Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 458–471
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 458–471
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-458-471

Научная статья
УДК 517.98

Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе

С. А. Чумаченко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Чумаченко Сергей Алексеевич, аспирант кафедры математического анализа, https://orcid.org/0000-0001-7088-3740, chumachenkosergei@gmail.ru

Аннотация. B-сплайны были введены Карри и Шёнбергом. Построенные на равномерной сетке и определенные в терминах сверток, такие сплайны порождают КМА Рисса. В статье рассмотрены сплайны φ_n, которые получаются n-кратным интегрированием функции Уолша с номером $2^n - 1$. Эти сплайны в статье названы двоичными базисными сплайнами. Ранее было доказано, что двоичные базисные сплайны образуют базис в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ и обращающихся в 0 за его пределами. В статье доказывается, что каждый двоичный базисный сплайн будет масштабирующей функцией и порождает кратномасштабный анализ (V_n), который не является риссовским. Тем не менее будет указан порядок приближения функций из пространств Соболева подпространствами (V_n).

Ключевые слова: базисные сплайны, гладкая интерполяция, кратномасштабный анализ, пространства Соболева

Для цитирования: *Чумаченко С. А.* Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 458–471. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-458-471

Article

Binary basic splines in MRA

S. A. Chumachenko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia
Sergei A. Chumachenko, https://orcid.org/0000-0001-7088-3740, chumachenkosergei@ gmail.ru

Abstract. B-splines were introduced by Carry and Schoenberg. Constructed on a uniform mesh and defined in terms of convolutions, such splines generate a Riesz MRA. We constructed splines $varphi_n$, where n is the order of integration of the Walsh function with the number $2^n - 1$. We called these splines binary basic splines. We know that binary basic splines form a basis in the space of functions that are continuous on the segment $[0, 1]$ and 0 outside of it. We proved that binary basic splines are a scaling function and generate an MRA of (V_n) which is not a Riesz MRA. The order of approximation was determined by subspaces from Sobolev spaces.

Keywords: basic splines, smooth interpolation, multi-resolution analysis, Sobolev spaces

For citation: Chumachenko S. A. Binary basic splines in MRA. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 458–471 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-458-471

Введение

B-сплайны являются важным инструментом в теории интерполяции (см. [1–3]) и вейвлет анализе (см. [4–7]). В работах [8, 9] определены базисные сплайны как интегралы от функций Уолша, которые в дальнейшем были названы двоичными базисными сплайнами. Двоичные базисные сплайны второй степени изучены в [10]. В настоящей работе рассмотрены двоичные базисные сплайны произвольной степени. Доказывается, что каждый такой сплайн является масштабирующей функцией и порождает неортогональный КМА. Это означает, что любую функцию из $L_2(\mathbb{R})$ можно приблизить сколь угодно точно подпространствами V_n, порожденными двоичным базисным сплайном. Для случая, когда приближаемая функция принадлежит пространствам Соболева, указана оценка погрешности по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$.

1. Двоичный базисный сплайн и его свойства

Определим функции Радемахера r_k следующим образом. Для $t \in [0, 1)$ положим

$$r_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Продолжим $r_0(t)$ периодически на $[0, +\infty)$ с периодом 1. Если $k \in \mathbb{N}$, то положим

$$r_k(t) = r_0(2^k t).$$

Таким образом, функции Радемахера r_k ($k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \bigsqcup \mathbb{N}$) определены на полупрямой. Мы будем рассматривать их на отрезке $[0, 1]$, полагая равными нулю вне отрезка $[0, 1]$. Нам понадобится также функция Радемахера $r_{-1}(x) = r_0(\frac{1}{2}x)$. Символом $\Delta_i^{(k)}$ будем обозначать двоичный полуинтервал ранга k, т.е.

$$\Delta_i^{(k)} = \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right).$$

Очевидно, что $r_k(t)$ постоянна на любом полуинтервале $\Delta_i^{(k+1)} = \left[\frac{i}{2^{k+1}}, \frac{i+1}{2^{k+1}}\right)$ и на каждом полуинтервале $\Delta_i^{(k)} = \Delta_{2i}^{(k+1)} \cup \Delta_{2i+1}^{(k+1)}$ принимает знак $+1$ на левой половине и -1 на правой. Если $n \in \mathbb{N}$ имеет двоичное разложение

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_s} \quad (n_1 > n_2 > \cdots > n_s \geqslant 0),$$

то функции Уолша в нумерации Пэли определяются равенством

$$w_n(t) = r_{n_1}(t)\, r_{n_2}(t) \, \ldots \, r_{n_s}(t), \quad w_0(t) \equiv 1.$$

В этом случае

$$W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x). \tag{1}$$

Для $f \in L([0,1])$ определим оператор интегрирования

$$If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt \quad (x \in [0,1]).$$

Определение 1. *Двоичным базисным сплайном N-й степени от n-й функции Уолша* будем называть функцию (рисунок)

$$\psi_{n,N}(x) = \begin{cases} Q(n,N)\, I^N W_{2^n-1}(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases} \tag{2}$$

где $Q(n,N)$ — нормирующий коэффициент функции $\psi_{n,N}(x)$ в пространстве $C[0,1]$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N \leqslant n$.

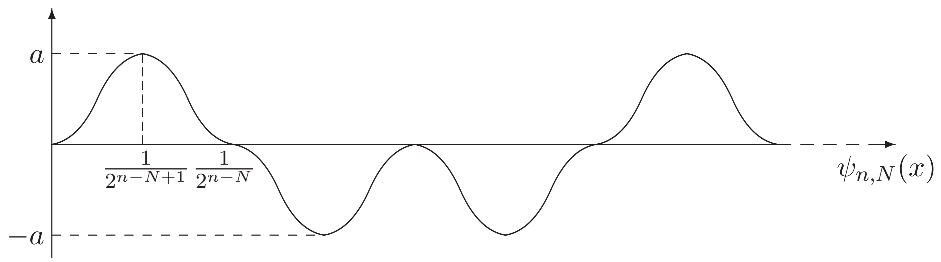

Рис. График функции $\psi_{n,N}(x)$ / Fig. Graph of a function $\psi_{n,N}(x)$

При $N = n-1$ данная система будет базисом Рисса в L_2 (см. [11]). Далее рассмотрим случай $N = n$, но для начала выведем несколько общих свойств для произвольного N.

Замечание 1. Функция $\psi_{n,N}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $N-1$ включительно.

Замечание 2. $\psi_{1,1}(x)$ совпадает с точностью до множителя с образующей функцией системы Фабера – Шаудера.

Теорема 1. *Нормирующий коэффициент вычисляется следующим образом:*

$$Q(n,N) = 2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}, \quad 1 \leqslant N \leqslant n. \tag{3}$$

Доказательство приведено в работе [12].

2. Двоичный базисный сплайн и масштабирующее уравнение

Лемма 1. *Для функции $\psi_{n,N}(x)$ справедливо равенство*

$$\psi_{n+1,n}(x) = \psi_{n,n}(2x) - \psi_{n,n}(2x-1). \tag{4}$$

Доказательство. Заметим, что $r_k(x) = r_{k-1}(2x) + r_{k-1}(2x-1)$. Тогда, используя (2), получим

$$\psi_{n+1,n}(x) = Q(n+1,n) r_0(x) I^n (W_{2^n-1}(2x) + W_{2^n-1}(2x-1)). \tag{5}$$

Однако

$$I^n\Big(W_{2^n-1}(2x)+W_{2^n-1}(2x-1)\Big)=I^{n-1}\int\limits_0^x\Big(W_{2^n-1}\,(2t)+W_{2^n-1}(2t-1)\Big)\,dt=$$

$$=I^{n-1}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\min(x,\frac{1}{2})}W_{2^n-1}(2t)d(2t)+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\max(\frac{1}{2},x)}W_{2^n-1}(2t-1)\,d(2t-1)\right)=\cdots=$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{1}{Q(n,n)}\Big(\psi_{n,n}(2x)+\psi_{n,n}(2x-1)\Big). \tag{6}$$

Подставим (6) в (5)

$$\psi_{n+1,n}(x)=Q(n+1,n)r_0(x)\frac{1}{Q(n,n)}\cdot\frac{1}{2^n}(\psi_{n,n}(2x)+\psi_{n,n}(2x-1))=$$

$$=\frac{Q(n+1,n)}{Q(n,n)}\cdot\frac{1}{2^n}\Big(\psi_{n,n}\,(2x)-\psi_{n,n}\,(2x-1)\Big).$$

Используя (3), получим

$$\frac{Q(n+1,n)}{Q(n,n)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2^{\frac{2(n+1)n+3n-n^2-2}{2}}}{2^{\frac{2n^2+3n-n^2-2}{2}}}\cdot\frac{1}{2^n}=2^{\frac{(2n^2+2n+3n-n^2-2)-(2n^2+3n-n^2-2)-2n}{2}}=2^0=1.$$

Следовательно, $\psi_{n+1,n}(x)=\Big(\psi_{n,n}\,(2x)-\psi_{n,n}\,(2x-1)\Big)$. □

Лемма 2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\psi_{n,n}\,(x)=\frac{1}{2^n}\psi_{n,n}\,(2x-0)+\sum_{t=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\psi_{n,n}\left(2x-\frac{t}{2^n}\right)+\frac{1}{2^n}\psi_{n,n}\,(2x-1)\,. \tag{7}$$

Доказательство. При $n=1$, по замечанию 2, $\psi_{n,n}$ принимает вид функции Фабера – Шаудера. Для нее масштабирующее уравнение действительно имеет вид

$$\psi_{1,1}\,(x)=\frac{1}{2}\psi_{1,1}\,(2x-0)+\frac{1}{4}\psi_{1,1}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\psi_{1,1}\,(2x-1)\,.$$

Пусть (7) выполнено для $n=m-1$, т. е.

$$\psi_{m-1,m-1}(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(2x-0)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(2x-1).$$

Покажем, что оно выполнено при $n=m$. Очевидно, что

$$\psi_{m-1,m-1}\,(2x)-\psi_{m-1,m-1}\,(2x-1)=\left(\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}\,(4x-0)+\right.$$

$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-2\right)\Bigg)-$$

$$-\Bigg(\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-2\right)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}-2\right)+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-4\right)\Bigg). \tag{8}$$

В (8) добавим и вычтем слагаемые

$$\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-1\right)+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}-1\right)+$$

$$+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x-3\right).$$

После перегруппировки получим

$$\psi_{m-1,m-1}(2x)-\psi_{m-1,m-1}(2x-1)=$$

$$=\frac{1}{2^{m-1}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-0\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-1\right)\right)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}-1\right)\right)+$$

$$+\frac{2}{2^{m-1}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-2\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-3\right)\right)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}-2\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}-3\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2^{m-1}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-3\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-4\right)\right).$$

Используя равенство (4), получаем

$$\psi_{m,m-1}(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^{m}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m,m-1}\Big(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\Big)+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x-1).$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int\limits_0^1\psi_{m,m-1}(x)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{t=1}^{2^{m}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m,m-1}\left(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x-1)\right)d\left(\frac{1}{2}2x\right).$$

Применяя (3), получим равенство

$$\frac{Q_{m,m-1}}{Q_{m,m}}\psi_{m,m}(x)=\frac{Q_{m,m-1}}{Q_{m,m}}\Bigg(\frac{1}{2^{m}}\psi_{m,m}(2x)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^m-1}\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m}\left(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^m}\psi_{m,m}(2x-1)\Bigg).$$

Таким образом,

$$\psi_{m,m}(x)=\frac{1}{2^m}\psi_{m,m}(2x)+\sum_{t=1}^{2^m-1}\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m}\left(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^m}\psi_{m,m}(2x-1).$$

□

Пусть $F_{n,N}(x)=\psi_{n,N}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Теорема 2.

$$F_{n,n}\left(x\right)=\frac{1}{2^n}F_{n,n}\left(2x-0\right)+\sum_{t=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n-1}}F_{n,n}\left(2x-t\right)+\frac{1}{2^n}F_{n,n}\left(2x-n\right).$$

Доказательство этой теоремы напрямую следует из леммы 2.

3. Преобразование Фурье и кратномасштабный анализ

Лемма 3. *Определим преобразование Фурье равенством*

$$\hat{f}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\omega)e^{-2\pi i\omega x}dx.$$

Тогда

$$\hat{F}_{n,N}\left(\omega\right)=2^{-N\cdot n-N-1}\cdot\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{N+1}Q(n,N)\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right).$$

Доказательство. Найдем преобразование Фурье функции $\hat{\psi}_{n,N}$. Так как $\psi_{n,N}\equiv 0$ для всех $x\notin(0,1)$, то, интегрируя по частям, получаем

$$\hat{\psi}_{n,N}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_{n,N}(x)e^{-2\pi i\omega x}dx=Q(n,N)\int\limits_{0}^{1}I^NW_{2^n-1}(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx=$$

$$=Q(n,N)\int\limits_{0}^{1}I^NW_{2^n-1}(x)d\left(\frac{1}{-2i\pi\omega}e^{-2\pi i\omega x}\right)=\frac{1}{2i\pi\omega}Q(n,N)\int\limits_{0}^{1}I^{N-1}W_{2^n-1}(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^2Q(n,N)\int\limits_{0}^{1}I^{N-2}W_{2^n-1}(x)e^{-2\pi i\omega x}dx=\cdots=$$

$$=\left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^NQ(n,N)\int\limits_{0}^{1}W_{2^n-1}(x)e^{-2\pi i\omega x}dx.$$

Вычислим $\int\limits_0^1 W_{2^n-1}(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx$. Разобьем отрезок $[0,1]$ на 2^n полуинтервалов длины $\frac{1}{2^n}$. На каждом таком полуинтервале $\Delta_k^{(n)} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ функция Уолша $W_{2^n-1}(x)$ постоянна. Поэтому

$$\int\limits_0^1 W_{2^n-1}(x)e^{-2\pi i\omega x}dx = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(W_{2^n-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right)\int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} e^{-2\pi i\omega x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\pi\omega}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(W_{2^n-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right)\cdot\left(e^{-2\pi i\omega\frac{k}{2^n}} - e^{-2\pi i\omega\frac{k+1}{2^n}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\pi\omega}\left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^n}}\right)\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(W_{2^n-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right)e^{-2\pi i\omega\frac{k}{2^n}}\right).$$

Далее будем использовать (1), объединяя соседние отрезки. На первом шаге:

$$\hat{\psi}_{n,N}(\omega) = \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(W_{2^{n-1}-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right)\left(e^{-\pi i\omega\frac{2k}{2^{n-1}}} - e^{-\pi i\omega\frac{2k+1}{2^{n-1}}}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right)^2\cdot\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(W_{2^{n-1}-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right)e^{-\pi i\omega\frac{k}{2^{n-2}}}\right) = \ldots =$$

$$= \frac{Q(n,N)}{(2i\pi\omega)^{N+1}}\left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right)\prod_{k=0}^{n_1}\left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-k}}}\right)W_{2^{n_1}-1}\cdot\sum_{k=0}^{2^{n_1}-1}\left(\left(\Delta_k^{(n_1)}\right)e^{-\pi i\omega\frac{k}{2^{n-n_1-1}}}\right) =$$

$$= \ldots = \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^k}}\right).$$

Теперь вычислим $\hat{F}_{n,N}(\omega)$:

$$\hat{F}_{n,N}(\omega) = \hat{\psi}_{(n,N)\cdot\frac{1}{2^n}}(\omega) = 2^n\hat{\psi}_{n,N}(2^n\omega) =$$

$$= 2^{n-(N+1)(n+1)}\left(\frac{1}{i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1 - e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - e^{-2^k\pi i\omega}\right) =$$

$$= 2^{-Nn-N-1}\left(\frac{1}{i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1 - e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - e^{-2^k\pi i\omega}\right). \qquad \square$$

Обозначим для краткости $F(x) := F_{n,n}(x)$ и образуем подпространства

$$V_m = \overline{(2^{\frac{m}{2}}F(2^m x + k)_{k\in Z})}.$$

Теорема 3. *Совокупность (V_m), $m \in Z$, образует КМА, т. е. выполнены аксиомы:*

A1) $V_m \subset V_{m+1}$;
A2) $\overline{\bigcup_{m\in Z} V_m} = L_2(R)$;
A3) $\bigcap_{m\in Z} V_m = \{0\}$.

Доказательство. Функция $F(x)$ — масштабирующая, имеет компактный носитель. Так как

$$\hat{F}_{n,n}(\omega) = 2^{-n^2-n-1} \cdot \left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{n+1} Q(n,n)\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right) =$$

$$= 2^{-n^2-n-1} \cdot \left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1-e^{-\pi i\omega}}{2i}\right)^{n+1} Q(n,n)\left(1+e^{-\pi i\omega}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{n-k} =$$

$$= 2^{-n^2-n-1} \cdot \left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{n+1} \cdot \sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)^{n+1} e^{\frac{-\pi i\omega}{2}}\ Q(n,n)\left(1+e^{-\pi i\omega}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{n-k} =$$

$$= 2^{-n^2-n-1} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}{\frac{\pi\omega}{2}}\right)^{n+1} e^{\frac{-\pi i\omega}{2}}\ Q(n,n)\left(1+e^{-\pi i\omega}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{n-k}$$

и $\hat{F}(0) \neq 0$, следовательно, учитывая [13, с. 20], $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ образуют обобщенный КМА. □

4. Приближение подпространствами в метрике Соболева

Определение 2. Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Выражение

$$[f,g](\omega) \overset{df}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\omega+k)\,\overline{g(\omega+k)}$$

называют *скобочным произведением*.

Определение 3. Пусть $s > 0$. Множество

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : ||f||_{W_2^s(\mathbb{R})} = ||\,(1+|\cdot|)^s\,\hat{f}||_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty \right\}$$

называют *пространством Соболева*.

Определение 4. Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R}), \varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m x + k)$. Оператор

$$\beta_m : f \to \sum_{k\in Z} (f, \varphi_{m,k})\,\varphi_{m,k}$$

называют *квазиинтерполяционным*.

Определение 5. Оператор β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t \in \mathbb{R}_+$, если для всех $f \in W_2^t(\mathbb{R})$

$$\|f - \beta_m f\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt}).$$

Лемма 4. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям:*
1) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ существенно ограничена;
2) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t})$;
3) $1 - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t_0})$.
Тогда β_m доставляет аппроксимацию порядка $t_1 = \min(t, 2t_0)$. Здесь символ $f = O(|\cdot|^t)$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{|x|^t} \leqslant C,\ C > 0$.

Доказательство леммы 4 приведено в [13, с. 18–21].

Лемма 5. *Для любого* $n \in \mathbb{N}_0$

$$(\operatorname{ctg}(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^n \operatorname{ctg}^k(x), \tag{9}$$

где

$$a_k^{n+1} = -\left((k-1)\, a_{k-1}^n + (k+1)\, a_{k+1}^n\right), \tag{10}$$

$$a_0^0 = 0, \quad a_1^0 = 1, \quad a_{-1}^m = 0, \quad a_{m+2}^m = 0, \quad a_{m+3}^m = 0, \quad m = 1, 2, 3... \tag{11}$$

При этом

$$a_{n+1}^n = (-1)^n n!, \tag{12}$$

а также для всех $n, k \in \mathbb{N}$

$$a_{2k}^{2n} = a_{2k+1}^{2n+1} = a_{2k-1}^{2n+1} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Доказываем по индукции. Пусть $n = 0$. Тогда

$$(\operatorname{ctg} x)^{(0)} = \operatorname{ctg} x$$

и, очевидно, соотношения (9)–(13) выполнены.

Предположим, что они выполнены для $n = t$. Докажем для $n = t + 1$. Имеем

$$(\operatorname{ctg} x)^{(t+1)} = \left((\operatorname{ctg} x)^{(t)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{t+1} a_k^t \operatorname{ctg}^k(x)\right)' =$$

$$= \frac{d\left(\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k^t \operatorname{ctg}^k(x)\right)}{d(\operatorname{ctg} x)} \cdot \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{t+1} k a_k^n \operatorname{ctg}^{k-1}(x)\right) \cdot \left(-1 - ctg^2 x\right),$$

что доказывает утверждения (9)–(10).

Из этих утверждений очевидно, что $a_{t+2}^{t+1} = -\left((t+1)a_{t+1}^t + (t+3)a_{t+3}^t\right)$, но $a_{t+3}^t = 0$, следовательно, $a_{t+2}^{t+1} = (t+1)a_{t+1}^t = (t+1)!$, что доказывает утверждение (12).

Наконец, если $t = 2m$, то для любых $k \in \mathbb{N}$

$$a_{2k+1}^{2m+1} = -(2k)a_{2k}^{2m} - (2k+2)a_{2k+2}^{2m}.$$

Но на предыдущем шаге индукции было доказано, что $a_{2k}^{2m} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, следовательно, $a_{2k+1}^{2m+1} = 0$. Далее аналогично поступим и для $t = 2k + 1$, таким образом, утверждение (13) тоже доказано. □

Лемма 6. *Справедливо следующее равенство:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{F}(\omega+k)\right|^2 = \frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \left| \left(1 - e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{t=1}^{n} \left(1 - e^{-2^t \pi i\omega}\right)^2 \sum_{k=0}^{2n+2} a_k^{2n+1} \operatorname{ctg}^k(\pi\omega) \right|.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{F}\left(\omega+k\right)\right|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{Q(n,n)}{2^{n^2+n+1}}\left(\frac{1}{\pi i\left(\omega+k\right)}\right)^{n+1}\left(1-e^{-2\pi i(\omega+k)}\right)\prod_{t=1}^{n}\left(1-e^{-2^t\pi i(\omega+k)}\right)\right|^2=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}}\left|\left(\frac{1}{\pi\left(\omega+k\right)}\right)^{2n+2}\left(1-e^{-2\pi i(\omega+k)}\right)^2\prod_{t=1}^{n}\left(1-e^{-2^t\pi i(\omega+k)}\right)^2\right|.$$

Учитывая $1-e^{-2^t\pi i(\omega+k)}=1-e^{-2^t\pi i\omega}$ при $k\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{N}$, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{F}\left(\omega+k\right)\right|^2=\frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}}\left|\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2\prod_{t=1}^{n}\left(1-e^{-2^t\pi i\omega}\right)^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{\pi\left(\omega+k\right)}\right)^{2n+2}\right|.$$

В свою очередь,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{x+\pi k}\right)^{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)!}\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\mathrm{ctg}\,(x).$$

Учитывая (9), получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{F}\left|(\omega+k)\right|^2=\frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\left|\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2\prod_{t=1}^{n}\left(1-e^{-2^t\pi i\omega}\right)^2\sum_{k=0}^{2n+2}a_k^{2n+1}\mathrm{ctg}^{\,k}(\pi\omega)\right|.$$

□

Определим функцию $\varphi_n(x)=C_nF_{n,n}=C_nF$, где $C_n=\dfrac{2^{\frac{n^2+n}{2}}}{Q(n,n)}$. Очевидно, $\varphi_n(x)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению и, значит, функция φ_n порождает КМА $(V_m)_{m\in Z}$.

Из лемм 3 и 6 следует, что

$$\hat{\varphi}_n(\omega)=\frac{1}{2^{\frac{n^2+n+2}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{n+1}\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right),$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}_n\left(\omega+k\right)\right|^2=\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\left|\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2\sum_{t=0}^{2n+2}a_t^{2n+1}\mathrm{ctg}^{\,t}(\pi\omega)\right|.$$

Теорема 4 (теорема о порядке аппроксимации)**.** *Семейство операторов β_m, $m\in\mathbb{Z}$, построенных по функции $\varphi_n(x)$, доставляет аппроксимацию порядка* 1.

Доказательство. Воспользуемся леммой 6. Во-первых, скобочное произведение $[\hat{\varphi}_n,\hat{\varphi}_n]$ существенно ограничено. Во-вторых,

$$\left|[\hat{\varphi}_n,\hat{\varphi}_n]-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=\left|\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\left|\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2\sum_{t=0}^{2n+2}a_t^{2n+1}\mathrm{ctg}^{\,t}(\pi\omega)\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left|\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{2n+2}\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2\right|\right|.$$

Так как

$$1-e^{-2^n\pi i\omega}=\left((1-e^{-2\pi i\omega})\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)\right),$$

получим

$$\left|[\hat{\varphi}_n,\hat{\varphi}_n]-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left|(1-e^{-2\pi i\omega})^2\prod_{k=1}^{n}(1-e^{-2\pi i\omega})^2\prod_{t=1}^{k}\left(1+e^{-2^t\pi i\omega}\right)^2\right|\times$$

$$\times\left|\frac{1}{(2n+1)!}\left|\sum_{t=0}^{2n+2}a_t^{2n+1}\operatorname{ctg}^t(\pi\omega)\right|-\left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right|=$$

$$=\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\left(\frac{1-e^{-2\pi i\omega}}{\sin(\pi\omega)}\right)^{2n+2}\cdot\left|\prod_{t=1}^{n-1}\left(1+e^{-2^t\pi i\omega}\right)^2\right|\times$$

$$\times\left|\frac{1}{(2n+1)!}\left|\sum_{t=0}^{2n+2}a_t^{2n+1}\cos^t(\pi\omega)\sin^{2n+2-t}(\pi\omega)\right|-\left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right|=$$

$$=A(\omega)\cdot\left|\frac{1}{(2n+1)!}\left|\sum_{t=0}^{2n+2}a_t^{2n+1}\cos^t(\pi\omega)\sin^{2n+2-t}(\pi\omega)\right|-\left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant A(\omega)\cdot\left|\left|\sum_{t=0}^{2n}a_t^{2n+1}\cos^t(\pi\omega)\sin^{2n-t}(\pi\omega)\frac{1}{(2n+1)!}\sin^2(\pi\omega)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{t=2n+1}^{2n+2}a_t^{2n+1}\cos^t(\pi\omega)\sin^{2n+2-t}(\pi\omega)\right|-\left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right|.$$

Воспользовавшись условиями (12) и (13), получим

$$\left|[\hat{\varphi}_n,\hat{\varphi}_n]-|\hat{\varphi}_n|^2\right|\leqslant A(\omega)\times$$

$$\times\left|\left|\sin^2(\pi\omega)\frac{\sum\limits_{t=0}^{2n}a_t^{2n+1}\cos^t(\pi\omega)\sin^{2n-t}(\pi\omega)}{(2n+1)!}\right|+\left|\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!}\cdot\cos^{2n+2}(\pi\omega)\right|-\left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right|=$$

$$=A(\omega)\cdot\left|B_n(\omega)\cdot\left|\sin^2(\pi\omega)\right|+\left|\cos^{2n+2}(\pi\omega)\right|-\left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right|.$$

Воспользуемся соотношениями

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

Тогда

$$\sin x=\frac{e^{ix}(1-e^{-2ix})}{2i},\quad e^{ix}(1-e^{-2ix})=2i\sin x,\quad 1-e^{-2ix}=2i\sin xe^{-ix},$$
$$1-e^{-ix}=2i\sin\frac{x}{2}\cdot e^{\frac{-ix}{2}}. \tag{14}$$

Аналогично доказывается

$$1+e^{-ix}=2\cos\frac{x}{2}\cdot e^{\frac{-ix}{2}}. \tag{15}$$

Следовательно,

$$0 < A(\omega) = \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \left| \frac{1 - e^{-2\pi i\omega}}{\sin(\pi\omega)} \right|^{2n+2} \left| \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{2(n-k)} \right| =$$

$$= \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \left| \frac{2\sin(\pi\omega)}{\sin(\pi\omega)} \right|^{2n+2} \left| \prod_{k=1}^{n-1} \left(2\cos\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)^{2(n-k)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot 2^{2n+2} \left| \prod_{k=1}^{n-1} (2 \cdot 1)^{2(n-k)} \right| = \frac{2^{2n+2+(n-1)n}}{2^{n^2+n+2}} = 1.$$

С другой стороны,

$$B_n(\omega) = \left| \frac{\sum\limits_{t=0}^{2n} a_t^{2n+1} \cos^t(\pi\omega)\sin^{2n-t}(\pi\omega)}{(2n+1)!} \right| \leqslant \left| \frac{\sum\limits_{t=0}^{2n} a_t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|.$$

Применяя (10), получим

$$B_n(\omega) \leqslant \frac{\sum\limits_{t=0}^{2n} \left|(t-1)a_{t-1}^{2n}\right| + \left|(t+1)a_{t+1}^{2n}\right|}{(2n+1)!} \leqslant \frac{\sum\limits_{t=0}^{2n+1} 2t\,|a_t^{2n}|}{(2n+1)!} \leqslant \frac{2\,(2n+1)\sum\limits_{t=0}^{2n+1} |a_t^{2n}|}{(2n+1)!} \leqslant 2^{(2n+1)}.$$

Таким образом,

$$\left(\left|\sin^2(\pi\omega)\right| \cdot B(\omega)\right) \leqslant C\omega^2.$$

Наконец,

$$\left| \left|\cos^{2n+2}(\pi\omega)\right| - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2} \right| = \left| \cos^{2n+2}(\pi\omega) - 1 + 1 - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2} \right| =$$

$$= \left| \left(\cos^{2n+2}(\pi\omega)\right) - \left(\cos^2(\pi\omega) + \sin^2(\pi\omega)\right)^n + 1 - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \cos^{2n+2}(\pi\omega) - \cos^n(\pi\omega) - \sin^2(\pi\omega) \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k \cos^{2(n-k)}(\pi\omega)\sin^{2k-2}(\pi\omega) \right) \right| +$$

$$+ \left| 1 - \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k+1}}{\pi\omega} \right|^{2n+2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| -\cos^n(\pi\omega)\cdot\sin^2(\pi\omega) - \sin^2(\pi\omega) \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k \cos^{2(n-k)}(\pi\omega)\sin^{2k-2}(\pi\omega) \right) \right| +$$

$$+ \left| 1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k} \right)^{2n+2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sin^2(\pi\omega) \left| \cos^n(\pi\omega) + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k \cos^{2(n-k)}(\pi\omega)\sin^{2k-2}(\pi\omega) \right) \right| +$$

$$+\left(1-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k}\right)\right)\sum_{t=0}^{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k}\right)^{t}\leqslant C\omega^2.$$

Таким образом, $[\hat{\varphi}_n,\hat{\varphi}_n]-|\hat{\varphi}_n|^2=O(\omega^2)$.

Наконец,

$$\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=\left|1-\left|\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{2n+2}\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2\right|\right|=$$

$$=\left|1-\left|\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left(\frac{1-e^{-2\pi i\omega}}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{2(n-k)}\right|\right|.$$

Используя (14) и (15), окончательно получим

$$\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=\left|1-\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n^2+n+2}}\left(\frac{2\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}e^{-(2n+2)\pi i\omega}\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\cos\left(2^{k-1}\pi\omega\right)e^{-2^{k-1}\pi i\omega}\right)^{2(n-k)}\right|\right|.$$

Так как $|e^{ix}|=1$, то

$$\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=\left|1-\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left|\left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}2^{2n+2}\cdot 2^{n(n-1)}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos^{(n-k)}\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)\right|\right|=$$

$$=1-\left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos^{(n-k)}\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)^2.$$

Так как $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(\cos^{(n-k)}\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)^2\to 1$ при $\omega\to 0$, то $\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=O(\omega^2)$. Следовательно, β_m доставляет аппроксимацию порядка $\min(1,2)=1$. □

Список литературы

1. *Schoenberg I. J.* On spline functions (with a supplement by T. N. E. Greville) // Inequalities I / ed. O. Shisha. New York : Academic Press, 1967. P. 255–291.
2. *де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. Москва : Радио и связь, 1985. 304 с.
3. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. Москва : Мир, 1972. 320 с.
4. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. Москва : АФЦ, 1999. 550 с.
5. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. Москва : Физматлит, 2006. 616 с.
6. *Battle G.* A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarié functions // Communications in Mathematical Physics. 1987. Vol. 110, iss. 4. P. 601–615. https://doi.org/10.1007/BF01205550
7. *Lemarie P.-G., Meyer Y.* Ondelettes et bases Hilbertiennes // Revista Matemática Iberoamericana. 1986. Vol. 2, iss. 1–2. P. 1–18.
8. *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 53. Казань : Изд-во Казанского математического общества ; Изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 163–164.
9. *Чумаченко С. А.* Двоичные масштабирующие сплайн функции // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 54. Казань : Изд-во Казанского математического общества ; Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 403.

10. *Лукомский С. Ф., Мушко М. Д.* О двоичных базисных сплайнах 2-й степени // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 172–182. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182
11. *Лукомский С. Ф., Терехин П. А., Чумаченко С. А.* Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем // Математические заметки. 2018. Т. 103, № 6. С. 863–874. https://doi.org/10.4213/mzm11654
12. *Чумаченко С. А.* Гладкие аппроксимации в $C[0,1]$ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 326–342. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342
13. *Zhao H.* Mathematics in Image Processing. IAS/Park City Mathematics Series, 2013. Vol. 19. 245 p. https://doi.org/10.1090/pcms/019

References

1. Schoenberg I. J. On spline functions (with a supplement by T. N. E. Greville). In: O. Shisha, ed. *Inequalities I*. New York, Academic Press, 1967, pp. 255–291.
2. de Boor C. *A Practical Guide to Spline*. (American Mathematical Society, vol. 27). New York, Springer-Verlag, 1978. 348 p. (Russ. ed.: Moscow, Radio i svyaz', 1985. 304 p.).
3. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The Theory of Splines and Their Applications*. (Mathematics in Science and Engineering: A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 38). Academic Press, 1967. 296 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1972. 320 p.).
4. Kashin B. S., Saakian A. A. *Ortogonal'nye riady* [Ortogonal Series]. Moscow, AFC, 1999. 550 p. (in Russian).
5. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet Theory*. (Translations of Mathematical Monographs, vol. 239). Providence, American Mathematical Society, 2011. 506 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2006. 616 p.).
6. Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarié functions. *Communications in Mathematical Physics*, 1987, vol. 110, iss. 4, pp. 601–615. https://doi.org/10.1007/BF01205550
7. Lemarie P.-G., Meyer Y. Ondelettes et bases Hilbertiennes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 1986, vol. 2, iss. 1–2, pp. 1–18.
8. Chumachenko S. A. One analogue of Faber – Schauder system. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*. Vol. 53. Kazan, 2016, pp. 163–164 (in Russian).
9. Chumachenko S. A. Binary-scaling spline functions. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*. Vol. 54. Kazan, 2017, pp. 403 (in Russian).
10. Lukomskii S. F., Mushko M. D. On binary B-splines of second order. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 172–182 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182
11. Lukomskii S. F., Terekhin P. A., Chumachenko S. A. Rademacher chaoses in problems of constructing spline affine systems. *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, iss. 6, pp. 863–874. https://doi.org/10.4213/mzm11654
12. Chumachenko S. A. Smooth approximation in $C[0,1]$. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 326–342 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342
13. Zhao H. Mathematics in Image Processing. IAS/Park City Mathematics Series, 2013, vol. 19. 245 p. https://doi.org/10.1090/pcms/019

Поступила в редакцию / Received 13.06.2021
Принята к публикации / Accepted 24.07.2021
Опубликована / Published 30.11.2021