



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 227–237  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237

Научная статья

УДК 534.1:539.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

## Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами

А. Л. Смирнов<sup>✉</sup>, Г. П. Васильев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

**Смирнов Андрей Леонидович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, <https://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, [a.l.smirnov@spbu.ru](mailto:a.l.smirnov@spbu.ru)

**Васильев Григорий Павлович**, аспирант математико-механического факультета, <https://orcid.org/0000-0002-8647-1385>, [vasiliev.gregory@gmail.com](mailto:vasiliev.gregory@gmail.com)

**Аннотация.** В статье исследуются поперечные колебания неоднородной круглой тонкой пластины. Рассмотрены пластины, геометрические и физические параметры которых мало отличаются от постоянных, причем исследуется случай, когда параметры зависят только от радиальной координаты, что позволяет разделить переменные. Полученные уравнения колебаний представляют собой однородные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые вместе с однородными граничными условиями образуют регулярно возмущенную краевую задачу на собственные значения. С помощью метода возмущений получены асимптотические формулы для частот собственных колебаний пластины, толщина и/или модуль Юнга которой нелинейно зависят от радиальной координаты. В качестве примеров рассмотрены собственные колебания пластины, зависимость параметров которой от радиальной координаты является квадратичной или экспоненциальной. Проанализировано поведение частот в зависимости от малого параметра возмущения при условии фиксированности массы при изменении толщины или средней жесткости пластины при изменении модуля Юнга. Рассмотрено влияние краевых условий на характер поведения низших частот при изменении малого параметра. Рассмотрена зависимость величин, вызываемых неоднородностью поправок к частотам, от значений соответствующих волновых чисел. Для широкого диапазона значений малого параметра асимптотические результаты для низших частот колебаний пластины хорошо согласуются с результатами конечно-элементного анализа в пакете COMSOL Multiphysics 5.4 и результатами других авторов, полученными с помощью различных численных методов. Малое нелинейное изменение параметров оказывает на все частоты, включая фундаментальную, заметно большее влияние, чем линейное.

**Ключевые слова:** собственные колебания пластин, неоднородная круглая пластина, метод возмущений

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00832-а и 19-01-00208-а).

**Для цитирования:** Смирнов А. Л., Васильев Г. П. Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2.



С. 227–237. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

## Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters

A. L. Smirnov<sup>✉</sup>, G. P. Vasiliev

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Andrei L. Smirnov, a.l.smirnov@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1526-2869>

Grigory P. Vasiliev, vasiliev.gregory@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8647-1385>

**Abstract.** Transverse vibrations of an inhomogeneous circular thin plate are studied. The plates, which geometric and physical parameters slightly differ from constant ones and depend only on the radial coordinate, are analyzed. After separation of variables the obtained homogeneous ordinary differential equations together with homogeneous boundary conditions form a regularly perturbed boundary eigenvalue problem. For frequencies of free vibrations of a plate, which thickness and/or Young's modulus nonlinearly depend on the radial coordinate asymptotic formulas are obtained by means of the perturbation method. As examples, free vibrations of a plate with parameters quadratically or exponentially depending on the radial coordinate, are examined. The effect of the small perturbation parameter on the behavior of frequencies is also analyzed under special conditions: i) for a plate, the mass of which is fixed, if the thickness is variable and ii) for a plate with the fixed average stiffness, if Young's modulus is variable. Finally, effects of the boundary conditions and values of the wave numbers on the corrections to frequencies are studied. For a wide range of small parameter values, the asymptotic results for the lower vibration frequencies well agree with the results of finite element analysis with COMSOL Multiphysics 5.4 and the numerical results of other authors.

**Keywords:** free vibrations of plates, inhomogeneous circular plate, perturbation method

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00832-a and No. 19-01-00208-a).

**For citation:** Smirnov A. L., Vasiliev G. P. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

### Введение

Строение спектра собственных поперечных колебаний круглых тонких пластин при различных краевых условиях является хорошо изученной задачей. Это связано, во-первых, с частым применением таких структурных элементов в инженерных конструкциях, а во-вторых, с простотой геометрии, которая в некоторых случаях делает возможным получение аналитического решения. Список работ по этой теме обширен, систематизированный обзор результатов исследований приведен в [1]. Применение численных методов позволяет найти значения частот и формы собственных колебаний для тонкой пластины любой геометрии.



Целью нашего исследования было получение асимптотических формул, описывающих влияние малой неоднородности параметров тонкой пластины, толщины или жесткости, на ее собственные частоты. Если задача допускает разделение переменных, то для получающейся одномерной задачи алгоритм построения асимптотического решения краевой задачи на собственные значения описан, например, в [2]. Асимптотические методы при исследовании колебаний неоднородных круглых пластин с линейным возмущением параметров были использованы в [3], а пластин с отверстиями — в [4].

В данной работе исследуется зависимость собственных частот колебаний круглых пластин от малых возмущений, нелинейных по радиальной координате, в предположении, что параметры пластины, геометрические и физические, являются гладкими функциями координат.

### 1. Уравнения колебаний тонкой круглой пластины с переменными параметрами

Рассмотрим собственные поперечные колебания круглой тонкой пластины радиуса  $R$  с переменными модулем Юнга  $E$  и толщиной  $h$ . Остальные физические параметры пластины ( $\rho$  — плотность материала,  $\nu$  — коэффициент Пуассона) считаем постоянными, причем во всех рассмотренных примерах, кроме специально оговоренных,  $\nu = 0.3$ . В статье рассматривается случай, когда параметры пластины зависят только от радиальной координаты. На рис. 1 можно видеть вид сверху рассматриваемой пластины, а также ее поперечное сечение.

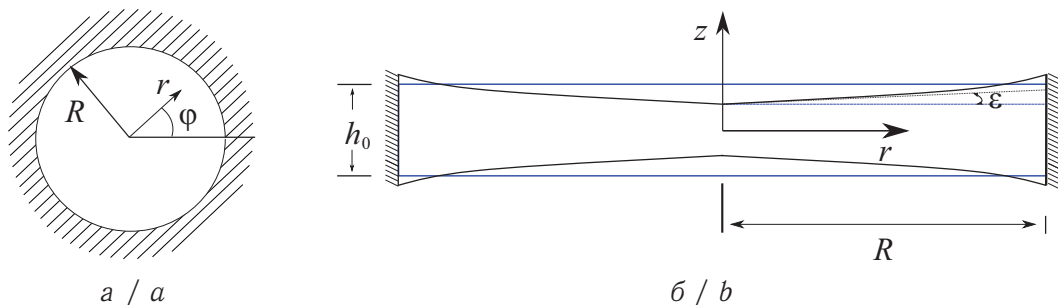


Рис. 1. Круглая пластина переменной толщины (а) и ее сечение (б)  
 Fig. 1. A circular plate with the variable cross-section (a) and its section (b)

В модели пластины, использующей гипотезы Кирхгофа – Лява, уравнение поперечных колебаний в безразмерном виде после разделения переменных для прогиба  $w(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(r) \cos(m\varphi)$  имеет вид [3]:

$$L(w_m(r)) - h(r) \lambda^4 w_m(r) = 0, \quad L(w_m(r)) = \sum_{i=0}^4 b_i \frac{d^i}{dr^i} w_m(r), \quad (1)$$

где коэффициенты линейного дифференциального оператора  $L$

$$b_0 = \frac{m^4 - 4m^2}{r^4} D - \frac{\nu m^2}{r^2} D'' + \frac{3m^2}{r^3} D', \quad b_1 = -\frac{2m^2 + 1}{r^2} D' + \frac{2m^2 + 1}{r^3} D + \frac{\nu}{r} D'',$$

$$b_2 = -\frac{2m^2 + 1}{r^2} D + \frac{2 + \nu}{r} D' + D'', \quad b_3 = \frac{2}{r} D + 2D', \quad b_4 = D.$$



Здесь  $D = D(r)$  — цилиндрическая жесткость,  $m$  — число волн в окружном направлении,  $\omega$  и  $\lambda$  — соответственно размерная и безразмерная частоты колебаний.

Связь размерных и безразмерных (с  $\tilde{\phantom{x}}$ ) переменных такова:

$$D(r) = D_0 \tilde{D}(\tilde{r}), \quad h(r) = h_0 \tilde{h}(\tilde{r}), \quad E(r) = E_0 \tilde{E}(\tilde{r}), \quad w(r) = R w(\tilde{r}),$$

$$r = R \tilde{r}, \quad \lambda^4 = \frac{12(1 - \nu^2) R^4 \omega^2 \rho}{E_0 h_0^2}, \quad D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad 0 \leq \tilde{r} \leq 1.$$

Здесь  $D_0$ ,  $h_0$ ,  $E_0$  — соответственно невозмущенные жесткость, толщина и модуль Юнга. Далее знак « $\tilde{\phantom{x}}$ » и индекс  $m$  опускаются, все величины в таблицах и на графиках безразмерные, причем для пластины переменной толщины и постоянной жесткости  $D(r) = 1$ , а для пластины переменной жесткости и постоянной толщины  $h(r) = 1$ .

## 2. Метод возмущений

Для исследования частот колебаний круглой пластины с параметрами жесткости и толщины, близкими к постоянным, применим метод возмущений. В отличие от [3], считаем зависимость параметров от  $\varepsilon$  не линейной, а полиномиальной, т. е. полагаем

$$h(r) = 1 + \varepsilon h_1(r) + \varepsilon^2 h_2(r) + \dots, \quad E(r) = 1 + \varepsilon E_1(r) + \varepsilon^2 E_2(r) + \dots, \quad (2)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad w(r) = w_0(r) + \varepsilon w_1(r) + \varepsilon^2 w_2(r) + \dots, \quad \varepsilon \ll 1.$$

После подстановки (2) в уравнение (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получаем серию краевых задач:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad & \Delta^2 w_0(r) - \lambda_0^4 w_0(r) = 0, \\ \varepsilon^1: \quad & \Delta^2 w_1(r) - \lambda_0^4 w_1(r) = F_{11}(\lambda_0, w_0(r)) + F_{12}(\lambda_0, w_0(r)) \cdot \lambda_1, \\ \varepsilon^2: \quad & \Delta^2 w_2(r) - \lambda_0^4 w_2(r) = F_{21}(\lambda_0, w_0(r), \lambda_1, w_1(r)) + F_{22}(\lambda_0, w_0(r), \lambda_1, w_1(r)) \cdot \lambda_2, \\ \varepsilon^3: \quad & \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Условием существования решения системы является ортогональность правых частей уравнений решению  $w_0(r)$  [2], а именно

$$\int_0^1 (F_{i1}(\lambda_j, w_j(r)) + F_{i2}(\lambda_j, w_j(r)) \cdot \lambda_i) w_0(r) r dr = 0, \quad j = 0, \dots, i-1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где скалярное произведение функций  $f(r)$  и  $g(r)$  и норма определяются равенствами

$$(f(r) \cdot g(r)) = \int_0^1 f(r) g(r) r dr, \quad \|f(r)\| = \int_0^1 f^2(r) r dr.$$

Откуда получаем формулы для поправок к частотам:

$$\lambda_i = -\frac{I_{i1}}{I_{i2}}, \quad I_{ik} = \int_0^1 F_{ik} w_0(r) r dr, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Громоздкие формулы для определения операторов  $F_{ik}$  приведены в Приложении.

Последовательность построения решения  $w(r)$  такова. При заданных граничных условиях из уравнения для нулевого приближения (3) находим решение  $w_0(r)$  и частоту  $\lambda_0$ . Затем определяем  $\lambda_1$  по формуле (4) и решение  $w_1(r)$  уравнения первого приближения (3) и т. д.



### 3. Малое нелинейное изменение толщины

В работе [3] исследовались пластины с линейными возмущениями  $h_1(r)$  и  $E_1(r)$ . В этой статье рассматриваются возмущения, имеющие вид квадратичной или экспоненциальной функций.

Вначале исследуем, какое влияние на спектр частот колебаний оказывает малое квадратичное изменение толщины, причем выделим два случая:

- 1)  $h = 1 + \varepsilon r^2$  — увеличение (или уменьшение) толщины для всех  $r$ ;
- 2)  $h = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$  — квадратичное изменение толщины, сохраняющее массу пластины. При этом  $h(0) = 1 + \varepsilon$  и  $h(1) = 1 - \varepsilon$ .

Здесь и далее значения частот колебаний пластин, полученные авторами по асимптотической формуле (5) и численно в пакете COMSOL Multiphysics 5.4., сравниваются с результатами других авторов.

В табл. 1 значения частот колебаний для пластин с линейным и квадратичным изменением толщины приведены для  $\varepsilon = -0.3$ , а  $(m, n)$  — число волн в окружном и радиальном направлениях соответственно.

Таблица 1 / Table 1

Низшие частоты осесимметричных колебаний пластин, толщина которых меняется по линейному и квадратичному законам при  $\varepsilon = -0.3$

The lower axisymmetric vibrational frequencies for plates with linear and quadratic thickness variations for  $\varepsilon = -0.3$

$(m, n)$	$h(r) = 1 + \varepsilon r$				$h(r) = 1 + \varepsilon r^2$			
	Жесткая заделка Clamped edge		Шарнирное опирание Simply supported edge		Жесткая заделка Clamped edge		Шарнирное опирание Simply supported edge	
	(5)	[5]	(5)	[5]	(5)	[5]	(5)	[5]
(0,0)	2.8144	2.7890	2.0385	2.0287	2.8635	2.8418	2.1012	2.0984
(0,1)	5.7409	5.6975	5.0020	4.9726	5.8825	5.8447	5.1598	5.1359
(0,2)	8.6628	8.5992	7.9307	7.8785	8.8903	8.8388	8.1656	8.1264

В статье [5] решения для осесимметричных колебаний были получены в виде бесконечных степенных рядов.

На рис. 2, а изображена зависимость от параметра  $\varepsilon$  низших частот колебаний защемленной пластины, толщина которой меняется по закону  $h(r) = 1 + \varepsilon r^2$ . Точками изображены частоты, найденные численно в COMSOL, сплошными линиями — полученные по формуле (5). Зависимость частот от  $\varepsilon$  близка к линейной при  $\varepsilon > 0$ , а величина первой поправки к частоте,  $\lambda_1$ , существенно зависит от волновых чисел  $(m, n)$ .

Для случая квадратичного изменения толщины при сохранении общей массы пластины графики зависимости частот от параметра  $\varepsilon$  приведены на рис. 2, б. Влияние изменяемости толщины на частоты оказывается существенно бóльшим, чем в линейном случае, в частности, все частоты, кроме фундаментальной, убывают при больших по модулю значениях  $\varepsilon$ .

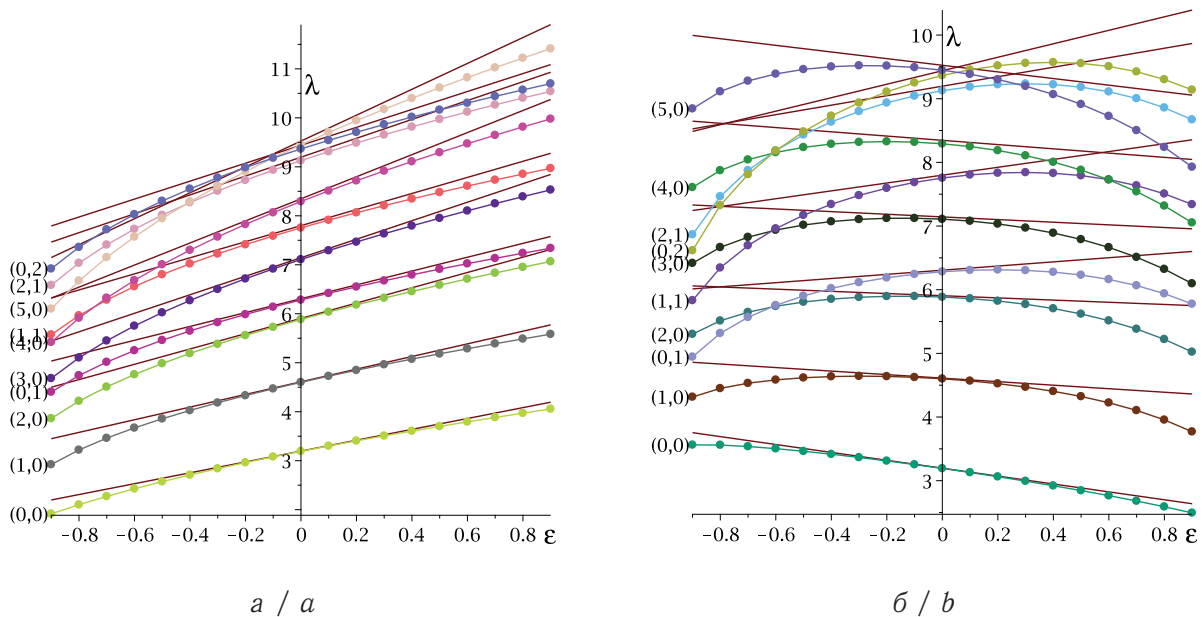


Рис. 2. Низшие частоты поперечных колебаний защемленной пластины при  $h = 1 + \varepsilon r^2$  (а) и  $h = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$  (б) (цвет online)  
 Fig. 2. The lower transverse vibration frequencies of the clamped plate for  $h = 1 + \varepsilon r^2$  (a) and  $h = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$  (b) (color online)

В качестве последнего примера рассмотрим случай экспоненциального изменения толщины  $h(r) = e^{\varepsilon r}$ . Поскольку в этом случае  $h(r) \approx 1 + \varepsilon r + O(\varepsilon^2)$ , то при малых значениях  $\varepsilon$  следует ожидать, что линейное приближение даст хорошую аппроксимацию для частот пластины с экспоненциальным изменением толщины.

В табл. 2 приведены численные и асимптотические значения частот и их сравнение с результатами других авторов.

Таблица 2 / Table 2

Значения частот при линейном и экспоненциальном возмущении толщины  
 The values of vibrational frequencies for linear and exponential perturbation of the plate thickness

$\varepsilon$	$(m, n)$	$h(r) = 1 + \varepsilon r$		$h(r) = e^{\varepsilon r}$	$h(r) = 1 + \varepsilon r$	$h(r) = e^{\varepsilon r}$
		COMSOL	(5)	COMSOL	[6]	[7]
0.1	(0,0)	3.3172	3.3235	3.3227	3.3216	3.3267
	(0,1)	6.4651	6.4949	6.4720	6.4916	6.4979
	(0,2)	9.6125	9.6984	9.6212	9.6927	9.7016
-0.1	(0,0)	3.0631	3.0689	3.0687	3.0669	3.0720
	(0,1)	6.0913	6.1179	6.0986	6.1137	6.1209
	(0,2)	9.1060	9.1805	9.1152	9.1717	9.1838

#### 4. Малое нелинейное изменение жесткости

Пусть теперь модуль Юнга пластины является функцией радиальной координаты, в то время как толщина пластины остается постоянной. Случай линейной зависимости  $E(r)$  был рассмотрен в работе [3], здесь же будет проанализировано влияние на частоты квадратичной и экспоненциальной изменяемости  $E(r)$ .



Графики зависимости частот колебаний жестко закрепленной пластины от малого параметра  $\varepsilon$  при  $E(r) = 1 + \varepsilon r^2$  представлены на рис. 3, а. Характеры зависимости частот от  $\varepsilon$  при квадратичном изменении жесткости близки к линейным [3, 8], но значения первых поправок к частотам для линейного случая больше (табл. 3). Заметим, что значения  $\lambda_1^{m^*,n}$  монотонно увеличиваются с ростом  $n$ , а значения  $\lambda_1^{m,n^*}$  — с ростом  $m$ .

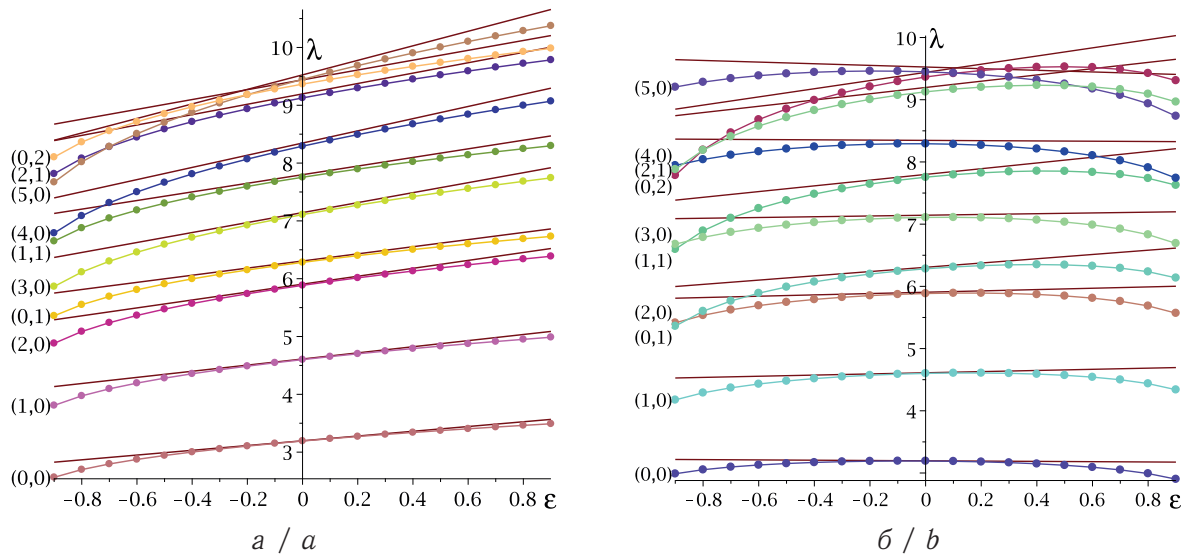


Рис. 3. Зависимость частот колебаний от малого параметра  $\varepsilon$  при  $E(r) = 1 + \varepsilon r^2$  (а) и  $E(r) = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$  (б) (цвет online)

Fig. 3. Vibrational frequencies vs. small perturbation parameter  $\varepsilon$  for  $E(r) = 1 + \varepsilon r^2$  (a) and  $E(r) = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$  (b) (color online)

Таблица 3 / Table 3

Первая поправка к частотам колебаний,  $\lambda_1$ , для линейного и квадратичного возмущений жесткости

The first correction to the vibrational frequencies,  $\lambda_1$ , for linear and quadratic stiffness variations

$(m, n)$	$E(r) = 1 + \varepsilon r$	$E(r) = 1 + \varepsilon r^2$	$(m, n)$	$E(r) = 1 + \varepsilon r$	$E(r) = 1 + \varepsilon r^2$
(0,0)	0.5194	0.4113	(1,1)	1.0815	0.7451
(1,0)	0.7240	0.5299	(4,0)	1.4285	1.0545
(2,0)	0.9386	0.6848	(2,1)	1.3093	0.8976
(0,1)	0.8709	0.6166	(0,2)	1.2422	0.8513
(3,0)	1.1799	0.8624	(5,0)	1.6803	1.2567

Разумеется, область, в которой асимптотические формулы справедливы, ограничена окрестностью  $\varepsilon = 0$ . Однако интересно посмотреть, насколько эти формулы неточны при нарушении условия  $\varepsilon \ll 1$ , скажем, при  $\varepsilon = 1$ . Сравнения в табл. 4 производятся для первых трех частот осесимметричных колебаний для квадратичного изменения частот при  $\nu = 0.1$ . В статье [9] для вычисления частот использовался метод стрельб. Даже для таких экстремальных значений параметра  $\varepsilon$  значения частот, найденные численно и асимптотически, достаточно близки.

Среднее значение модуля Юнга сохраняется при его квадратичном изменении, если  $E(r) = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$ . Результаты вычислений частот для пластин с указанной жесткостью представлены на рис. 3, б. В отличие от предыдущего случая,



зависимость частот от параметра возмущения (при  $\varepsilon > 0$ ) немонотонна, в частности, у частот  $\lambda^{m,0}$  максимум достигается при  $\varepsilon$ , близком к 0.

Таблица 4 / Table 4

Частоты колебаний при квадратичном и экспоненциальном изменении модуля Юнга при  $\varepsilon = 1$

Vibrational frequencies of plates with quadratic and exponential Young modulus variations at  $\varepsilon = 1$

$E(r)$	$(m, n)$	Жесткая заделка Clamped edge			Шарнирное опирание Simply supported edge		
		(5)	COMSOL	[9]	(5)	COMSOL	[9]
$1 + r^2$	(0,0)	3.6288	3.5345	3.5384	2.3342	2.3081	2.3087
	(0,1)	6.9364	6.7860	6.8081	5.9046	5.8089	5.8198
	(0,2)	10.3003	10.0560	10.1257	9.3326	9.1510	9.1929
$1 + e^r$	(0,0)	4.8299	4.2011	4.2048	3.0937	2.7643	2.7659
	(0,1)	9.1916	8.1145	8.1406	7.8240	6.9627	6.9757
	(0,2)	13.6254	12.0390	12.1227	12.3456	10.9680	11.0182

В завершение рассмотрим экспоненциальное изменение модуля Юнга:

- 1)  $E(r) = 1 + \varepsilon e^r$ ;
- 2)  $E(r) = e^{-\varepsilon r}$ ;
- 3)  $E(r) = 1 + \varepsilon(e^{-br} - (2(e^b - b - 1)/(e^b b^2)))$ .

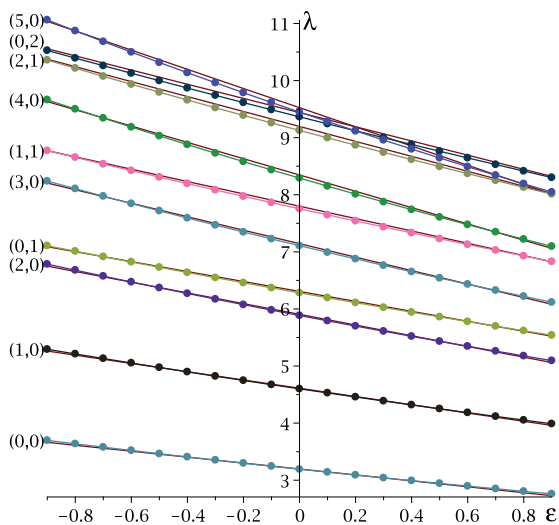


Рис. 4. Частоты колебаний для пластины с жесткостью  $E(r) = e^{-\varepsilon r}$  (COMSOL) и с жесткостью  $E(r) = 1 - \varepsilon r$  (5) (цвет online)  
 Fig. 4. Vibrational frequencies for a plate with the stiffness  $E(r) = e^{-\varepsilon r}$  (COMSOL) and  $E(r) = 1 - \varepsilon r$  (5) (color online)

Значения частот для первого случая при  $\varepsilon = 1$  приведены в табл. 4, и, как и в случае квадратичного изменения жесткости, они оказываются достаточно близки к точным значениям.

Второй случай представляет практический интерес при исследовании колебаний биомеханических структур, например, решетчатой пластины глаза, жесткость которой аппроксимируется убывающей от центра экспоненциальной функцией (см. [10]). Поскольку  $e^{-\varepsilon r} = 1 - \varepsilon r + O(\varepsilon^2)$  при малых значениях  $\varepsilon$ , интересно сравнить результаты численного определения частот при  $E(r) = e^{-\varepsilon r}$  и асимптотического для  $E(r) = 1 - \varepsilon r$ . Значения частот, приведенные на рис. 4, демонстрируют хорошее совпадение численных (точки) и асимптотических (сплошные линии) результатов.

Наконец, для третьего случая изменения  $E(r)$ , когда сохраняется среднее значение модуля Юнга, существенное влияние имеет величина параметра  $b$ . При положительных значениях  $b$  частоты мало отличаются от частот пластины с постоянным модулем Юнга, как это видно на рис. 5, а. В свою очередь, из данных рис. 5, б понятно, что при отрицательных значениях  $b$  некоторые более высокие частоты быстро убывают с ростом  $\varepsilon$ .



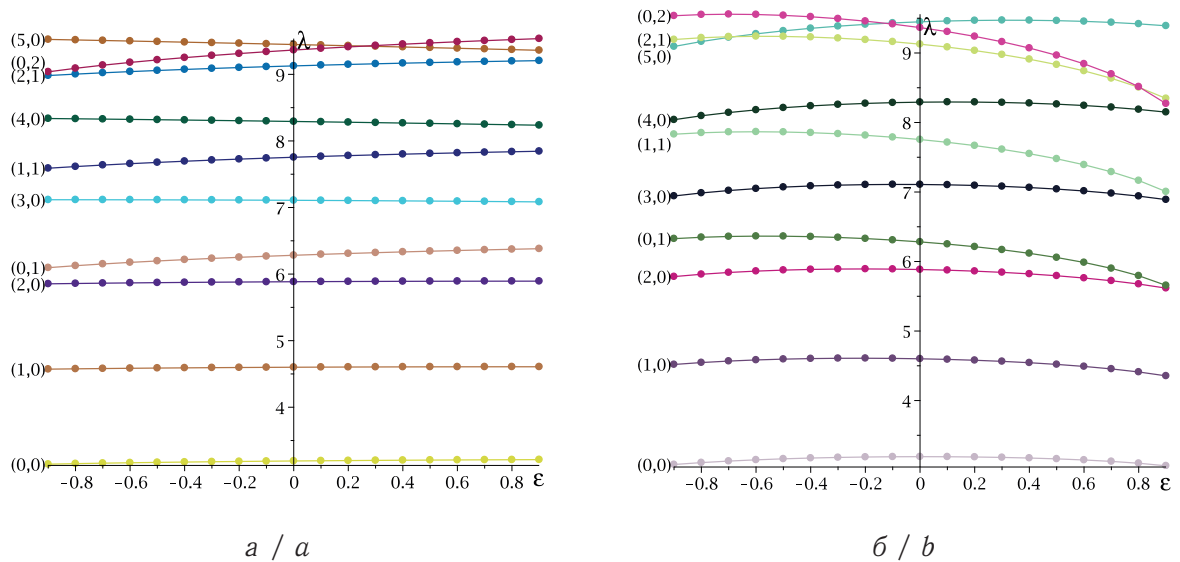


Рис. 5. Частоты колебаний при сохранении средней жесткости при  $b = 4$  (a) и  $b = -1$  (б) (цвет online)

Fig. 5. Vibrational frequencies for a plate with the fixed average stiffness for  $b = 4$  (a) and  $b = -1$  (b) (color online)

## Заключение

Полученные в работе асимптотические формулы позволяют указать хорошие приближения для собственных частот колебаний пластин в случае малого возмущения параметров толщины и модуля Юнга, причем сам вид возмущения может иметь произвольный характер, в частности, квадратичный или встречающийся в приложениях экспоненциальный. Представляет интерес вычисление следующего члена в асимптотической формуле для частот, что позволит хотя бы частично объяснить нелинейный характер их зависимости с ростом  $\varepsilon$ . Необходимое для этого определение первой поправки к решению представляет определенные вычислительные трудности.

## Список литературы

1. Leissa A. W. Vibration of plates. Washington, US : Government Printing Office, 1969. 353 p.
2. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R. Asymptotic methods in mechanics of solids. Basel : Birkhäuser, 2015. 325 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18311-4>
3. Vasiliev G. P., Smirnov A. L. Free vibration frequencies of a circular thin plate with variable parameters // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2020. Vol. 53, № 3. P. 351–357. <https://doi.org/10.1134/S1063454120030140>
4. Smirnov A. L. Free vibrations of annular circular and elliptic plates // COMPDYN Proceedings. 2019. Vol. 2. P. 3547–3555.
5. Eisenberger M., Jabareen M. Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2001. Vol. 1, iss. 2. P. 195–206. <https://doi.org/10.1142/S0219455401000196>
6. Prasad C., Jain R. K., Soni S. R. Axisymmetric vibrations of circular plates of linearly varying thickness // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1972. Vol. 23. P. 941–948. <https://doi.org/10.1007/BF01596221>



7. Singh B., Saxena V. Axisymmetric vibration of a circular plate with exponential thickness variation // *Journal of Sound and Vibration*. 1996. Vol. 192, iss. 1. P. 35–42. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0174>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On natural frequencies of transversally isotropic circular plates // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*. 2016. Vol. 49, № 1. P. 77–80. <https://doi.org/10.3103/S1063454116010027>
9. Аникина Т. А., Ватульян А. О., Углич П. С. Об определении переменной жесткости круглой пластины // *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 6. С. 26–35.
10. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия пологих сферических оболочек под действием внутреннего давления // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 390–396. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

### References

1. Leissa A. W. *Vibration of plates*. Washington, US, Government Printing Office, 1969. 353 p.
2. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R. *Asymptotic methods in mechanics of solids*. Basel, Birkhäuser, 2015. 325 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18311-4>
3. Vasiliev G. P., Smirnov A. L. Free vibration frequencies of a circular thin plate with variable parameters. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2020, vol. 53, no. 3, pp. 351–357. <https://doi.org/10.1134/S1063454120030140>
4. Smirnov A. L. Free vibrations of annular circular and elliptic plates. *COMPADYN Proceedings*, 2019, vol. 2, pp. 3547–3555.
5. Eisenberger M., Jabareen M. Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2001, vol. 1, iss. 2, pp. 195–206. <https://doi.org/10.1142/S0219455401000196>
6. Prasad C., Jain R. K., Soni S. R. Axisymmetric vibrations of circular plates of linearly varying thickness. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 1972, vol. 23, pp. 941–948. <https://doi.org/10.1007/BF01596221>
7. Singh B., Saxena V. Axisymmetric vibration of a circular plate with exponential thickness variation. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 192, iss. 1, pp. 35–42. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0174>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On natural frequencies of transversally isotropic circular plates. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2016, vol. 49, no. 1, pp. 77–80. <https://doi.org/10.3103/S1063454116010027>
9. Anikina T. A., Vatulyan A. O., Uglich P. S. On the calculation of variable stiffness for a circular plate. *Computational Technologies*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 26–35 (in Russian).
10. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the unsymmetrical buckling of shallow spherical shells under internal pressure. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 390–396 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

### Приложение / Appendix

Для уравнений первого приближения

$$F_{11} = ((3H_1 + E_1) \cdot R_1 + CH_{01}) \cdot W_0^T, \quad F_{12} = 4\lambda_0^3 w_0(r).$$

Для уравнений второго приближения

$$F_{22} = F_{12},$$



$$F_{21} = ((3H_2 + E_2).R_1 + B_1 + (H_1.(3R_1, R_2, R_3))^T.E_1^T + \\ + \sum_{i=1}^5 H_1.A_i.H_1^T + CH_{11}).W_0^T + ((3H_1 + E_1).R_1 + B_2 + CH_{01}).W_1^T.$$

Здесь

$$W_0 = (w_0(r), w_0'(r), w_0''(r), w_0'''(r), w_0''''(r)), \quad W_1 = (w_1(r), w_1'(r), w_1''(r), w_1'''(r), w_1''''(r)),$$

$$H_1 = (h_1(r), h_1'(r), h_1''(r)), \quad E_1 = (e_1(r), e_1'(r), e_1''(r)),$$

$$H_2 = (h_2(r), h_2'(r), h_2''(r)), \quad E_2 = (e_2(r), e_2'(r), e_2''(r)),$$

$$C_0 = (\lambda_0^4, 0, 0), \quad C_1 = (4\lambda_0^3\lambda_1, 0, 0),$$

$$CH_{01} = (C_0.H_1^T, 0, 0, 0, 0), \quad CH_{11} = (C_1.H_1^T, 0, 0, 0, 0),$$

$$B_1 = (6\lambda_0^2\lambda_1^2, 0, 0, 0, 0), \quad B_2 = (4\lambda_0^3\lambda_1, 0, 0, 0, 0),$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -\frac{m^2(m^2-4)}{r^4} & -\frac{2m^2+1}{2m^2+1} & \frac{2m^2+1}{r^2} & -\frac{2}{r} & -1 \\ -\frac{3m^2}{m^2\nu} & \frac{2m^2+1}{r^2} & -\frac{\nu+2}{r} & -2 & 0 \\ \frac{r^3}{r^2} & -\frac{\nu}{r} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9m^2}{r^3} & \frac{6m^2+3}{r^2} & -\frac{3(\nu+2)}{r} & -6 & 0 \\ \frac{6m^2\nu}{r^2} & -\frac{6\nu}{r} & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \frac{3m^2\nu}{r^2} & -\frac{3\nu}{r} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3m^2(4-m^2)}{r^4} & -\frac{9m^2}{6m^2r^2\nu} & \frac{3m^2\nu}{r^2} \\ -\frac{9m^2}{r^3} & \frac{6m^2r^2\nu}{r^4} & 0 \\ \frac{3m^2\nu}{r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{6m^2}{r^3} - \frac{3}{r^3} & \frac{6m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} & -\frac{3\nu}{r} \\ \frac{6m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} & -\frac{6\nu}{r} & 0 \\ -\frac{3\nu}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{r} & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3(2m^2+1)}{r^2} & -\frac{3\nu}{r} - \frac{6}{r} & -3 \\ -\frac{3\nu}{r} - \frac{6}{r} & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поступила в редакцию / Received 13.05.2020

Принята к публикации / Accepted 31.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021