



что является существенным преимуществом примененного подхода. Решенные задачи о ползучести, релаксации напряжений и разгрузке в шаре с одиночным сферическим дефектом сплошности имеют своей целью описание экспериментально известного процесса залечивания микропор.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-33064 мол_а_вед).

Библиографический список

1. Горелов В. И. Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикладная механика и техническая физика. 1984. № 5. С. 157–158.
2. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
3. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.

The Loading Parameters Calculation of a Hollow Sphere at the Large Elastocreep Deformations

E. V. Murashkin

Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

We presented a model of large elastocreep deformations. Separation of Almansi strain tensor is determined by the quadratic form of reversible and irreversible components. We consider spherically symmetric deformation of a hollow sphere in the steady creep process. Numerical solution of boundary-value problem was obtained. A method for determining loading force on the deformed state was proposed. Functions of the external loading force according to the laws of a given change in the displacement field were constructed.

Key words: large deformation, creep, relaxation, elasticity.

References

1. Gorelov V. I. Effect of high pressure on mechanical characteristics of aluminum alloys. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1984, vol. 25, iss. 5, pp. 813–814.
2. Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium. *Doklady physics*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
3. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium. *Doklady physics*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 694–696.

УДК 519.654

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Р. Т. Файзуллин¹, Р. Р. Файзуллин²

¹Доктор технических наук, профессор кафедры комплексной защиты информации, Омский государственный технический университет, r.t.faizullin@mail.ru

²Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры комплексной защиты информации, Омский государственный технический университет, strannik11@list.ru

Предложены способы восстановления функциональной зависимости с заданным разрывом. Приведены примеры применения алгоритма построения функций с особенностью. Первый способ основан на формальной минимизации функции методом случайного поиска. Второй использует информативность данных.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, разрыв, особенность.



Метод наименьших квадратов (МНК) широко используется для решения различных задач прикладной математики и техники: многомерных задач аппроксимации зависимостей массивов [2], обобщений МНК для нелинейных задач [1], задачи уравнивания [6], разнообразных аппроксимаций [3–5]. Также метод лежит в основе построения фильтра Калмана–Бюсси [7].

Особый интерес представляет случай, когда функциональная зависимость, которая связывает условия эксперимента и проведенные измерения, предполагает наличие особенностей с известными характеристиками. Задачи, возникающие в этом случае, разнообразны и их следует рассматривать по мере усложнения. Очевидный первый шаг — это задача нахождения точки разрыва первого рода для функции с ограниченной вариацией, заданной с ошибками. Эта проблема полностью решена в работах Агеева и его учеников. Она имеет отношение к проблеме восстановления контуров на изображениях, например, [8]. Следующим шагом является решение задач с дополнительными условиями на разрывах, например, задача с заданным разрывом функции.

В качестве первого примера рассмотрим следующую простую задачу (см. [9]). Пусть известно, что на некотором интервале функциональная зависимость между условиями эксперимента и результатом измерений имеет вид: $f(x) = A_1x + B_1$, а на другом интервале $f(x) = A_2x + B_2$. Необходимо найти точку, в которой происходит излом или, иначе говоря, известен разрыв первого рода производной при наличии ошибок измерения. Эта задача имеет непосредственное отношение к практике: в проблеме определения смены тренда в техническом анализе или в задаче определения аварийного участка на трассе магистрального продуктопровода. Функции $f(x) = A_i x + B_i$ определяют так называемые линии гидравлического уклона, где δ определяют ошибки датчиков, $F = f + \delta$ — показания датчиков. Точка излома характеризует место аварии или истечения транспортируемого носителя (горячей воды, нефти и т. п.), а значение разрыва производной — расход истекаемого продукта. Заметим, что разрыва самой функции не предполагается, кроме особо оговоренных случаев. Следует подчеркнуть важность проблемы для практики, определение места прорыва в итоге определяется визуально, при облете на вертолете.

Другим содержательным примером может служить задача представления целочисленных данных конечным рядом Фурье. Данные можно представить как набор целочисленных точек на плоскости и построить кусочно-линейную, выпуклую функцию f , которой они будут принадлежать.

Поясним это подробнее. Пусть нам заданы $2N$ целых чисел z_i . Образует набор N точек на плоскости, координаты которых задаются по правилу: $x_j = z_{2i}$, $y_j = z_{2i+1}$. Далее, упорядочим их по величине тангенса угла наклона к оси Ox y_j/x_j . Перейдем к координатам (u, v) по правилам: $u_1 = x_s$, $v_1 = y_s$, для всех j таких, что $y_s/x_s \geq y_j/x_j$, $u_{j+1} = u_j + x_m$, $v_{j+1} = v_j + y_m$, где m — номер точки, следующей по убыванию тангенса угла наклона к оси x . Очевидно, что по полученным точкам можно построить выпуклую, монотонно возрастающую, кусочно-линейную функцию.

Функция эта приближается частичной суммой тригонометрического ряда Фурье. Зная u_j , можно попытаться восстановить y_i с помощью МНК и учетом того, что полученная функция монотонно возрастающая и выпуклая и ее значения целочисленны. Отметим, что недостающий «хвост» ряда Фурье — это аналог ошибки измерений в классическом МНК.

Предположим, что известны: точка a на интервале $[0, L]$, значение разрыва функции D в точке a и вид функциональной зависимости. В этом случае можно применить МНК к обоим интервалам, разделенным точкой разрыва. Тогда, например, в случае линейных зависимостей знание значения разрыва очевидным образом позволяет получить систему из пяти уравнений для четырех неизвестных:

$$\begin{aligned} A_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 + B_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i &= \sum_{i=1}^{N_1} x_i y_i, \\ A_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i + B_1 N_1 &= \sum_{i=1}^{N_1} y_i, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A_2 \sum_{i=N_1+1}^N x_i^2 + B_2 \sum_{i=N_1+1}^N x_i &= \sum_{i=N_1+1}^N x_i y_i, \\
 A_2 \sum_{i=N_1+1}^N x_i + B_2(N - N_1) &= \sum_{i=N_1+1}^N y_i, \\
 |A_1 x + B_1 - A_2 x - B_2| &= D.
 \end{aligned}$$

Стандартный способ решения такой системы — это минимизация функции:

$$F(A_1, A_2, B_1, B_2, x) = \left(A_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 + B_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i - \sum_{i=1}^{N_1} x_i y_i \right)^2 + \dots + (|A_1 x + B_1 - A_2 x - B_2| - D)^2.$$

Данный подход возможно обобщить для случая разрыва производной. Добавляется 6-е уравнение $|A_1 - A_2| = C$ и слагаемое в функцию $(C - |A_1 - A_2|)^2$.

Обратим внимание на трудности в решении задачи: нормы, присутствующие в выражении для функции, различны, функция не дифференцируема.

Первым шагом алгоритма будет являться нахождение точки с разрывом функции первого рода. Отрезок $[0, L]$ разбивается на два интервала: $[0, \bar{a}]$, $(\bar{a}, L]$, где \bar{a} достаточно мало, и на каждом интервале находится решение МНК как функции f_1, f_2 . Считаем расстояние между ними в норме l_2 . Затем пошагово увеличиваем \bar{a} и для каждого значения \bar{a} вычисляем сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^{N_1} (y_i - A_1 x_i - B_1)^2 + \sum_{i=N_1+1}^N (y_i - A_2 x_i - B_2)^2.$$

Минимальное значение S будет соответствовать наиболее подходящему значению \bar{a} .

Для поиска нескольких особенностей методику можно модифицировать, выбирается маска $L = \bar{a} + K\Delta s$, т. е. отрезок длины \bar{a} , достаточно малый по сравнению с L , и последовательно смещая его с шагом Δs , получаем предположительные точки особенностей $a_m, m = 1, \dots, K$, с величинами разрывов производной $D_m, m = 1, \dots, K$. Далее, упорядочение по величине разрыва позволяет выявить скачок при некотором m_p . Это позволяет отделить изломы от артефактов.

Рассмотрим работу алгоритма на конкретном примере. Пусть задан фиксированный набор точек, координаты которых принимают значения, приведенные в следующей таблице.

Пример экспериментальной зависимости, маскирующей линию гидравлического уклона под влиянием нестационарных процессов

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	13	10	11	9	7	10	8	6	7	8	4	3
№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x	12	13	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25
y	5	2	1	3	16	2	1	-1	2	0	1	-1

Проведем поиск точки разрыва функции первого рода из условия $D \rightarrow \min$, иначе говоря, отрезок $[0, L]$ разбивается на два интервала: $[0, \bar{a}]$, $(\bar{a}, L]$, где \bar{a} достаточно мало, и на каждом интервале находится решение МНК как линейной функции f_1, f_2 . Считаем расстояние между ними в норме, согласованной с l_2 . Затем пошагово увеличиваем \bar{a} и для каждого значения \bar{a} вычисляем соответствующее D . В результате получаем набор чисел D , выбираем минимальное и находим x_m — координату этого «минимального разрыва», которая равна 16.67. Другими словами, это место, где нами ставится граница между приближающимися точки отрезками, из условия, что их концы в точке с абсциссой x_m находятся на минимальном расстоянии. Мы можем видеть на рис. 1, что концы этих отрезков довольно близки друг к другу, расчет дает величину 0.13 для расстояния между ними.

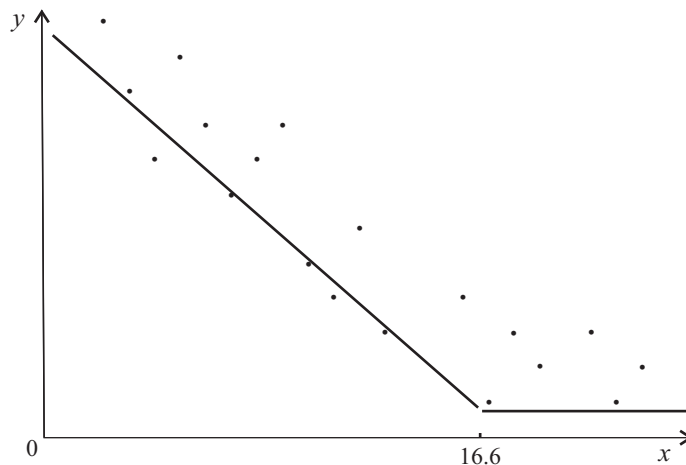


Рис. 1. График приближенной функции с разрывом

Отметим, что справа от перпендикуляра, восстановленного к Ox в точке 16.6, расположено существенно меньше половины точек из таблицы.

Допустим в реальной задаче, к примеру в расчете напоров, нам надо получить неразрывный график функции, т. е. разрыв функции мы желаем установить в $D = 0$. Если рассмотреть подход, связанный с минимизацией функции $F(A_1, A_2, B_1, B_2, x)$ методом случайного поиска, то уже при двух-трех итерациях получаются неуплучшаемые результаты. Будем искать коэффициенты двух приближающих прямых A_i и B_i относительно него. Рассматриваем вначале точку пространства переменных, получаемую из соображений минимума разрыва по вертикали: $A_1 = -0.646$, $B_1 = 11.613$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0.714$, $x = 16.66$. Среднеквадратичное отклонение для таких параметров равно 2.938. Проводим итерационный процесс случайного поиска на каждой итерации, создавая около текущей точки t 10 новых пробных точек $A_1^i + \delta_1$, $B_1^i + \delta_2$, $A_2^i + \delta_3$, $B_2^i + \delta_4$, $x^i + \delta_5$. Все δ_j^i равномерно распределены в промежутке $[-c_i, c_i]$, $c_1 = 0.1$, $c_{i+1} = c_i/2$. В 10 полученных точках рассчитывается значение функции F , из них (включая стартовую) выбирается точка с минимальным значением этой функции, она берётся за стартовую для новой итерации. В примере, когда были проведены 3 итерации, среднеквадратичное отклонение в сумме по обеим сторонам для итоговой точки разрыва составило 0.25. Отдельный вопрос составляет допустимость получаемых при случайном поиске решений, т. е. точное значение $D = 0$ получить не удастся. Но для второй рассмотренной задачи определения целочисленной точки это не существенно.

Другой способ основан на том соображении, что информативность различных частей данных различна. Обратимся к рассмотренному численному примеру. Очевидно, что полученная линейная зависимость слева заслуживает большего доверия, чем линейная зависимость справа. Дисперсия параметров прямой меньше в силу большего числа данных слева и оправданных гипотез о нормальности и отсутствии систематической ошибки.

Это позволяет решить проблему за счет небольшого изменения правой части графика. Мы будем рассчитывать минимум суммы квадратов расстояний точек до правого отрезка прямой $S_2 = \sum_{i=N_1+1}^N (y_i - A_3x_i - B_3)^2$ с условием, что ему принадлежит точка (x_m, y_m) , правая граница левого отрезка. Фактически, мы «поднимаем» левый край второго отрезка до совмещения с правым краем первого через равенство $A_1x_m + B_1 = y_m = A_3x_m + B_3$, а затем вычислим из соображений минимизации суммы квадратов отклонений S_2 угловой коэффициент второго отрезка A_3 . Результат изображен на рис. 2. Отличие между первоначальным и повернутым правыми отрезками равняется 3.5. Это существенно больше, чем в первом подходе, но здесь неявно учитывается информативность данных.

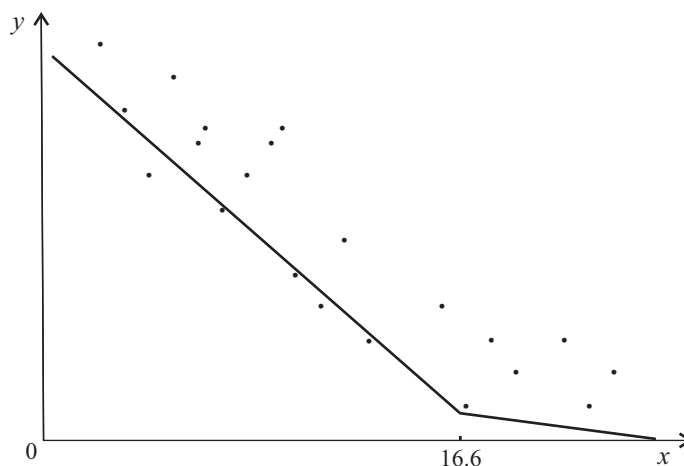


Рис. 2. График приближенной функции с условием точной склейки

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены два способа восстановления функциональной зависимости с заданным разрывом. Первый опирается на формальную минимизацию методом случайного поиска недифференцируемой функции, зависящей от параметров состыкованных функциональных зависимостей и места разрыва. Второй — на различную информативность данных по обеим частям разрыва.

Библиографический список

1. Мусатов М. В., Львов А. А. Анализ моделей метода наименьших квадратов и методов получения оценок // Вестн. Саратов. гос. тех. ун-та. 2009. Т. 4, № 2с. С. 137–140.
2. Кветной Р. Н., Бойко А. Р., Степова Т. А. Многомерная полиномиальная аппроксимация зависимостей заданных массивами интервальных данных по методу наименьших квадратов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2011. № 3. С. 103–106.
3. Джагаров Ю. А. Программный модуль для расчета аппроксимирующих полиномов по методу наименьших квадратов // Программные продукты и системы. 2005. № 3. С. 14.
4. Суханов Д. Я., Суханов А. Я. Метод итерационной настройки многослойной нейронной сети на основе метода наименьших квадратов // Докл. Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. 2004. № 2. С. 111–115.
5. Милов В. Р. Адаптивная обработка сигналов на основе рекуррентного алгоритма с регуляризацией по методу наименьших квадратов // Изв. вузов. Приборостроение. 2003. Т. 46, № 10. С. 11–17.
6. Тао Хуасюе, Юй Шенвень, Ли Пин Новая модель решения задачи уравнивания по методу нелинейных динамических наименьших квадратов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2001. № 7. С. 157–160.
7. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана–Бьюси. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1982.
8. Агеев А. Л., Антонова Т. В. О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 56–68.
9. Логинов К. В., Мызников А. М., Файзуллин Р. Т. Расчет, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 9. С. 92–106.

The Restoration of Functional Relationships with a Given Singularity

R. T. Faizullin, R. R. Faizullin

Omsk State Technical University, 11, Mira ave., 644050, Omsk, Russia, r.t.faizullin@mail.ru, strannik11@list.ru

Provided methods recovery of functional dependence with a specified discontinuity. Application of the algorithm of building function with given discontinuity is shown. The first method is based on a formal function minimization by random search. The second uses the information content of the data.

Key words: least squares method, discontinuity, singularity.



References

1. Musatov M. V., L'vov A. A. Model Analysis of the Least Squares Method and Methods to Obtain Estimates. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta* [Bulletin of the Saratov State Technical University], 2009, vol. 4, no. 2c, pp. 137–140 (in Russian).
2. Kvetnoj R. N., Bojko A. R., Stepova T. A. A Multivariate Polynomial Approximation of the Dependencies of the Specified Array of Interval Data on Method Least Squares. *Visnik Vinnic'kogo politehničnogo institutu* [Bulletin of Vinnica Polytechnical Institute], 2011, no. 3, pp.103–106 (in Russian).
3. Dzhagarov Ju. A. Programmnyj modul' dlja rasčeta approksimirujuščih polinomov po metodu naimen'shij kvadratov [The Software Module for the Calculation of Approximating Polynomials by the Method of Least Squares]. *Programmnye produkty i sistemy* [Program products and systems], 2005, no. 3, pp. 14 (in Russian).
4. Suhanov D. Ja., Suhanov A. Ja. The Method of Iterative Tuning Multilayer Neural Network Based on the Method of Least Squares. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravlenija i radioelektroniki* [Reports of Tomsk State University of Control Systems and Radio Electronics], 2004, no. 2, pp. 111–115 (in Russian).
5. Milov V. R. Adaptive Signal Processing Based on Recursive Algorithm with Regularization of the Least Squares. *Izvestija vysshijh učebyh zavedenij. Priboro-stroenie*, 2003, vol. 46, no. 10, pp. 11–17 (in Russian).
6. Tao Huasjue, Juj Shenven', Li Pin. A New Model for the Solution of the Equalization Method of Nonlinear Dynamic Least Squares. *Gornyj informacionno-analitičeskij bjulleten' (naučno-tehničeskij zhurnal)* [Mining informational and analytical bulletin (scientific and technical journal)], 2001, no. 7, pp. 157–160 (in Russian).
7. Brammer K., Ziffling G. *Fil'tr Kalmana–B'jusi* [Kalman-Bucy filter]. Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).
8. Ageev A. L., Antonova T. V. Localization of Discontinuities of the First Kind for the Functions with Bounded Variation. *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. of the IMM of Ural department of RAS], 2012, vol. 18, no. 1, pp. 56–68 (in Russian).
9. Loginov K. V., Myznikov A. M., Fajzullin R. T. Calculation, optimization and control modes of the large hydraulic networks. *Matem. modelirovanie* [Math. modeling], 2006, vol. 18, iss. 9, pp. 92–106 (in Russian).