



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 194–201  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 194–201

Научная статья

УДК 629.78;519.6

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

## Аппроксимация уравнений ориентации орбитальной системы координат методом взвешенных невязок

И. А. Панкратов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

**Панкратов Илья Алексеевич**, кандидат технических наук, <sup>1</sup>доцент кафедры математического и компьютерного моделирования; <sup>2</sup>научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, [PankratovIA@info.sgu.ru](mailto:PankratovIA@info.sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5325-9310>

**Аннотация.** В кватернионной постановке рассмотрена задача математического моделирования движения космического аппарата (КА) по эллиптической орбите. Постоянное по модулю управление (вектор ускорения от реактивной тяги) направлено ортогонально плоскости орбиты КА. Для описания движения центра масс КА использовано кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбитальной системы координат. Построено приближённое аналитическое решение кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат в виде разложения по системе линейно независимых базисных функций. Для нахождения неизвестных кватернионных коэффициентов этого разложения был использован метод поточечной коллокации. Учёт известного решения уравнения ориентации орбитальной системы координат для случая, когда орбита КА является круговой, позволил упростить вид вышеуказанного разложения. Относительно искомых коэффициентов получена система линейных алгебраических уравнений, в которой компоненты матрицы жёсткости и столбца свободных членов являются кватернионами. Для проведения численного моделирования движения КА была составлена программа на языке Python. Проведено сравнение расчётов по аналитическим формулам, полученным в работе, и численного решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Составлены таблицы погрешности определения ориентации орбитальной системы координат для случаев, когда базисные функции являются полиномами и тригонометрическими функциями. Приведены примеры численного решения задачи для случая, когда начальная ориентация орбитальной системы координат соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Построены графики изменения компонент кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат. Проведён анализ полученных решений. Установлены особенности и закономерности процесса движения КА по эллиптической орбите.

**Ключевые слова:** космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).



**Для цитирования:** Панкратов И. А. Аппроксимация уравнений ориентации орбитальной системы координат методом взвешенных невязок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 194–201. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

## Approximation of the orientation equations of the orbital coordinate system by the weighted residuals method

I. A. Pankratov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>2</sup>Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

**Iliia A. Pankratov**, [PankratovIA@info.sgu.ru](mailto:PankratovIA@info.sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5325-9310>

**Abstract.** In the quaternion formulation, the problem of mathematical modeling of the spacecraft movement in an elliptical orbit was considered. Control is an acceleration vector from jet thrust. Control modulus is constant. The control is directed orthogonally to the plane of the spacecraft orbit. The quaternion differential equation of an orbital coordinate system orientation was used to describe spacecraft movement. An approximate analytical solution of the quaternion differential equation of the orbital coordinate system orientation in the form of an expansion system of linearly independent basis functions was constructed. The method of pointwise collocation was used to find unknown quaternion coefficients of this decomposition. The above decomposition was simplified taking into account the well-known solution of the orientation equation of the orbital coordinate system for the case when the spacecraft orbit is circular. With respect to the desired coefficients, a system of linear algebraic equations is obtained in which the components of the stiffness matrix and the column of free terms are quaternions. A program in Python was written to conduct numerical simulations of the spacecraft movement. A comparison of calculations for analytical formulas obtained in the paper and the numerical solution of the Cauchy problem by the Runge – Kutta method of the 4th order accuracy was done. Error tables have been obtained for determining the orientation of the orbital coordinate system for cases when basic functions are polynomials and trigonometric functions. Examples of numerical solution of the problem are given for the case when the initial orientation of the orbital coordinate system corresponds to the orientation of the orbit of one of the satellites of the GLONASS orbital grouping. Graphs describing changes in the components of error quaternion in determining the orientation of the orbital coordinate system are constructed. The analysis of the received results is given. The features and regularities of the spacecraft movement on an elliptical orbit are established.

**Keywords:** spacecraft, orbit, optimal control, quaternion

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00205).

**For citation:** Pankratov I. A. Approximation of the orientation equations of the orbital coordinate system by the weighted residuals method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 194–201 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



## 1. Постановка задачи

Пусть вектор ускорения  $\mathbf{u}$  от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Рассмотрим орбитальную систему координат  $\eta$ . Начало этой системы координат находится в центре масс КА, ось  $\eta_1$  направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось  $\eta_3$  перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора  $\mathbf{c}$  момента скорости центра масс КА, а ось  $\eta_2$  образует правую тройку с осями  $\eta_1$  и  $\eta_3$ .

Уравнения ориентации орбитальной системы координат  $\eta$  в параметрах Эйлера  $\lambda_j$  имеют вид [1]

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = \frac{r}{c} u \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const.}$$

Здесь  $\boldsymbol{\lambda}$  — нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат  $\eta$ ,  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{i}_3$  — векторные мнимые единицы Гамильтона,  $\circ$  — символ кватернионного умножения;  $\varphi$  — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите;  $r = |\mathbf{r}|$  — модуль радиуса-вектора центра масс КА;  $p$  и  $e$  — параметр и эксцентриситет орбиты,  $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$  — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости  $\mathbf{v}$  центра масс КА);  $u$  — проекция вектора реактивного ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА).

Для исследования уравнений (1) удобно перейти к новой независимой переменной — истинной аномалии  $\varphi$ , и ввести безразмерные переменные. Фазовые переменные  $\lambda_j$  являются безразмерными. Безразмерные переменные  $r^b$ ,  $t^b$  и управление  $u^b$  связаны с размерными переменными  $r$ ,  $t$  и управлением  $u$  соотношениями:  $r = Rr^b$ ,  $u = u_{\max} u^b$ ,  $t = Tt^b$ , где  $R$  — характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА);  $V$ ,  $T$  — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями:  $V = c/R$ ,  $T = R^2/c$ .

При переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых переменных появляется характерный безразмерный параметр  $N^b = u_{\max} R^3/c^2$ .

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных примет вид [2]

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \circ [N^b (r^b)^3 u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3], \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (2)$$

## 2. Метод поточечной коллокации

Аналитическое решение уравнений (2) в случае произвольного управления  $u = u(t)$  не найдено. Задача интегрирования уравнений (2) есть известная задача Дарбу. Решение этой задачи в замкнутой форме найдено лишь для некоторых частных случаев (см., например, работы [3–5]). Известно, что оптимальное по Понтрягину [6] управление, соответствующее задаче быстродействия и задаче



минимизации затрат характеристической скорости, является константой на смежных участках активного движения КА [7].

Пусть необходимо найти приближённое решение кватернионного уравнения (2) при  $\varphi \in [0; \varphi^*]$  с начальным условием

$$\text{при } \varphi = 0 \text{ рад } \lambda(0) = \lambda^{(H)} \quad (3)$$

для случая, когда  $u^b = \text{const}$ .

Выберем систему базисных функций  $N_k(\varphi)$ ,  $k = \overline{1, M}$ , линейно независимых на отрезке  $[0; \varphi^*]$ . Предположим, что орбита КА является эллиптической ( $0 < e < 1$ ). Будем искать решение задачи в виде разложения по базисным функциям ( $\mathbf{a}_k$  — подлежащие определению кватернионные коэффициенты):

$$\lambda \approx \hat{\lambda} = \lambda^{\text{круг}}(\varphi) + \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k N_k(\varphi). \quad (4)$$

Здесь  $\lambda^{\text{круг}}(\varphi)$  — решение уравнения (2) в случае, когда КА движется по круговой орбите ( $e = 0$ ). Известно [8], что

$$\lambda^{\text{круг}}(\varphi) = \lambda^{(0)} \circ \left( \cos \frac{\omega\varphi}{2} + \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega\varphi}{2} \boldsymbol{\omega}_\eta \right), \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}_\eta| = \text{const}, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = N^b u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3.$$

Базисные функции  $N_k(\varphi)$  должны удовлетворять условию

$$N_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}$$

для того, чтобы начальное условие (3) выполнялось при любых значениях неизвестных коэффициентов. Заметим также, что если орбита КА является круговой, то разложение (4) является точным решением кватернионного уравнения (2) при  $\mathbf{a}_k \equiv \mathbf{0}$ ,  $k = \overline{1, M}$ .

Аппроксимацию производной от кватерниона ориентации орбитальной системы координат получим, продифференцировав разложение (4):

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} \approx \frac{d\hat{\lambda}}{d\varphi} = \frac{d\lambda^{\text{круг}}(\varphi)}{d\varphi} + \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi}. \quad (5)$$

Так как  $\lambda^{\text{круг}}$  есть решение уравнения (2) при  $r^b = 1$ , то (5) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} \approx \frac{d\hat{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \lambda^{\text{круг}}(\varphi) \circ [N^b u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] + \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi}. \quad (6)$$

Подставляя разложение (4) с учётом (6) в уравнение (2), получим невязку  $R_{[0; \varphi^*]}^\lambda$  следующего вида:

$$R_{[0; \varphi^*]}^\lambda = \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k \left\{ 2 \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi} - N_k(\varphi) \cdot [N^b u^b (r^b)^3 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] \right\} + \lambda^{\text{круг}} \circ N^b u^b [1 - (r^b)^3] \mathbf{i}_1.$$



Для получения приближённого равенства  $R_{[0;\varphi^*]}^\lambda = 0$  при  $\varphi \in [0; \varphi^*]$  воспользуемся методом поточечной коллокации [9, 10]. Для этого выберем  $M$  точек коллокации вида  $\varphi_s = s \cdot \varphi^*/M$ ,  $s = \overline{1, M}$ . В качестве весовых функций возьмём дельта-функции Дирака  $W_s = \delta(\varphi - \varphi_s)$ . Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^{\varphi^*} R_{[0;\varphi^*]}^\lambda W_s d\varphi = \int_0^{\varphi^*} R_{[0;\varphi^*]}^\lambda \delta(\varphi - \varphi_s) = 0, \quad s = \overline{1, M}.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции [11], последнюю формулу можно переписать так:

$$R_{[0;\varphi^*]}^\lambda \Big|_{\varphi=\varphi_s} = 0, \quad s = \overline{1, M}. \quad (7)$$

Равенства (7) представляют собой систему  $M$  линейных алгебраических уравнений вида  $K \cdot \mathbf{a} = f$ . При этом компоненты матрицы жёсткости  $K$  и столбца свободных членов  $f$  являются кватернионами ( $s, k = \overline{1, M}$ ):

$$\begin{aligned} K_{s,k} &= 2 \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_s} - N_k(\varphi_s) \cdot \left[ \frac{N^b u^b}{(1 + e \cos \varphi_s)^3} \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3 \right], \\ f_s &= (\lambda^{\text{круг}} \circ N^b u^b [(r^b)^3 - 1] \mathbf{i}_1) \Big|_{\varphi=\varphi_s}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решив систему (8), мы найдём искомые коэффициенты в разложении (4).

### 3. Примеры численного решения задачи

Введём в рассмотрение кватернион погрешности определения ориентации орбитальной системы координат

$$\mathit{err}(e) = \arg \max_{\varphi \in [0; \pi/2]} |\lambda^{\text{прибл}}(\varphi, e) - \lambda^{\text{ПК}}(\varphi, e)|.$$

Здесь  $\lambda^{\text{прибл}}(\varphi, e)$  — приближённое решение, в котором коэффициенты  $\mathbf{a}_k$  получены из решения уравнений (8); а  $\lambda^{\text{ПК}}(\varphi, e)$  — результат интегрирования уравнения (2) методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности [12] с шагом  $h = 0.001$  рад.

Пусть начальное положение КА описывается следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \Omega_u^0 &= \Omega_u(0) = 215.25^\circ, \quad I^0 = I(0) = 64.8^\circ, \quad \omega_\pi^0 = \omega_\pi(0) = 0^\circ, \\ \varphi_0 &= 0 \text{ рад.}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N^b \cdot u^b = 0.35. \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega_u$  — долгота восходящего узла,  $I$  — наклонение орбиты, а  $\omega_\pi$  — угловое расстояние перицентра от узла.

Тогда компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат в начале движения будут равны

$$\lambda_0^{\text{H}} = -0.255650, \quad \lambda_1^{\text{H}} = -0.162241, \quad \lambda_2^{\text{H}} = 0.510674, \quad \lambda_3^{\text{H}} = 0.804694.$$

Указанный кватернион  $\lambda^{\text{H}}$  соответствует ориентации орбиты одного из спутников группировки ГЛОНАСС (при условии, что начальное значение истинной аномалии  $\varphi$  — ноль радиан).

В табл. 1 приведены значения модуля кватерниона погрешности  $\mathit{err}(e)$  для случая, когда базисные функции являлись полиномами. В ходе проведения



математического моделирования движения КА было установлено, что при увеличении количества базисных функций  $M$  погрешность определения ориентации орбитальной системы координат уменьшается. Также были проведены расчёты при  $N_k = (\varphi/\varphi^*)^k$ . Результаты совпали с теми, что указаны в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Значения модуля кватерниона погрешности  $err(e)$  для  $N_k = \varphi^k$   
 Error quaternion modulus values  $err(e)$  for  $N_k = \varphi^k$

$e$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	$M = 6$	$M = 7$	$M = 8$
0.01	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$
0.02	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$
0.03	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
0.04	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
0.05	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
0.06	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
0.07	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
0.08	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-4}$	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
0.09	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$
0.10	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$

В табл. 2 приведены значения модуля кватерниона погрешности  $err(e)$  для случая, когда базисные функции являлись тригонометрическими. Минимальное значение погрешности (такое же, как в табл. 1 при  $M = 8$ ) было достигнуто при меньшем количестве базисных функций (а именно при  $M = 5$ ). В то же время при увеличении количества синусоид в разложении погрешность начинает увеличиваться. Заметим, что базисные функции  $N_k = \sin(k\varphi/(2\varphi^*))$  дают большую погрешность, чем та, что приведена в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Значения модуля кватерниона погрешности  $err(e)$  для  $N_k = \sin \frac{\pi k \varphi}{2\varphi^*}$   
 Error quaternion modulus values  $err(e)$  for  $N_k = \sin \frac{\pi k \varphi}{2\varphi^*}$

$e$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	$M = 6$	$M = 7$	$M = 8$
0.01	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
0.02	$9.3 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$
0.03	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$
0.04	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$
0.05	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$
0.06	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-4}$
0.07	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$9.0 \cdot 10^{-4}$
0.08	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$
0.09	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
0.10	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$

Помимо указанных выше базисных функций, были рассмотрены полиномы относительно радиуса-вектора орбиты КА ( $N_k = (r(\varphi) - r(0))^k$ ). В этом случае



погрешность определения ориентации орбитальной системы координат оказалась на порядок выше той, что указана в табл. 1, 2.

На рисунке показаны законы изменения компонент кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат для случая, когда в разложение (4) входят пять тригонометрических базисных функций. При этом погрешность определения скалярной части оказалась на порядок меньше, чем погрешность определения компонент векторной части.

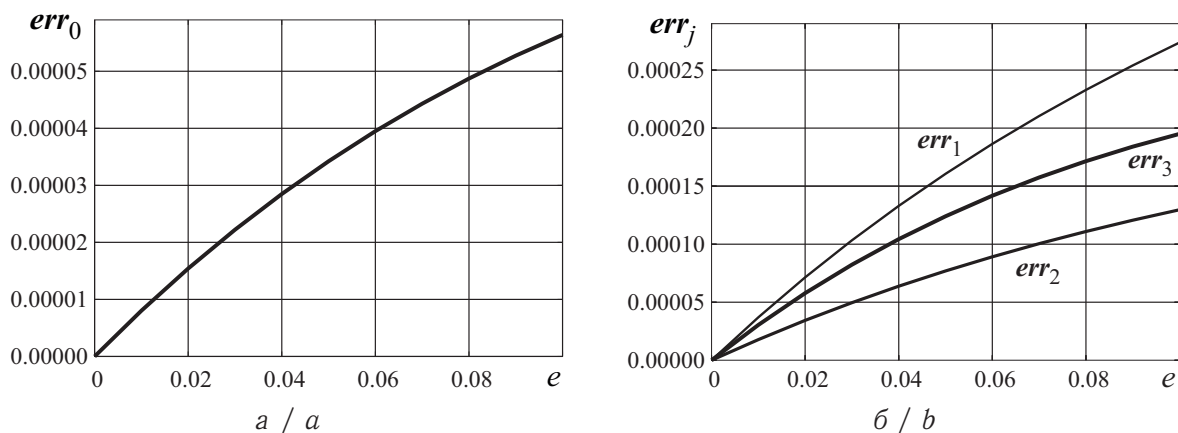


Рис. Компоненты кватерниона погрешности:  $a$  — скалярная часть;  $b$  — векторная часть  
Fig. Components of the error quaternion:  $a$  — scalar part;  $b$  — vector part

Проведённое математическое моделирование показало перспективность применения разложения (4) для исследования орбитального движения КА. В отличие от результатов работы [13], удалось в десять раз увеличить максимальное значение эксцентриситета орбиты, для которого были проведены расчёты по предложенным формулам (эксцентриситет орбиты КА не обязательно должен быть малой величиной).

### Список литературы

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759–770.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92>
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
4. Зубов В. И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Ленинград : Судостроение, 1970. 317 с.
5. Молоденков А. В. К решению задачи Дарбу // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 3–13.
6. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1983. 393 с.
7. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика, 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
8. Челноков Ю. Н. Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 3. С. 11–20.



9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Москва : Мир, 1986. 318 с.
10. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Ленинград : Судостроение, 1979. 264 с.
11. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. Москва : Наука, 1979. 408 с.
12. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. Москва : Наука, 1971. 424 с.
13. Панкратов И. А. Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97–105. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>

### References

1. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I. *Cosmic Research*, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
2. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation using quaternion equations of orbital system of coordinates orientation. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 84–92 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92>
3. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of Quaternions in the Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
4. Zubov V. I. *Analiticheskaya dinamika giroskopicheskikh sistem* [Analytical Dynamics of Gyroscopic Systems]. Leningrad, Sudostroenie, 1970. 317 p. (in Russian).
5. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176. <https://doi.org/10.3103/S002565440702001X>
6. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1983. 393 p. (in Russian).
7. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 646–657. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.002>
8. Chelnokov Yu. N. On determining vehicle orientation in the Rodrigues – Hamilton parameters from its angular velocity. *Mechanics of Solids*, 1977, vol. 37, no. 3, pp. 8–16.
9. Zienkiewicz O., Morgan K. *Finite Elements and Approximation*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1983. 328 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 318 p.).
10. Connor J. J., Brebbia C. A. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. London, Boston, Newnes-Butterworths, 1977. 310 p. (Russ. ed.: Leningrad, Sudostroenie, 1979. 264 p.).
11. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, Clarendon Press, 1967. 324 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1979. 408 p.).
12. Moiseev N. N. *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* [Numerical Methods in the Theory of Optimal Systems]. Moscow, Nauka, 1971, 424 p. (in Russian).
13. Pankratov I. A. Analytical solution of equations of near-circular spacecraft's orbit orientation. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 97–105 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>

Поступила в редакцию / Received 24.08.2020

Принята к публикации / Accepted 07.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021