



УДК 501.1

Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с отрицательными заявками в условии большой загрузки

Е. А. Фёдорова, А. А. Назаров, М. П. Фархадов

Фёдорова Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, moiskate@mail.ru

Назаров Анатолий Андреевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, nazarov.tsu@gmail.com

Фархадов Маис Паша оглы, доктор технических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией автоматизированных систем массового обслуживания и обработки сигналов, Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), Россия, 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, mais@ipu.ru

В работе проводится исследование однолинейной RQ-системы с входящим MMPP-поток заявок и экспоненциальным законом их обслуживания на приборе. Заявки, не получившие обслуживания, находятся на орбите случайное время, распределенное экспоненциально, и обращаются к прибору согласно протоколу случайного множественного доступа. В систему поступает простейший поток отрицательных заявок, которые уничтожают заявки, находящиеся на обслуживании. Предлагается метод асимптотического анализа в условии большой загрузки для исследования системы. Сформулирована и доказана теорема о том, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет гамма-распределение с найденными параметрами. В ходе вычислений было также найдено значение пропускной способности системы, т.е. верхнее значение ее загрузки, при котором система функционирует в стационарном режиме. Представлены результаты численного сравнения асимптотического распределения и распределения, полученного с помощью имитационного моделирования. Сделаны выводы об области применимости асимптотического метода.

Ключевые слова: RQ-система, отрицательные заявки, MMPP-поток, асимптотический анализ, большая загрузка.

Поступила в редакцию: 08.11.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликовано: 30.11.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-534-547>

ВВЕДЕНИЕ

Retrial Queueing System, или RQ-системы, — математические модели теории массового обслуживания, широко используемые для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров



и др. [1–4]. Характерной чертой таких моделей является наличие повторных обращений заявок к обслуживающему прибору спустя некоторое случайное время после неудачной попытки получить обслуживание. В реальных системах такие ситуации могут быть вызваны отсутствием свободных серверов (или операторов) в моменты поступления запросов или техническими неисправностями. Наиболее подробное описание RQ-систем, их сравнение с классическими системами массового обслуживания, основные методы и подходы исследования таких моделей отражены в монографиях Дж. Арталехо и Г. И. Фалина [5, 6].

В последнее время широко исследуются модели массового обслуживания с отрицательными заявками, предложенные Э. Геленбе [7, 8], или так называемые G-системы и G-сети. Отличительной чертой отрицательных заявок является то, что они не требуют обслуживания, а оказывают влияние на работу системы: уничтожают заявки в очереди, ломают обслуживающие приборы, «обнуляют» всю систему и др. Такой эффект объясняется наличием вирусов, хакерских атак и т. д. в реальных сетях связи. В статье [9] представлен обзор основных работ по исследованию G-систем и G-сетей. RQ-системы с отрицательными заявками исследовались Дж. Арталехо, Я. Шином, В. Анисимовым и др. [10–18].

Стоит отметить, что большинство аналитических результатов получены для RQ-систем с простейшим входящим потоком (M|M|1, M|GI|1, M|M|C), в то время как доказано, что потоки, циркулирующие в телекоммуникационных сетях, имеют более сложный характер [19, 20].

RQ-системы с входящими дважды стохастическими потоками (MMPP, MAP, VMAP) исследуются с помощью матричных методов и дальнейшего численного анализа [21–23] или с помощью имитационного моделирования [24].

Предлагаемый в работе метод асимптотического анализа [25–27] позволяет получить аналитические формулы для приближенного вычисления характеристик широкого класса моделей массового обслуживания, в том числе систем с непуассоновским входящим потоком.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим однолинейную RQ-систему (рис. 1), на вход которой поступает MMPP-поток заявок (Markov Modulated Poisson Process), который является частным MAP-потоком (Markovian Arrival Process) и описывается матрицами D_0 и D_1 . Заявки этого потока будем называть положительными.

Обозначим $n(t)$ — цепь Маркова, управляющая MMPP-потоком. Матрица инфинитезимальных характеристик управляющего процесса $n(t)$ равна $Q = D_0 + D_1$. Очевидно, что $Qe = 0$, где e — единичный вектор-столбец.

Матрица D_1 — диагональная матрица с элементами $\rho\lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$), где λ_n — условные интенсивности MMPP-потока, ρ — параметр, характеризующий загрузку системы (будет определен ниже).

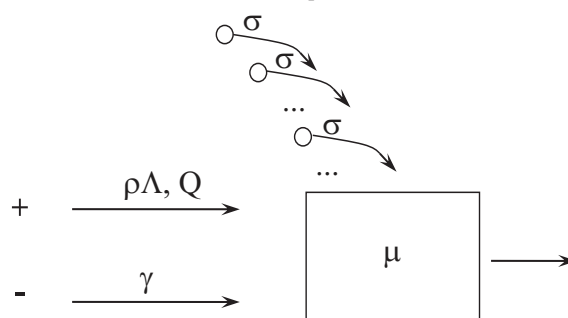


Рис. 1. RQ-система MMPP|M|1 с отрицательными заявками

Fig. 1. RQ-system MMPP|M|1 with negative applications



Таким образом, можно ввести матрицу $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_n \}$, справедливо следующее:

$$D_1 = \rho \Lambda.$$

Вектор-строка \mathbf{r} описывает стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $n(t)$, управляющей входящим ММРР-поток, и определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{r}Q = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{e} = \{1, 1, \dots, 1\}^T$ и $\mathbf{0} = \{0, 0, \dots, 0\}$.

Очевидно, что тогда интенсивность входящего потока будет равна $\lambda = \mathbf{r} \cdot \rho \Lambda \cdot \mathbf{e}$.

Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . С орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка с орбиты занимает его для обслуживания, в противном случае она мгновенно возвращается на орбиту для реализации следующей задержки.

Пусть параметры системы таковы, что выполняется

$$\mathbf{r} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{e} = \mu, \quad (2)$$

тогда параметр ρ определяет загрузку системы положительными заявками как $\rho = \frac{\mathbf{r}\Lambda\mathbf{e}}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Кроме того, в систему поступает простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью γ . Если поступившая отрицательная заявка застаёт прибор занятым, то она «выбивает» из него положительную заявку и они вместе покидают систему. Если прибор был свободен, то отрицательная заявка покидает систему.

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите в описанной RQ-системе.

Обозначим $i(t)$ — случайный процесс, характеризующий число заявок на орбите, $k(t)$ — процесс, определяющий состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим $P(k, n, i) = P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\}$ — стационарные вероятности того, что прибор находится в состоянии k , управляющая ММРР-поток цепь Маркова — в состоянии n и на орбите находится i заявок.

Очевидно, что процесс $\{k(t), n(t), i(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским. Для распределения вероятностей $P(k, n, i)$ состояний исследуемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} -(\rho\lambda_n + i\sigma - q_{nn})P(0, n, i) + (\mu + \gamma)P(1, n, i) + \sum_{v \neq n} P(0, v, i)q_{vn} = 0, \\ -(\rho\lambda_n + \mu + \gamma - q_{nn})P(1, n, i) + \rho\lambda_n P(1, n, i - 1) + \rho\lambda_n P(0, n, i) + \\ + (i + 1)\sigma P(0, n, i + 1) + \sum_{v \neq n} P(1, v, i)q_{vn} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $i \geq 0$.



Обозначим векторы-строки $\mathbf{P}_k(i) = \{P(k, 1, i), P(k, 2, i), \dots, P(k, N, i)\}$. Тогда в матричном виде система (3) примет вид

$$\begin{cases} -\mathbf{P}_0(i)(\rho\mathbf{\Lambda} + i\sigma\mathbf{I} - \mathbf{Q}) + (\mu + \gamma)\mathbf{P}_1(i) = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{P}_1(i)(\rho\mathbf{\Lambda} + (\mu + \gamma)\mathbf{I} - \mathbf{Q}) + \mathbf{P}_0(i)\rho\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}_1(i-1)\rho\mathbf{\Lambda} + \sigma(i+1)\mathbf{P}_0(i+1) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, $i \geq 0$.

Перейдем к частичным характеристическим функциям $\mathbf{H}_k(u) = \sum_i e^{juu} \mathbf{P}_k(i)$. Тогда имеем следующую систему уравнений для характеристических функций:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0(u)(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}) + j\sigma\mathbf{H}'_0(u) + (\mu + \gamma)\mathbf{H}_1(u) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_1(u)(\mathbf{Q} - \rho\mathbf{\Lambda}(1 - e^{ju}) - (\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{H}_0(u)\rho\mathbf{\Lambda} - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_0(u) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5)$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В работе предлагается исследовать систему (5) методом асимптотического анализа в условии большой загрузки $\rho \uparrow S$, где S — верхняя граница загрузки системы, при которой описанная RQ-система функционирует в стационарном режиме. Будем называть S пропускной способностью системы. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $i(t)$ — число заявок на орбите RQ-системы MMPP|M|1 с отрицательными заявками, функционирующей в стационарном режиме, тогда характеристическая функция в условии большой загрузки имеет вид гамма-распределения

$$h(u) = \lim_{\rho \rightarrow S} M \{e^{ju(S-\rho)i(t)}\} = \left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

с параметрами

$$\beta = \frac{\mu}{S(\mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mu)}, \quad \alpha = 1 + S\frac{\mu}{\sigma}\beta,$$

где $S = 1 + \frac{\gamma}{\mu}$ — пропускная способность системы, а вектор \mathbf{v} является решением неоднородной системы:

$$\begin{cases} \mathbf{v}\mathbf{Q} = \mathbf{r}((\gamma + \mu)\mathbf{I} - S\mathbf{\Lambda}), \\ \mathbf{v}\mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Введем бесконечно малую величину $\varepsilon = S - \rho > 0$, тогда условие $\rho \rightarrow S$ может быть описано условием $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обозначим $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_0(u) = \varepsilon\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)$, $\mathbf{H}_1(u) = \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)$. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(\mathbf{Q} - (S - \varepsilon)\mathbf{\Lambda}) + j\sigma\frac{\partial\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + (\mu + \gamma)\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(\mathbf{Q} - (S - \varepsilon)(1 - e^{jw\varepsilon})\mathbf{\Lambda} - (\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \\ +(S - \varepsilon)\varepsilon\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)\mathbf{\Lambda} - j\sigma e^{-jw\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6)$$

Будем использовать разложения векторных функций в следующем виде:

$$\mathbf{F}_k(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k(w) + \varepsilon\mathbf{f}_k(w) + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (7)$$

где $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$ — бесконечно малая величина порядка ε^2 .



Допредельная характеристическая функция числа заявок на орбите $H(u) = \mathbf{H}_0(u)\mathbf{e} + \mathbf{H}_1(u)\mathbf{e}$ в условии большой загрузки может быть приближенно определена как асимптотическая характеристическая функция $h(u)$:

$$h(u) = \lim_{\rho \rightarrow S} \mathbf{M} \{ e^{ju(t)} \}.$$

Учитывая разложения (7), можно записать:

$$h(u) = \mathbf{F}_1 \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) \mathbf{e} + \mathbf{O}(\varepsilon). \quad (8)$$

Таким образом, для нахождения асимптотической характеристической функции $h(u)$ необходимо найти вид скалярной функции $\mathbf{F}_1(w)\mathbf{e}$. Для этого из системы (6) сначала получим асимптотические уравнения.

Вывод асимптотических уравнений

Вывод уравнений будем осуществлять в несколько этапов.

Этап 1. В системе (6) совершим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая, что $\mathbf{F}_k(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} j\sigma \mathbf{F}'_0(w) + (\mu + \gamma)\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_1(w)(\mathbf{Q} - (\mu + \gamma)\mathbf{I}) - j\sigma \mathbf{F}'_0(w) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

Этап 2. Подставим разложения (7) в систему (6). В результате несложных преобразований, учитывая (9) и разделив уравнения на ε , получим следующую систему:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0(w)(\mathbf{Q} - (S - \varepsilon)\mathbf{\Lambda}) + j\sigma \mathbf{f}'_0(w) + (\mu + \gamma)\mathbf{f}_1(w) = \mathbf{O}(\varepsilon), \\ jw(S - \varepsilon)\mathbf{F}_1(w)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{f}_1(w)(\mathbf{Q} - (\mu + \gamma)\mathbf{I}) + (S - \varepsilon)\mathbf{F}_0(w)\mathbf{\Lambda} + j\sigma jw\mathbf{F}'_0(w) - j\sigma \mathbf{f}'_0(w) = \mathbf{O}(\varepsilon). \end{cases}$$

Совершим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0(w)(\mathbf{Q} - S\mathbf{\Lambda}) + j\sigma \mathbf{f}'_0(w) + (\mu + \gamma)\mathbf{f}_1(w) = \mathbf{0}, \\ jwS\mathbf{F}_1(w)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{f}_1(w)(\mathbf{Q} - (\mu + \gamma)\mathbf{I}) + S\mathbf{F}_0(w)\mathbf{\Lambda} + j\sigma jw\mathbf{F}'_0(w) - j\sigma \mathbf{f}'_0(w) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (10)$$

Этап 3. Сложим матричные уравнения системы (6) и умножим полученное уравнение на единичный вектор-столбец \mathbf{e} (таким образом, мы суммируем все скалярные уравнения системы):

$$\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(S - \varepsilon)(1 - e^{jw\varepsilon})\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\sigma(e^{-jw\varepsilon} - 1)\frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w}\mathbf{e} = 0.$$

Сократим на общий множитель:

$$\mathbf{F}_1(w, \varepsilon)(S - \varepsilon)e^{jw\varepsilon}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\sigma\frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w}\mathbf{e} = 0.$$

Подставим разложения (7) и запишем уравнения для коэффициентов при одинаковых степенях ε :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1(w)S\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\sigma \mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{F}_1(w)(Sjw - 1)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mathbf{f}_1(w)S\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\sigma \mathbf{f}'_0(w)\mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (11)$$



Объединив (9)–(11), получим следующую систему шести матричных и двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} j\sigma\mathbf{F}'_0(w) + (\mu + \gamma)\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_1(w)(\mathbf{Q} - (\mu + \gamma)\mathbf{I}) - j\sigma\mathbf{F}'_0(w) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_0(w)(\mathbf{Q} - S\mathbf{\Lambda}) + j\sigma\mathbf{f}'_0(w) + (\mu + \gamma)\mathbf{f}_1(w) = \mathbf{0}, \\ jwS\mathbf{F}_1(w)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{f}_1(w)(\mathbf{Q} - (\mu + \gamma)\mathbf{I}) + S\mathbf{F}_0(w)\mathbf{\Lambda} + j\sigma jw\mathbf{F}'_0(w) - j\sigma\mathbf{f}'_0(w) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_1(w)S\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\sigma\mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{F}_1(w)(Sjw - 1)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mathbf{f}_1(w)S\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\sigma\mathbf{f}'_0(w)\mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Как уже упоминалось, из полученной системы асимптотических уравнений (12) для решения поставленной задачи необходимо найти лишь скалярную функцию $\mathbf{F}_1(w)\mathbf{e}$.

Решение системы асимптотических уравнений

Исследование системы (12) будем также проводить в несколько этапов.

Этап 1. Подставив первое уравнение системы (12) во второе уравнение, нетрудно получить

$$\mathbf{F}_1(w)\mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Тогда в силу (1) очевидно, что функцию $\mathbf{F}_1(w)$ можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{r}\Phi(w), \quad (13)$$

где $\Phi(w)$ — неизвестная скалярная функция.

Таким образом, для решения поставленной задачи нам необходимо получить вид функции $\Phi(w)$.

Подставляя (13) в первое уравнения системы (12), получим

$$\mathbf{F}'_0(w) = j\frac{\mu + \gamma}{\sigma} \cdot \mathbf{r}\Phi(w). \quad (14)$$

Этап 2. Подставим (13) и (14) в пятое уравнение системы (12):

$$\mathbf{r}\Phi(w)S\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - (\mu + \gamma)\mathbf{r}\Phi(w)\mathbf{e} = 0.$$

Сократив на общий множитель и учитывая (2), получим

$$S = \frac{\mu + \gamma}{\mu}. \quad (15)$$

Таким образом, мы получили значение пропускной способности системы, т.е. условие функционирования системы в стационарном режиме: $\rho < 1 + \frac{\gamma}{\mu}$. Стоит заметить, что наличие отрицательных заявок увеличивает пропускную способность системы, так как для классической RQ-системы $S = 1$.

Этап 3. Суммируем третье и четвертое уравнения системы (12):

$$(\mathbf{F}_0(w) + \mathbf{f}_1(w))\mathbf{Q} + j\sigma jw\mathbf{F}'_0(w) + jw\mathbf{F}_1(w)S\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}.$$

Учитывая (13) и (14), имеем

$$(\mathbf{F}_0(w) + \mathbf{f}_1(w))\mathbf{Q} = jw\Phi(w)\mathbf{r}((\mu + \gamma)\mathbf{I} - S\mathbf{\Lambda}).$$



Запишем сумму $\mathbf{F}_0(w) + \mathbf{f}_1(w)$ в виде

$$\mathbf{F}_0(w) + \mathbf{f}_1(w) = jw\Phi(w)\mathbf{v}, \quad (16)$$

где вектор \mathbf{v} является решением матричного уравнения:

$$\mathbf{v}\mathbf{Q} = \mathbf{r}((\mu + \gamma)\mathbf{I} - S\mathbf{\Lambda}). \quad (17)$$

Заметим, что решение системы алгебраических уравнений (17) существует, так как ранг матрицы системы \mathbf{Q} и ранг расширенной матрицы равны, поскольку $\det \mathbf{Q} = 0$ и в силу (15) выполняется $\mathbf{r}((\mu + \gamma)\mathbf{I} - S\mathbf{\Lambda})\mathbf{e} = 0$.

Этап 4. Из третьего уравнения системы (12) получим

$$j\sigma\mathbf{f}'_0(w\mathbf{e}) = \mathbf{F}_0(w)S\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - (\mu + \gamma)\mathbf{f}_1(w)\mathbf{e}.$$

Подставим выражения (15) и (16):

$$\sigma\mathbf{f}'_0(w)\mathbf{e} = \mathbf{F}_0(w)(S\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + S\mu\mathbf{e}) - S\mu jw\Phi(w)\mathbf{v}\mathbf{e}. \quad (18)$$

Этап 5. Рассмотрим последнее уравнение системы (12). Подставим полученные ранее формулы (13), (16), (18):

$$\Phi(w)(Sjw - 1)\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + Sjw\Phi(w)(\mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e}) + S\mu\mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = 0.$$

Учитывая условие (2) и выражение (14), продифференцируем последнее уравнение:

$$\begin{aligned} &\Phi'(w)(Sjw - 1)\mu + \Phi(w)Sj\mu + Sjw\Phi'(w)(\mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e}) + \\ &+ Sj\Phi(w)(\mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e}) + Sj\mu\frac{\mu + \gamma}{\sigma}\Phi(w) = 0. \end{aligned}$$

Упростим:

$$\Phi'(w)(jwS(\mu + \mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e}) - \mu) + j\Phi(w)S\left(\mu + \mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e} + S\frac{\mu + \gamma}{\sigma}\right) = 0.$$

Поделим на $S(\mu + \mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e})$ и введем обозначения:

$$\beta = \frac{\mu}{S(\mu + \mathbf{v}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e})}, \quad \alpha = 1 + S\frac{\mu}{\sigma}\beta.$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\Phi'(w)(\beta - jw) = j\alpha\Phi(w).$$

Решение такого уравнения имеет вид

$$\Phi(w) = C_0 \left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-\gamma},$$

где C_0 — произвольная постоянная, которая равна $C_0 = 1$ из условия нормировки $\Phi(0) = 1$.



Возвращаясь к (13), можно записать следующее:

$$F_1(w) = \mathbf{r} \cdot \left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

Сделав обратные замены, получим, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид

$$h(u) = \left(1 - \frac{j u}{\beta(S - \rho)}\right)^{-\alpha}. \tag{19}$$

Замечание. Система (17) имеет множество решений, запишем их в виде $\mathbf{v} = C\mathbf{r} + \mathbf{v}_0$, где C — произвольная постоянная, \mathbf{v}_0 — некоторое частное решение системы.

Рассмотрим выражение $\mu + \mathbf{v}\Lambda\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e}$, присутствующее в параметрах α и β . Подставив в него выражение $\mathbf{v} = C\mathbf{r} + \mathbf{v}_0$, нетрудно получить, что $\mu + \mathbf{v}\Lambda\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e}$ не зависит от значений константы C , т.е. выражение $\mu + \mathbf{v}\Lambda\mathbf{e} - \mu\mathbf{v}\mathbf{e}$ принимает одинаковое значение для любого частного решения системы (17). Выберем решение, удовлетворяющее условию $\mathbf{v}\mathbf{e} = 0$, тогда параметры α и β найденного гамма-распределения (19) вычисляются по формулам:

$$\beta = \frac{\mu}{S(\mu + \mathbf{v}\Lambda\mathbf{e})}, \quad \alpha = 1 + S\frac{\mu}{\sigma}\beta,$$

где вектор \mathbf{v} является решением неоднородной системы:

$$\begin{cases} \mathbf{v}\mathbf{Q} = \mathbf{r}((\gamma + \mu)\mathbf{I} - S\Lambda), \\ \mathbf{v}\mathbf{e} = 0, \end{cases}$$

что и требовалось доказать. □

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Для анализа области применимости предложенного асимптотического метода проведем численное сравнение полученного асимптотического распределения $P(i)$ и распределения $D(i)$, найденного с помощью имитационного моделирования [28], для различных значений параметров системы.

Асимптотическое распределение $P(i)$ можно вычислить в виде обратного преобразования Фурье от характеристической функции (19) (используя также условие нормировки) либо по известной формуле плотности гамма-распределения с параметрами α и β .

В качестве меры расхождения между асимптотическим и имитационным распределениями будем использовать расстояние Колмогорова:

$$d = \max_{i \geq 0} \left| \sum_{l=0}^i [\tilde{p}(l) - p(l)] \right|,$$

где $\tilde{p}(l)$ и $p(l)$ — плотности асимптотического и имитационного распределений соответственно.

В качестве примера рассмотрим случай

$$\mu = 1, \quad \gamma = 0.5, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0.840 & 0 & 0 \\ 0 & 0.992 & 0 \\ 0 & 0 & 1.145 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}.$$



Таблица / Table

Расстояние Колмогорова между асимптотическим распределением и имитационным Kolmogorov distance between the asymptotic distribution and the simulation

δ	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 10$
0.9	0.110	0.095	0.085
0.95	0.056	0.050	0.044
0.97	0.028	0.026	0.022

значений параметров входящих потоков мы получили аналогичные результаты численного анализа.

Для данных значений параметров выполняется условие (2).

Введем величину $\delta = \rho/S$, которая может принимать значения $0 < \delta < 1$ в стационарном режиме функционирования RQ-системы. Будем исследовать область применимости метода в зависимости от значений параметров δ и σ (таблица, рис. 2).

Если в качестве критерия применимости метода использовать условие $d \leq 0.05$, то можно сделать вывод, что асимптотические результаты могут быть применены при $0.95S < \rho < S$. Для других

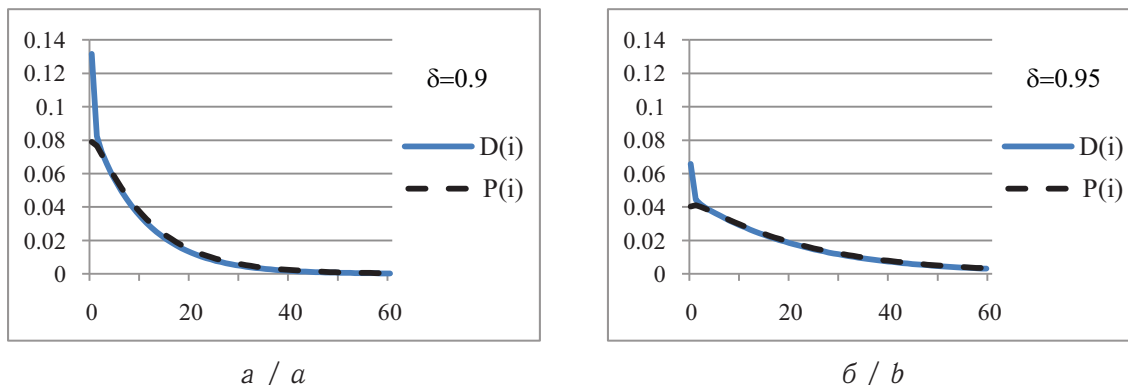


Рис. 2. Сравнение асимптотического $D(i)$ и имитационного $P(i)$ распределений: $a - \delta = 0.9$; $b - \delta = 0.95$

Fig. 2. The comparison of asymptotic $D(i)$ and simulation $P(i)$ distributions: a is the $\delta = 0.9$; b is the $\delta = 0.95$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована RQ-система $MMPP|M|1$ с отрицательными заявками методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Доказано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет гамма-распределение с найденными параметрами. Также в ходе вычислений было найдено значение пропускной способности системы, т. е. условие функционирования системы в стационарном режиме. Проведен численный анализ полученных результатов, сделаны выводы об области применимости метода.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Томской области (проект № 19-41-703002).

Библиографический список

1. Kuznetsov D. Y., Nazarov A. A. Analysis of a communication network governed by an adaptive random multiple access protocol in critical load // Problems of Information Transmission. 2004. Vol. 40, № 3. P. 243–253. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:PRIT.0000044260.05898.24>



2. *Tran-Gia P., Mandjes M.* Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. 1997. Vol. 15. P. 1406–1414. DOI: <https://doi.org/10.1109/49.634781>
3. *Roszik J., Sztrik J., Kim C. S.* Retrial queues in the performance modelling of cellular mobile networks using MOSEL // *I. J. of Simulation*. 2005. Vol. 6, no. 1–2. P. 38–47.
4. *Kim C. S., Klimenok V., Dudin A.* Analysis and optimization of guard channel policy in cellular mobile networks with account of retrials // *Computers and Operation Research*. 2014. Vol. 43. P. 181–190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2013.09.005>
5. *Artalejo J. R., Gómez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Berlin : Springer, 2008. 267 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9>
6. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. L. : Chapman & Hall, 1997. 328 p.
7. *Gelenbe E.* Random neural networks with positive and negative signals and product form solution // *Neural Computation*. 1989. Vol. 1, № 4. P. 502–511. DOI: <https://doi.org/10.1162/neco.1989.1.4.502>
8. *Gelenbe E.* Product-form queueing networks with negative and positive customers // *Journal of Applied Probability*. 1991. Vol. 28. P. 656–663. DOI: <https://doi.org/10.2307/3214499>
9. *Do T. V.* Bibliography on G-networks, negative customers and applications // *Mathematical and Computer Modelling*. 2011. Vol. 53, iss. 1–2. P. 205–212. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.08.006>
10. *Shin Y. W.* Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // *Queueing Systems*. 2007. Vol. 55, iss. 4. P. 223–237. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-007-9018-9>
11. *Anisimov V. V., Artalejo J. R.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals // *Queueing Systems*. 2001. Vol. 39, № 2/3. P. 157–182. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012796517394>
12. *Berdjoudj L., Aissani D.* Martingale methods for analyzing the M/M/1 retrial queue with negative arrivals // *Journal of Mathematical Sciences*. 2005. Vol. 131, № 3. P. 5595–5599. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-005-0430-6>
13. *Wu J., Lian Z.* A single-server retrial G-queue with priority and unreliable server under Bernoulli vacation schedule // *Computers & Industrial Engineering*. 2013. Vol. 64, iss. 1. P. 84–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2012.08.015>
14. *Kirupa K., Udaya Chandrika K.* Batch arrival retrial queue with negative customers, multi-optional service and feedback // *Communications on Applied Electronics*. 2015. Vol. 2, № 4. P. 14–18. DOI: <https://doi.org/10.5120/cae2015651707>
15. *Klimenok V. I., Dudin A. N.* A BMAP/PH/N queue with negative customers and partial protection of service // *Communications in Statistics — Simulation and Computation*. 2012. Vol. 41, № 7. P. 1062–1082.
16. *Dimitriou I.* A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations // *Applied Mathematical Modelling*. 2013. Vol. 37, iss. 3. P. 1295–1309. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.011>
17. *Rajadurai P.* A study on M/G/1 retrial queueing system with three different types of customers under working vacation policy // *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation (IJMMNO)*. 2018. Vol. 8, № 4, pp. 393–417. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMMNO.2018.094550>
18. *Zidani N., Djellab N.* On the multiserver retrial queues with negative arrivals // *International Journal of Mathematics in Operational Research (IJMOR)*. 2018. Vol. 13, № 2. P. 219–242. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2018.094056>



19. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М. : Мир, 1989. 544 с.
20. Блэк Ю. Сети ЭВМ: протоколы, стандарты, интерфейсы. М. : Мир, 1990. 510 с.
21. Gómez-Corral A. A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques // Annals of Operations Research. 2006. Vol. 141, iss. 1. P. 163–191. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-006-5298-4>
22. Kim C. S., Mushko V. V., Dudin A. N. Computation of the steady state distribution for multi-server retrial queues with phase type service process // Annals of Operations Research. 2012. Vol. 201, iss. 1. P. 307–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-012-1254-7>
23. Artalejo J. R., Pozo M. Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue // Annals of Operations Research. 2002. Vol. 116, iss. 1–4. P. 41–56. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021359709489>
24. Ridder A. Fast simulation of retrial queues // Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems. Piza, 2000. P. 1–5.
25. Moiseev A., Nazarov A. Queueing network $M\bar{A}P-(GI/\infty)^K$ with high-rate arrivals // European Journal of Operational Research. 2016. Vol. 254, iss 1. P. 161–168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.04.011>
26. Назаров А. А., Фёдорова Е. А. Исследование RQ системы $MMPP|GI|1$ методом асимптотического анализа второго порядка в условии большой загрузки // Изв. Том. политехн. ун-та. Инжиниринг георесурсов. 2014. Т. 325, № 5. С. 6–15.
27. Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П. Асимптотический анализ немарковской бесконечнолинейной системы обслуживания требований случайного объема с входящим рекуррентным потоком // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 39. С. 30–38. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988605/39/5>
28. Moiseev A., Demin A., Dorofeev V., Sorokin V. Discrete-event approach to simulation of queueing networks // Key Engineering Materials. 2016. Vol. 685. P. 939–942. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.685.939>

Образец для цитирования:

Фёдорова Е. А., Назаров А. А., Фархадов М. П. Асимптотический анализ RQ-системы $MMPP|M|1$ с отрицательными заявками в условии большой загрузки // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 534–547. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-534-547>

Asymptotic Analysis of the $MMPP|M|1$ Retrial Queue with Negative Calls under the Heavy Load Condition

E. A. Fedorova, A. A. Nazarov, M. P. Farkhadov

Ekaterina A. Fedorova, <https://orcid.org/0000-0001-8933-5322>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, moiskate@mail.ru

Anatoly A. Nazarov, <https://orcid.org/0000-0002-2091-6011>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, nazarov.tsu@gmail.com

Mais P. Farkhadov, <https://orcid.org/0000-0002-7166-9567>, Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences (ICS RAS), 65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia, mais@ipu.ru



In the paper, a single-server retrial queueing system with MMPP arrivals and an exponential law of the service time is studied. Unserviced calls go to an orbit and stay there during random time distributed exponentially, they access to the server according to a random multiple access protocol. In the system, a Poisson process of negative calls arrives, which delete servicing positive calls. The method of the asymptotic analysis under the heavy load condition for the system studying is proposed. It is proved that the asymptotic characteristic function of a number of calls on the orbit has the gamma distribution with the obtained parameters. The value of the system capacity is obtained, so, the condition of the system stationary mode is found. The results of a numerical comparison of the asymptotic distribution and the distribution obtained by simulation are presented. Conclusions about the method applicability area are made.

Keywords: retrial queue, negative calls, MMPP, asymptotic analysis, heavy load.

Received: 08.11.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 30.11.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and by the Tomsk Region (project No. 19-41-703002).

References

1. Kuznetsov D. Y., Nazarov A. A. Analysis of a communication network governed by an adaptive random multiple access protocol in critical load. *Problems of Information Transmission*, 2004, vol. 40, no. 3, pp. 243–253. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:PRIT.0000044260.05898.24>
2. Tran-Gia P., Mandjes M. Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1997, vol. 15, pp. 1406–1414. DOI: <https://doi.org/10.1109/49.634781>
3. Roszik J., Sztrik J., Kim C. S. Retrial queues in the performance modelling of cellular mobile networks using MOSEL. *I. J. of Simulation*, 2005, vol. 6, no. 1–2, pp. 38–47.
4. Kim C. S., Klimenok V., Dudin A. Analysis and optimization of guard channel policy in cellular mobile networks with account of retrials. *Computers and Operation Research*, 2014, vol. 43, pp. 181–190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2013.09.005>
5. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Berlin, Springer, 2008. 267 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9>
6. Falin G. I., Templeton J. G. C. *Retrial queues*. London, Chapman & Hall, 1997. 328 p.
7. Gelenbe E. Random neural networks with positive and negative signals and product form solution. *Neural Computation*, 1989, vol. 1, no. 4, pp. 502–511. DOI: <https://doi.org/10.1162/neco.1989.1.4.502>
8. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*, 1991, vol. 28, pp. 656–663. DOI: <https://doi.org/10.2307/3214499>
9. Do T. V. Bibliography on G-networks, negative customers and applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, vol. 53, iss. 1–2, pp. 205–212. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.08.006>
10. Shin Y. W. Multi-server retrial queue with negative customers and disasters. *Queueing Systems*, 2007, vol. 55, iss. 4, pp. 223–237. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-007-9018-9>



11. Anisimov V. V., Artalejo J. R. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals. *Queueing Systems*, 2001, vol. 39, no. 2/3, pp. 157–182. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012796517394>
12. Berdjoudj L., Aissani D. Martingale methods for analyzing the M/M/1 retrial queue with negative arrivals. *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 131, no. 3, pp. 5595–5599. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-005-0430-6>
13. Wu J., Lian Z. A single-server retrial G-queue with priority and unreliable server under Bernoulli vacation schedule. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, vol. 64, iss. 1, pp. 84–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2012.08.015>
14. Kirupa K., Udaya Chandrika K. Batch Arrival Retrial Queue with Negative Customers, Multi-optional Service and Feedback. *Communications on Applied Electronics*, 2015, vol. 2, no. 4, pp. 14–18. DOI: <https://doi.org/10.5120/cae2015651707>
15. Klimenok V. I., Dudin A. N. A BMAP/PH/N queue with negative customers and partial protection of service. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 2012, vol. 41, no. 7, pp. 1062–1082.
16. Dimitriou I. A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 3, pp. 1295–1309. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.011>
17. Rajadurai P. A study on M/G/1 retrial queueing system with three different types of customers under working vacation policy. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation (IJMMNO)*, 2018, vol. 8, no. 4, pp. 393–417. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMMNO.2018.094550>
18. Zidani N., Djellab N. On the multiserver retrial queues with negative arrivals. *International Journal of Mathematics in Operational Research (IJMOR)*, 2018, vol. 13, no. 2, pp. 219–242. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2018.094056>
19. Bertsekas D., Gallager R. *Seti peredachi dannykh* [Information transmission networks]. Moscow, Mir, 1989. 544 p. (in Russian).
20. Bljek Ju. *Seti EVM: protokoly, standarty, interfejsy* [Networks: protocols, standards, interfaces]. Moscow, Mir, 1990. 510 p. (in Russian).
21. Gómez-Corral A. A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques. *Annals of Operations Research*, 2006, vol. 141, iss. 1, pp. 163–191. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-006-5298-4>
22. Kim C. S., Mushko V. V., Dudin A. N. Computation of the steady state distribution for multi-server retrial queues with phase type service process. *Annals of Operations Research*, 2012, vol. 201, iss. 1, pp. 307–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-012-1254-7>
23. Artalejo J. R., Pozo M. Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue. *Annals of Operations Research*, 2002, vol. 116, iss. 1–4, pp. 41–56. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021359709489>
24. Ridder A. Fast simulation of retrial queues. *Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems*. Piza, 2000, pp. 1–5.
25. Moiseev A., Nazarov A. Queueing network MAP– $(GI/\infty)^K$ with high-rate arrivals. *European Journal of Operational Research*, 2016, vol. 254, iss. 1, pp. 161–168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.04.011>
26. Nazarov A. A., Fedorova E. A. Retrial queueing system MMPP|GI|1 researching by means of the second-order asymptotic analysis method under a heavy load condition. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2014, vol. 325, no. 5, pp. 6–15 (in Russian).



27. Lisovskaja E. Ju., Moiseeva S. P. Asymptotical analysis of a non-Markovian queueing system with renewal input process and random capacity of customers. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2017, no. 39, pp. 30–38 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988605/39/5>
28. Moiseev A., Demin A., Dorofeev V., Sorokin V. Discrete-event approach to simulation of queueing networks. *Key Engineering Materials*, 2016, vol. 685, pp. 939–942. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.685.939>

Cite this article as:

Fedorova E. A., Nazarov A. A., Farkhadov M. P. Asymptotic Analysis of the MMPP|M|1 Retrial Queue with Negative Calls under the Heavy Load Condition. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 534–547 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-534-547>
