. *J. Fluids Struct.*, 2003, vol. 17, iss. 7, pp. 927–939. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00050-1](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00050-1)
12. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, iss. 1–2, pp. 332–339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
13. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system. *J. Sound Vib.*, 1993, vol. 163, iss. 2, pp. 231–259. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1162>
14. Ageev R. V., Bykova T. V., Kondratova J. N. Mathematical Modeling of Interaction Between Layer of Viscous Liquid and Elastic Walls of Channel, Which Was Installed on Vibration Foundation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 2, pp. 48–54 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-48-54>
15. Faria C. T., Inman D. J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Processing*, 2014, vol. 45, iss. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.12.003>
16. Mogilevich L. I., Popov V. S. Investigation of the interaction between a viscous incompressible fluid layer and walls of a channel formed by coaxial vibrating discs. *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 3, pp. 375–388. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462811030033>
17. Alekseev V. V., Indeitsev D. A., Mochalova Yu. A. Resonant oscillations of an elastic membrane on the bottom of a tank containing a heavy liquid. *Tech. Phys.*, 1999, vol. 44, no. 8, pp. 903–907. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1259402>
18. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 944, 012057. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
19. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak Foundation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 944, 012081. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
20. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplasticheskikh elementov konstruksii* [Mechanics of layered viscoelastoplastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 576 p. (in Russian).
21. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 291–298. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441102018X>



22. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation. *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 1. pp. 111–118. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654412010116>
23. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Place Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
24. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, no. 3. P. 725–739. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
25. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
26. Kramer M. R., Liu Z., Young Y. L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water. *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 254–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.017>
27. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S. Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 1, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010026>
28. Popov V. S., Mogilevich L. I., Grushenkova E. D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer. In: Radionov A., Kravchenko O., Guzeev V., Rozhdestvenskiy Y. (eds). *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering. ICIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham, Springer, 2019, pp. 459–467. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_49
29. Chernenko A., Kondratov D., Mogilevich L., Popov V., Popova E. Mathematical modeling of hydroelastic interaction between stamp and three-layered beam resting on Winkler foundation. *Studies in Systems, Decision and Control*, 2019, vol. 199, pp. 671–681. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_54
30. Loitsianskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p. (in Russian).
31. Panovko Ia. G., Gubanova I. I. *Ustoichivost' i kolebaniia uprugikh sistem* [Stability and Oscillations of Elastic Systems]. Moscow, Nauka, 1987. 352 p. (in Russian).
32. Van Dyke M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Stanford, Parabolic Press, 1975. 271 p.

Cite this article as:

Bykova T. V., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic Response of a Sandwich Plate Possessing a Compressible Core and Interacting with a Rigid Die Via a Viscous Fluid Layer. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 351–366 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>
