



УДК 519.21

Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим ММРР-поток

Е. Н. Чернышова, Е. Ю. Лисовская

Чернышова Елизавета Николаевна, студент кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, chernishova@stud.tsu.ru

Лисовская Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, lisovskaya-eyu@rudn.ru

В данной работе рассматривается ресурсная система с неограниченным числом приборов, предоставляемых ресурсов и параллельным обслуживанием заявок, поступающих в систему согласно ММРР-поток. С помощью комбинации методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа доказывается, что совместное асимптотическое распределение вероятностей суммарных объемов занятого ресурса каждого типа сходится к двумерному гауссовскому распределению в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменениях состояний цепи Маркова. Находятся параметры асимптотического (гауссовского) распределения вероятностей суммарных объемов занятого ресурса на блоках системы. Проводится численный анализ точности аппроксимации и определяется область применимости асимптотических результатов.

Ключевые слова: ресурсные системы массового обслуживания, метод динамического просеивания, асимптотический анализ, гауссовская аппроксимация.

Поступила в редакцию: 07.06.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликовано: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-400-410>

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время ввиду широкой востребованности мобильных и телекоммуникационных сетей значительную роль играет исследование моделей массового обслуживания [1, 2]. Эти математические модели используются для анализа показателей и улучшения эффективности систем. Однако для более правдоподобного описания трафика в сетях рекомендуется использовать марковские или рекуррентные потоки событий.

Помимо этого, ввиду неоднородности услуг (телефонные звонки, смс-сообщения, интернет-трафик) необходимо учитывать объем обрабатываемой информации во избежание потери или искажения данных из-за нехватки ресурсов [3, 4]. В связи с этим на сегодняшний день актуальной является разработка новых ресурсных моделей, сформулированных в терминах систем массового обслуживания (СМО), которые бы позволили оценить объемы занятого ресурса. Системы с неограниченным числом



приборов используют для аппроксимации многолинейных систем при условии малой вероятности отказа в обслуживании [5]. Кроме того, модели с неограниченным числом приборов позволяют оценить возможную загрузку в системе и применять меры по предотвращению перегрузки систем с ограниченным числом приборов и минимизации потерь, вызванных нехваткой свободного канала и/или ресурса.

Отметим, что адекватной математической моделью реальных потоков являются дважды стохастические МАР-потоки (Markovian Arrival Process) и его частные случаи, в том числе ММРР (Markov Modulated Poisson Process), предложенные Д. М. Lucantoni и М. Ф. Neuts в 1991 г. [6, 7]. В данной работе с помощью методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа исследуются случайные процессы суммарных объемов занятого ресурса в СМО с входящим ММРР-потоком заявок и их параллельным обслуживанием.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из двух блоков, каждый из которых имеет неограниченное число приборов; на вход поступает ММРР-поток требований, управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицами инфинитесимальных характеристик Q и условных интенсивностей Λ (рис. 1).

Заявка, пришедшая в СМО, попадает в каждый блок и мгновенно занимает любой свободный прибор, где обслуживается в течение случайного времени. Функция распределения вероятностей времени обслуживания на первом блоке — $B_1(\tau) = P\{\xi_1 < \tau\}$, на втором — $B_2(\tau) = P\{\xi_2 < \tau\}$. Функции распределения вероятностей для случайного объема ресурсов на первом и втором блоках — $G_1(y) = P\{\nu_1 < y\}$ и $G_2(y) = P\{\nu_2 < y\}$ соответственно. После завершения обслуживания требование покидает систему, освобождая прибор и все занимаемые ресурсы. Количество занимаемого ресурса и время обслуживания не зависят друг от друга. Обозначим через $V_1(t)$ и $V_2(t)$ суммарный объем занятого ресурса на первом и втором блоках в момент времени t соответственно. Ставится задача исследования случайного двумерного процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$. Важно отметить, что данный процесс не является Марковским, для его дальнейшего исследования марковизируем процесс, используя метод динамического просеивания.

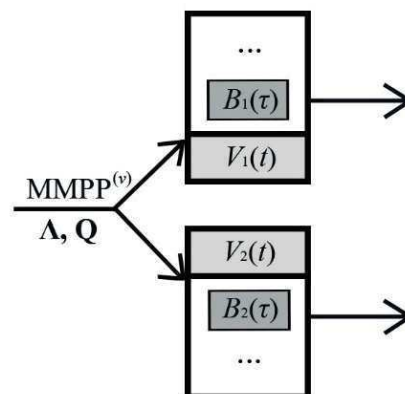


Рис. 1. Ресурсная СМО с входящим ММРР-потоком и параллельным обслуживанием

Fig. 1. Resource QS with ММРР arrivals and parallel service

На рис. 2 изображены три оси времени. Ось под номером 0 отображает моменты наступления событий входящего потока. Зададим функции, определяющие динамическую вероятность просеивания на оси 1 и 2. Вероятность просеивания на i -ю ось равна вероятности того, что заявка, попавшая в i -й блок в момент времени t , не закончила обслуживание к моменту времени T ($i = 1, 2$). Зафиксируем произвольный момент времени $t < T$. Функция $S_1(t) = 1 - B_1(T - t)$ — вероятность просеивания на ось 1, $S_2(t) = 1 - B_2(T - t)$ — на ось 2, $S_1(t) \cdot S_2(t) = (1 - B_1(T - t)) \cdot (1 - B_2(T - t))$ — на оси 1 и 2 одновременно. Обозначим $W_1(t)$ и $W_2(t)$ как суммарный объем занятого ресурса в СМО после просеивания.

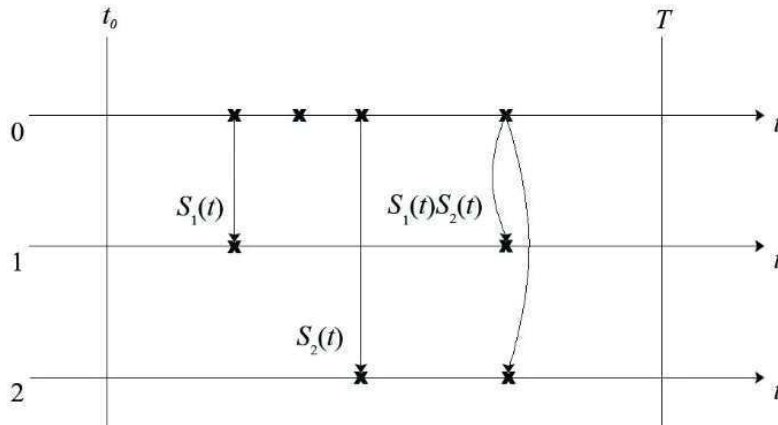


Рис. 2. Просеивание заявок входящего потока событий
Fig. 2. Screening of arrival customers

Для исследуемого процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$ справедливо в момент времени T :

$$P\{V_1(T) < z_1, V_2(T) < z_2\} = P\{W_1(T) < z_1, W_2(T) < z_2\}, \quad z_1, z_2 > 0. \quad (1)$$

Для дальнейшего исследования процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$ будем использовать процесс $\{W_1(t), W_2(t)\}$.

2. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОВОРА

Рассмотрим случайный процесс $\{k(t), W_1(t), W_2(t)\}$, где $k(t)$ — состояние цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток. Данный процесс является Марковским для функции распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, W_1(t) < w_1, W_2(t) < w_2\} = P(k, w_1, w_2), \quad k = 1, K, w_1, w_2 > 0.$$

Используя Δt -метод, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, w_1, w_2, t)}{\partial t} = & \lambda_k S_1(t) \left[\int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) - P(k, w_1, w_2, t) \right] + \\ & + \lambda_k S_2(t) \left[\int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) - P(k, w_1, w_2, t) \right] + \\ & + \lambda_k S_1(t) S_2(t) \left[\int_0^{w_2} \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y_1, w_2 - y_2, t) dG_1(y_1) dG_2(y_2) + P(k, w_1, w_2, t) - \right. \\ & \left. - \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) - \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) \right] + \sum_{\nu \neq k} P(\nu, w_1, w_2, t) q_{\nu k} \quad (2) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$P(k, w_1, w_2, t_0) = \begin{cases} r(k), & w_1 = w_2 = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

где $r(k)$ — стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$.



Введем характеристические функции вида:

$$h(k, w_1, w_2, t) = \int_0^\infty e^{ju_1 w_1} \int_0^\infty e^{ju_2 w_2} P(k, dw_1, dw_2, t),$$

где j — мнимая единица.

Перепишем (2)–(3) для характеристических функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(k, u_1, u_2, t)}{\partial t} = & \lambda_k h(k, u_1, u_2, t) [S_1(t)(G_1^*(u_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(u_2) - 1) + \\ & + S_1(t)S_2(t)(G_1^*(u_1) - 1)(G_2^*(u_2) - 1)] + \sum_{\nu \neq k} h(\nu, u_1, u_2, t) q_{\nu k} \end{aligned}$$

с начальным условием

$$h(k, u_1, u_2, t_0) = r(k),$$

где

$$G_i^*(u_i) = \int_0^\infty e^{ju_i y} dG_i(y).$$

Запишем систему дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{h}(u_1, u_2, t) [\mathbf{\Lambda} [S_1(t)(G_1^*(u_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(u_2) - 1) + \\ & + S_1(t)S_2(t)(G_1^*(u_1) - 1)(G_2^*(u_2) - 1)] + \mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (4)$$

с начальным условием

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t_0) = \mathbf{r}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = [h(1, u_1, u_2, t), \dots, h(K, u_1, u_2, t)], \quad \mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)],$$

\mathbf{r} — вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, удовлетворяющая системе матричных линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \end{cases} \quad (6)$$

\mathbf{e} — единичный вектор-столбец.

3. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Для решения задачи (4)–(5) воспользуемся методом асимптотического анализа в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова. Обозначим $\mathbf{\Lambda} = N\bar{\mathbf{\Lambda}}$ и $\mathbf{Q} = N\bar{\mathbf{Q}}$, где N — некоторый параметр. Перепишем уравнение (4)–(5), используя введенные обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{h}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{h}(u_1, u_2, t) [\bar{\mathbf{\Lambda}} [S_1(t)(G_1^*(u_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(u_2) - 1) + \\ & + S_1(t)S_2(t)(G_1^*(u_1) - 1)(G_2^*(u_2) - 1)] + \bar{\mathbf{Q}}] \end{aligned} \quad (7)$$

с начальным условием (5).



Теорема. Совместное асимптотическое распределение вероятностей двумерного процесса суммарных объемов занятого ресурса на блоках СМО с параллельным обслуживанием в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний управляющей ММРР-потокот цепи Маркова является двумерным гауссовским распределением вероятностей с вектором математических ожиданий

$$\mathbf{a} = \left[N\lambda a_1^{(1)} b_1 \quad N\lambda a_1^{(2)} b_2 \right]$$

и матрицей ковариаций

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} N\lambda a_2^{(1)} b_1 + N\kappa \left(a_1^{(1)} \right)^2 \beta_1 & N(\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} \\ N(\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} & N\lambda a_2^{(2)} b_2 + N\kappa \left(a_1^{(2)} \right)^2 \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Выполним в уравнении (7) следующие замены:

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, \quad u_1 = \varepsilon x_1, \quad u_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}(u_1, u_2, t) = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t, \varepsilon), \quad (8)$$

получим:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t, \varepsilon) \left[\overline{\mathbf{A}} [S_1(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1) + S_1(t)S_2(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1)] + \overline{\mathbf{Q}} \right] \quad (9)$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \quad (10)$$

Найдем асимптотическое решение задачи (9)–(10) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Этап 1. Выполним в (9) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, t) \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Сравним это уравнение с первым из системы (6), его решение можно записать в виде

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, t) = \mathbf{r} \Phi_1(x_1, x_2, t), \quad (11)$$

где $\Phi_1(x_1, x_2, t)$ — скалярная функция, удовлетворяющая начальному условию $\Phi_1(x_1, x_2, t_0) = 1$.

Этап 2. Умножим (9) на вектор \mathbf{e} , после чего подставим выражение (11), учитывая разложение экспоненты в ряд Тейлора до второго слагаемого включительно $e^{j\varepsilon x} = 1 + j\varepsilon x + O(\varepsilon^2)$, разделим на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая начальное условие для функции $\Phi_1(x_1, x_2, t)$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(x_1, x_2, t) \left[jx_1 a_1^{(1)} S_1(t) + jx_2 a_1^{(2)} S_2(t) \right],$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_1(x_1, x_2, t) = \exp \left\{ jx_1 \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + jx_2 \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right\}.$$



Выполнив обратные замены (8), запишем асимптотическое приближенное равенство

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right\}.$$

Перейдем к построению гауссовской аппроксимации суммарных объемов занятого ресурса на блоках системы. Представим функцию $\mathbf{h}(u_1, u_2, t)$ как

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t) \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right\}. \quad (12)$$

Проведем следующие замены:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \quad u_1 = \varepsilon x_1, \quad u_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t) = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon), \quad (13)$$

а также, учитывая (12), запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon) \left[j\varepsilon x_1 \lambda a_1^{(1)} S_1(t) + j\varepsilon x_2 \lambda a_1^{(2)} S_2(t) \right] = \\ = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon) \left[\overline{\mathbf{\Lambda}} [S_1(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1) + \right. \\ \left. + S_1(t)S_2(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1)] + \overline{\mathbf{Q}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r} \quad (15)$$

Найдем асимптотическое решение задачи (14)–(15) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Этап 1. Выполним предельный переход в (14) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t) \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0},$$

с учетом (6) решение можно записать в виде

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t) = \mathbf{r} \Phi_2(x_1, x_2, t), \quad (16)$$

где $\Phi_2(x_1, x_2, t)$ — скалярная функция, удовлетворяющая начальному условию $\Phi_2(x_1, x_2, t_0) = 1$.

Этап 2. Представим функцию $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t)$ в виде разложения:

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t) = \Phi_2(x_1, x_2, t) \left[\mathbf{r} + \mathbf{g}(j\varepsilon x_1 \lambda a_1^{(1)} S_1(t) + j\varepsilon x_2 \lambda a_1^{(2)} S_2(t)) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

где \mathbf{g} — некоторая вектор-строка, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{g} \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{r}(\lambda \mathbf{I} - \overline{\mathbf{\Lambda}}), \\ \mathbf{g} \mathbf{e} = \text{const}, \end{cases}$$

где \mathbf{I} — диагональная единичная матрица.



Этап 3. Умножим обе части уравнения (14) на единичный вектор e . Используем разложения (17) и экспоненты в ряд Тейлора до третьего слагаемого включительно $e^{j\epsilon x} = 1 + j\epsilon x + \frac{(j\epsilon x)^2}{2} + O(\epsilon^3)$. Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \Phi_2(x_1, x_2, t) \left[\frac{(jx_1)^2}{2} \left(\lambda a_2^{(1)} S_1(t) + \kappa \left(a_1^{(1)} \right)^2 S_1^2(t) \right) + \frac{(jx_2)^2}{2} \left(\lambda a_2^{(2)} S_2(t) + \kappa \left(a_1^{(2)} \right)^2 S_2^2(t) \right) + jx_1 jx_2 (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} S_1(t) S_2(t) \right].$$

Решение уравнения с учетом начальных условий имеет вид

$$\Phi_2(x_1, x_2, t) = \exp \left\{ \frac{(jx_1)^2}{2} \left(\lambda a_2^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa \left(a_1^{(1)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \frac{(jx_2)^2}{2} \left(\lambda a_2^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa \left(a_1^{(2)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + jx_1 jx_2 (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставим полученное равенство в (16), проведем обратные замены (12) и (13), получим приближенное асимптотическое равенство

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \frac{(ju_1)^2}{2} \left(N \lambda a_2^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N \kappa \left(a_1^{(1)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \frac{(ju_2)^2}{2} \left(N \lambda a_2^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N \kappa \left(a_1^{(2)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + ju_1 ju_2 N (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \right\}.$$

Полагая $t = T$, $t_0 \rightarrow -\infty$, учитывая (1), сделаем вывод о том, что асимптотическая характеристическая функция случайного процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$ в стационарном режиме имеет вид гауссовской характеристической функции

$$h(u_1, u_2) \approx \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} b_1 + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} b_2 + ju_1 ju_2 N (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} + \frac{(ju_1)^2}{2} \left(N \lambda a_2^{(1)} b_1 + N \kappa \left(a_1^{(1)} \right)^2 \beta_1 \right) + \frac{(ju_2)^2}{2} \left(N \lambda a_2^{(2)} b_2 + N \kappa \left(a_1^{(2)} \right)^2 \beta_2 \right) \right\},$$

где

$$b_i = \int_0^\infty (1 - B_i(\tau)) d\tau, \quad \beta_i = \int_0^\infty (1 - B_i(\tau))^2 d\tau, \quad \beta_{12} = \int_0^\infty (1 - B_1(\tau))(1 - B_2(\tau)) d\tau,$$

откуда следует формулировка теоремы. □



4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Эмпирическое распределение вероятностей построим на основе имитационной модели [8]. В существующей программе учтем возможность «копирования» каждого поступающего требования на второй блок. Исходные данные для рассматриваемой ресурсной системы с параллельным обслуживанием зададим следующим образом.

1. Входящий ММРР-поток определяется матрицами:

$$\Lambda = N \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = N \cdot \begin{bmatrix} -0,8 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & -0,8 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим интенсивность потока $\lambda = N$.

2. Время обслуживания имеет гамма-распределение вероятностей с параметрами $\alpha_1 = \beta_1 = 0,5$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 1,5$ для первого и второго блоков соответственно, тогда среднее время обслуживания $b_1 = 1$ и $b_2 = 1$.
3. Количество ресурса, необходимого для обслуживания одной заявки, имеет равномерное распределение вероятностей на интервале $[1, 2]$ на первом блоке и на $[0, 1]$ на втором.

Была проведена серия имитационных экспериментов с увеличением значений N . В таблице приведены значения расстояний Колмогорова между функциями распределения вероятностей суммарного объема занятого ресурса на первом и втором блоках системы — Δ_1 и Δ_2 соответственно, а также между функциями распределения двумерных распределений вероятностей суммарных объемов на обоих блоках Δ_{12} для различных значений параметра N .

Расстояния Колмогорова между асимптотической и эмпирической функциями распределения вероятностей

Kolmogorov distances between the asymptotic and empirical distributions

N	1	3	5	7	10	20	50	100
Δ_1	0.373	0.111	0.061	0.041	0.028	0.018	0.011	0.008
Δ_2	0.000	0.101	0.053	0.036	0.025	0.016	0.010	0.007
Δ_{12}	0.369	0.110	0.059	0.040	0.028	0.018	0.011	0.008

На рис. 3 и 4 изображены графики распределения вероятностей суммарного объема занятого ресурса на первом и втором блоках системы соответственно.

Из таблицы можем сделать вывод о том, что точность аппроксимации возрастает при увеличении асимптотического параметра N (при увеличении интенсивности входящего потока), а данные рис. 3 и 4 демонстрируют это.

Определив область применимости аппроксимации в тех случаях, когда расстояние Колмогорова $\Delta < 0.05$, т.е. когда интенсивность входящего потока в 7 и более раз выше интенсивности обслуживания, зная числовые характеристики распределений, нетрудно оценить ограничение на размер буфера на блоках, например, по правилу «трех сигм».

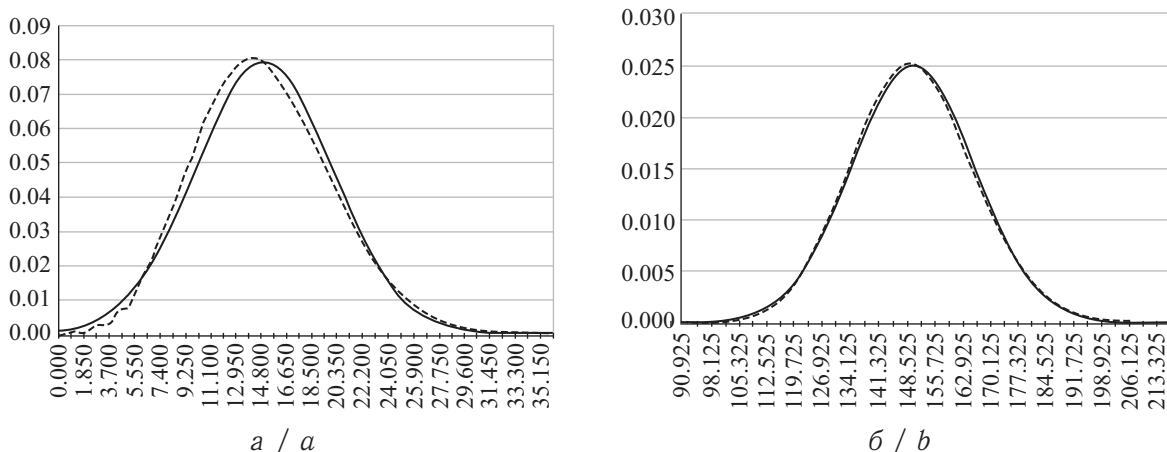


Рис. 3. Распределение (пунктирная линия — эмпирическое, сплошная линия — асимптотическое) вероятностей суммарного объема занятого ресурса на первом блоке системы: а) $N = 10$; б) $N = 100$

Fig. 3. Probability distribution (dashed line — empirical, solid line — asymptotic) of the total resource amount on the first system block: а) $N = 10$; б) $N = 100$

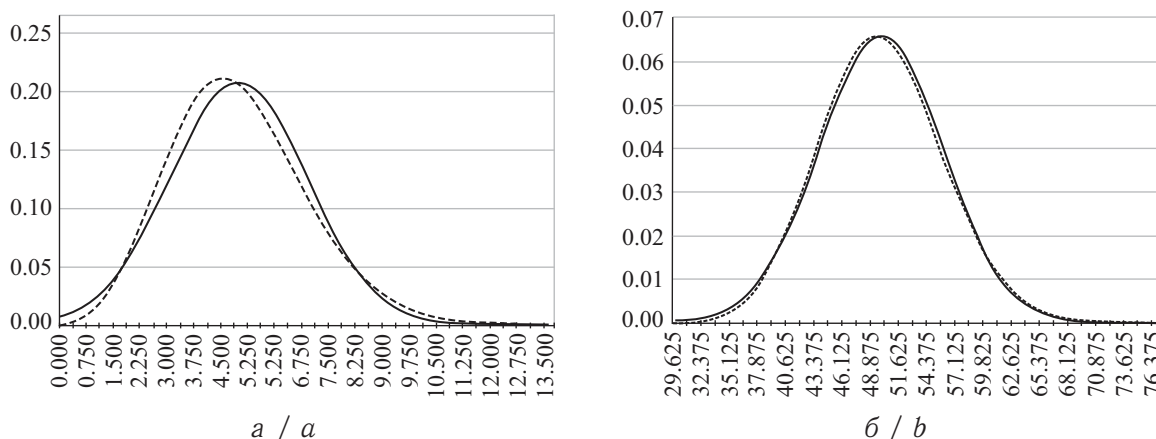


Рис. 4. Распределение (пунктирная линия — эмпирическое, сплошная линия — асимптотическое) вероятностей суммарного объема занятого ресурса на втором блоке системы: а) $N = 10$; б) $N = 100$

Fig. 4. Probability distribution (dashed line — empirical, solid line — asymptotic) of the total resource amount on the second system block: а) $N = 10$; б) $N = 100$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдены основные вероятностные характеристики ресурсной системы параллельного обслуживания с входящим ММРР-потокком заявок. Используя комбинацию методов динамического просеивания и асимптотического анализа, было показано, что совместное асимптотическое распределение вероятностей суммарных объемов занятого ресурса каждого типа сходится к двумерному гауссовскому распределению в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова. Представлен численный анализ точности аппроксимации.

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору Пизанского университета Микеле Пагано за совместную работу над программой имитационного моделирования, а также профессору Национального исследовательского Томского



государственного университета, доктору физико-математических наук Светлане Петровне Моисеевой за идеи и рекомендации в процессе проведения исследования.

Библиографический список

1. Гайдамака Ю. В., Зарилова Э. Р., Орлов Ю. Н. Анализ зависимости параметров модели сервера протокола установления сессий с групповым поступлением сообщений от распределения длины группы сообщений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 27. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-27> (дата обращения: 07.05.2019).
2. Ефросинин Д. В. Методы анализа управляемых динамических систем : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2013. 332 с.
3. Galileyskaya A. On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-Resource QS with Renewal Arrival Process // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Томск : Изд-во НТЛ, 2019. Ч. 2. С. 80–85.
4. Лисовская Е. Ю., Моисеев А. Н., Моисеева С. П., Пагано М. Моделирование процессов обработки данных физических экспериментов в виде немарковской многоресурсной системы массового обслуживания // Изв. вузов. Физика. 2018. Т. 61. № 12 (732). С. 39–46.
5. Mandelbaum A., Zeltyn S. The impact of customers' patience on delay and abandonment: Some empirically-driven experiments with the $M/M/n + G$ queue // OR Spectrum. 2004. Vol. 26. P. 377–411. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00291-004-0164-8>
6. Neuts M. F. Models based on the Markovian arrival process // IEICE Trans. Comm. 1992. Vol. E-75B, № 12. P. 1255–1265.
7. Lucantoni D. M. New results on single server queue with a batch Markovian arrival process // Stoch. Models. 1991. Vol. 7, № 1. P. 1–46. DOI: <https://doi.org/10.1080/15326349108807174>
8. Имитационная модель бесконечнолинейной системы обслуживания требований случайного объема с ММРР входящим потоком / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева, М. Пагано; правообладатель Нац. исслед. Том. гос. ун-т (RU). № 2017612202; заяв. 17.03.2017; зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ 12.05.2017.

Образец для цитирования:

Чернышова Е. Н., Лисовская Е. Ю. Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим ММРР-потоком // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 400–410. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-400-410>

On a Total Resource Amounts at the System with Parallel Service and MMPP Arrivals

E. N. Chernishova, E. Yu. Lisovskaya

Elizaveta N. Chernishova, <https://orcid.org/0000-0002-5261-7358>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, chernishova@stud.tsu.ru

Ekaterina Yu. Lisovskaya, <https://orcid.org/0000-0001-7345-5565>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, ekaterina_lisovs@mail.ru



In this paper, we consider a resource system with an unlimited resources and servers number, with parallel customers servicing, arriving at the system according to the MMPP. Using a combination of multidimensional dynamic screening methods and asymptotic analysis, it is proved that the joint asymptotic probability distribution of the total resource amounts converges to a bi-dimensional Gaussian distribution under conditions of increasing intensity of MMPP. The parameters of the asymptotic probability distribution are found. A numerical analysis of the approximation accuracy is carried out.

Keywords: resource queue, dynamic screening method, asymptotic analysis, approximation.

Received: 07.06.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: The authors are grateful to Professor Michele Pagano of the University of Pisa for joint work on the simulation program, as well as to Professor Svetlana Moiseeva of the National Research Tomsk State University for ideas and recommendations during the study.

References

1. Gajdamaka Yu. V., Zaripova E. R., Orlov Yu. N. Analysis of the impact the batch size distribution on parameters of the SIP-server queueing model with batch arrivals. *KIAM Preprint*, Moscow, 2015, no. 27. 16 p. (in Russian). Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-27> (accessed 07 May 2019).
2. Efrosinin D. V. *Metody analiza upravlyaemykh dinamicheskikh sistem* [Methods of analysis of controlled dynamic systems]. Diss. Dr. Sci. (Phis. and math.). Moscow, 2013. 332 p. (in Russian).
3. Galileyskaya A. On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-Resource QS with Renewal Arrival Process. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2019): materialy XVIII Mezhdunar. konf. im. A. F. Terpugova* [Information Technology and Mathematical Modeling (ITMM-2019). Materials of the XVIII Int. conf. named after A. F. Terpugov]. Tomsk, Izd-vo NTL, 2019, pt. 2, pp. 80–85.
4. Lisovskaya E. Yu., Moiseev A. N., Moiseeva S. P., Pagano M. Modeling of processing of physics experimental data in the form of non-Markovian multi-resource queueing system. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 2018, vol. 61, no. 12 (732), pp. 39–46 (in Russian).
5. Mandelbaum A., Zeltyn S. The impact of customers' patience on delay and abandonment: Some empirically-driven experiments with the $M/M/n + G$ queue. *OR Spectrum*, 2004, vol. 26, pp. 377–411. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00291-004-0164-8>
6. Neuts M. F. Models based on the Markovian arrival process. *IEICE Trans. Comm.*, 1992, vol. E-75B, no. 12, pp. 1255–1265.
7. Lucantoni D. M. New results on single server queue with a batch Markovian arrival process. *Stoch. Models*, 1991, vol. 7, no. 1, pp. 1–46. DOI: <https://doi.org/10.1080/15326349108807174>
8. *Simulation model of an infinitely linear system for servicing requirements of a random volume with an input flow MMP* / E. Yu. Lisovskaya, S. P. Moiseeva, M. Pagano; copyright holder National Research Tomsk State University (RU). No. 2017612202; declared 17.03.2017; register in the Register of computer programs 12.05.2017 (in Russian).

Cite this article as:

Chernishova E. N., Lisovskaya E. Yu. On a Total Resource Amounts at the System with Parallel Service and MMPP Arrivals. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 400–410 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-400-410>
