

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 520–531

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 520–531

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-520-531>

Научная статья

УДК 519.688

Вейвлетные p -аналоги дискретного преобразования Хаара

М. С. Беспалов

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87

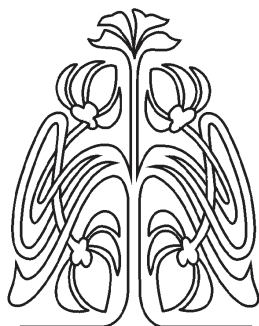
Беспалов Михаил Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, bespalov@vlsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0661-337X>

Аннотация. Предложены два p -аналога (для $p > 2$) дискретного варианта системы Хаара в векторной символике и построены быстрые алгоритмы на их основе. Для этих хаароподобных систем отмечены основные вейвлетные принципы построения: несколько материнских функций, p -ичные сжатия и последовательные сдвиги. У одной из систем сохранено свойство ортогональности векторов. Для другой системы, за счет небольшого отступления от требования ортогональности, добились упрощения процедуры вычисления. Для этих алгоритмов, представленных в виде алгоритмов с прореживанием по времени, указаны способы преобразования их в алгоритмы с прореживанием по частоте.

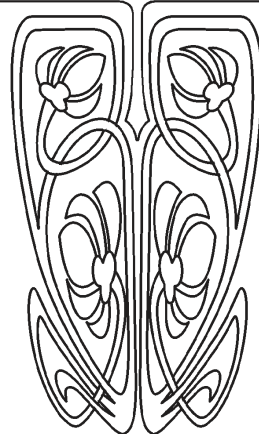
Ключевые слова: дискретный гармонический анализ, дискретное преобразование Хаара, вейвлет, сжатия и сдвиги, быстрый алгоритм

Для цитирования: Беспалов М. С. Вейвлетные p -аналоги дискретного преобразования Хаара // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 520–531. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-520-531>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





Article

Wavelet p -analogs of the discrete Haar transform

M. S. Bespalov

Vladimir State University, 87 Gorky St., Vladimir 600000, Russia

Mikhail S. Bespalov, bespalov@vlsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0661-337X>

Abstract. Two p -analogs (for $p > 2$) of the discrete version of the Haar system in vector symbolism are proposed and fast algorithms are constructed based on them. The main wavelet principles for constructing these Haar-like systems are proposed, such as the presence of several parent functions, p -ary dilations and shifts. One of the systems retains an orthogonality property. The calculation procedure has been simplified for another almost orthogonal system. The developed algorithms are presented with decimation in time, methods of their representation with decimation in frequency are indicated.

Keywords: discrete harmonic analysis, discrete Haar transform, wavelet, shifts and dilations, fast algorithm

For citation: Bespalov M. S. Wavelet p -analogs of the discrete Haar transform. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 520–531 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-520-531>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

При цифровой обработке сигналов (ЦОС) широко используется [1] алгоритм быстрого преобразования Хаара (БПХ). Система Хаара в теории всплесков служит модельным примером, на котором демонстрируется [2, 3] вейвлетный принцип построения базиса как системы двоичных сжатий и сдвигов одной функции. Система Хаара также выделяется как ступенчатый базис для пространства непрерывных функций, что можно доказать через ее свойство быть системой последовательной прорисовки деталей: на этапе вычисления частных сумм очередное среднее значение исходного сигнала на интервале заменяется на пару средних значений на интервалах в два раза меньшей длины.

При ЦОС процедуру вычисления коэффициентов Фурье по выбранной системе называют процедурой анализа, а восстановление исходного сигнала (вычисление частных сумм) — процедурой синтеза. В дискретном случае обе процедуры анализа и синтеза схожи и на практике реализуются в виде быстрых алгоритмов. Отмечается связь [4, с. 25] систем Хаара и Уолша: частные суммы с номерами 2^n по этим системам совпадают. Примечательно, что блок-схема алгоритма прямого БПХ (процедура анализа) из блок-схемы быстрого дискретного преобразования Уолша (ДПУ), приведенной в [5, рис. 2.3-4], получается удалением всех шагов алгоритма, примененным к разностям. Поэтому число операций, равное $N \log N$ для ДПУ, сокращается до $2N - 2$ для БПХ.

Так как даже в обзоре [6] по этой тематике сам алгоритм БПХ не приводится, то приведем его простой вариант.

Алгоритм БПХ для исходного массива $x \in \mathbb{R}^N$, где $N = 2^n$ и нумерация элементов с нуля.



Для k от 0 до $n - 1$ выполняем

для j от 0 до $2^{n-k-1} - 1$ выполняем $a_{2^{n-k-1}+j} := x_{2j} - x_{2j+1}$, $x_j := x_{2j} + x_{2j+1}$.
 $a_0 := x_0$.

В [3, с. 40] указали, что неакцентирование Хааром своей системы как системы сжатий и сдвигов на столетие задержало развитие теории всплесков. Аналогично, полагаю, что стиль изложения БПХ в таких книгах, как [7], через факторизацию матриц (необходимую в случае ДПУ и неуместную в случае БПХ) не подходит при педагогической работе и тормозит развитие теории быстрых алгоритмов. Поэтому в данной статье предлагается вывод популярного БПХ в терминах дискретных вейвлетных базисов, что позволяет получить основной результат статьи — различные p -ичные обобщения дискретной системы Хаара и новые вейвлетные быстрые алгоритмы на их основе. При этом терминологию дискретных функций [1, 8] заменяем на матричные и векторные обозначения [5]. Основной операцией, применяемой при векторной форме записи, служит кронекерово произведение \otimes матриц (и сигналов, в частности), о котором см. в [9].

1. Дискретный вейвлетный базис Хаара

1.1. Ортогональная система $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$ элементов N -мерного евклидова пространства X составляет базис X , разложение по которому

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{\|f_k\|^2} f_k = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle x, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k = \sum_{k=0}^{N-1} c_k f_k, \quad (1)$$

где $\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(k)$ — скалярное произведение.

Применим обозначения: дельта-сигнала $\delta = (1 \ 0)$ и его кругового сдвига $\delta^{\rightarrow} = (0 \ 1)$ для стандартного базиса; $S = (1 \ 1)$ и $A = (1 \ -1)$ для хааровского базиса в \mathbb{R}^2 . Для дельта-сигнала и его сдвигов из \mathbb{R}^N при $N > 2$ нижним индексом укажем его размерность $\delta_N = (1 \ 0 \ 0 \dots 0)$, $\delta_N^{\rightarrow} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots 0)$, $\delta_N^{2\rightarrow} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$, ... При $N = 2^m$ любой сдвиг дельта-сигнала $\delta_N^{j\rightarrow}$ есть кронекерово произведение m экземпляров стандартного базиса в \mathbb{R}^2 .

Для $x \in \mathbb{R}^2$ при $f_0 = S$, $f_1 = A$ расчет коэффициентов $a_0 = x_0 + x_1$, $a_1 = x_0 - x_1$ есть прямое простейшее БПХ, а восстановление сигнала по формуле (1) есть обратное БПХ $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$, $x_1 = \frac{1}{2}(a_0 - a_1)$.

В следующем пункте распространим этот алгоритм по вейвлетному принципу на пространство \mathbb{R}^N , где $N = 2^n$.

При выводе алгоритма используем следующие леммы, которые легко доказываются по правилам операций с блочными матрицами.

Лемма 1. Если $a, b \in \mathbb{R}^k$, $c, d \in \mathbb{R}^m$, то скалярное произведение составных сигналов $a \otimes c$ и $b \otimes d$ равно произведению скалярных произведений отдельных сомножителей $\langle a \otimes c, b \otimes d \rangle = \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle$.

Лемма 2. Пусть $y \in \mathbb{R}^k$, $x \in \mathbb{R}^{2k}$, а сигналы $p, m \in \mathbb{R}^k$ получены из x по формулам одного шага дискретного преобразования Хаара (ДПХ): $p_j = x_{2j} + x_{2j+1}$, $m_j = x_{2j} - x_{2j+1}$ при j от 0 до $k - 1$, то $\langle x, y \otimes S \rangle = \langle p, y \rangle$, $\langle x, y \otimes A \rangle = \langle m, y \rangle$.

1.2. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ введем вейвлетный базис $\{\varphi_k\}$ в \mathbb{R}^N , где $N = 2^n$, служащий дискретным базисом Хаара.



Масштабирующий элемент (тождественную единицу) определим в виде кронекеровой степени сигнала S –

$$\varphi_0 = S^{m \otimes} = (1 \ 1 \dots 1).$$

Материнский вейвлет (в сквозной и двойной нумерации) аналогично

$$\varphi_1 = \varphi_{0,0} = A \otimes S^{n-1 \otimes}.$$

Тогда произвольный элемент при $0 \leq j < 2^m$

$$\varphi_{2^m+j} = \varphi_{m,j} = \delta_{2^m}^{j \rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-m-1 \otimes}. \quad (2)$$

Введем вспомогательный набор сжатий и сдвигов масштабирующего элемента $\{\psi_{2^m+j} = \psi_{m,j} = \delta_{2^m}^{j \rightarrow} \otimes S^{n-m \otimes}\}$, каждый элемент которого получен из элемента (2) заменой $A = (1 \ -1)$ на $S = (1 \ 1)$.

Утверждение 1. Набор $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2^m-1}$ ортогонален.

Доказательство следует из леммы 1 с учетом ортогональности исходных базисов: $\langle \delta_k^{j \rightarrow}, \delta_k^{s \rightarrow} \rangle = 0$ при $j \neq s$, $\langle A, S \rangle = 0$. \square

По той же лемме 1 вычисляются нормы элементов

$$\|\varphi_0\|^2 = \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = N, \quad \|\varphi_{m,j}\|^2 = 2^{n-m}.$$

1.3. Шаг алгоритма быстрого преобразования Хаара (БПХ) построим по лемме 2. Для исходного массива $x^0 = (x_0 \ x_1 \dots x_{N-1})$ (где верхний индекс означает номер шага или массива) вычисляем два массива x^1 и m^1 в два раза меньшей длины с элементами

$$\begin{aligned} x^1(j) &:= \langle x^0, \psi_{n-1,j} \rangle = \langle x^0, \delta_{2^{n-1}}^{j \rightarrow} \otimes S \rangle = x_{2j} + x_{2j+1}, \\ m^1(j) &= b_{2^{n-1}+j} := \langle x^0, \varphi_{n-1,j} \rangle = \langle x^0, \delta_{2^{n-1}}^{j \rightarrow} \otimes A \rangle = x_{2j} - x_{2j+1}. \end{aligned}$$

Массив x^1 становится массивом исходных данных для следующего шага, поэтому его отсчеты $x^1(j)$ на следующем шаге переобозначим прежними символами x_j (опуская номер массива, как это сделано в алгоритме, приведенном во введении).

Массив m^1 запоминаем, т. е. размещаем в формируемом выходном массиве $B = (b_0 \ b_1 \ b_2 \dots b_{N-1})$. Выходной массив B заполняем подмассивами m^1, m^2, \dots, m^n в следующем порядке $B = (x^n \ m^n \ m^{n-1} \dots m^2 \ m^1)$, поэтому в формуле выше есть указание на расположение их элементов $m^{k+1}(j)$ в массиве B . Вывод произвольного шага алгоритма БПХ итерацией леммы 2

$$\begin{aligned} x^{k+1}(j) &:= \langle x_0, \psi_{n-k-1,j} \rangle = \langle x^0, \delta_{2^{n-k-1}}^{j \rightarrow} \otimes S \otimes S^{k \otimes} \rangle = \langle x^k, \delta_{2^{n-k-1}}^{j \rightarrow} \otimes S \rangle = x_{2j} + x_{2j+1}, \\ m^{k+1}(j) &= b_{2^{n-k-1}+j} := \langle x_0, \varphi_{n-k-1,j} \rangle = \langle x^0, \delta_{2^{n-k-1}}^{j \rightarrow} \otimes A \otimes S^{k \otimes} \rangle = \\ &= \langle x^k, \delta_{2^{n-k-1}}^{j \rightarrow} \otimes A \rangle = x^k(2j) - x^k(2j+1) = x_{2j} - x_{2j+1}. \end{aligned}$$

Обратный алгоритм БПХ. Массив B на выходе предыдущего алгоритма вновь разобьем на тот же последовательный набор подмассивов $B = (x^n \ m^n \ m^{n-1} \dots m^1)$, где массивы x^n и m^n – из одного элемента, m^{n-1} – из двух, m^{n-2} – из четырех и т. д.

Для k от 0 до $n-1$ вычисляем элементы нового массива x^{n-k-1} :
для j от 0 до 2^k-1 выполняем

$$x^{n-k-1}(2j) = \frac{x^{n-k}(j) + m^{n-k}(j)}{2}, \quad x^{n-k-1}(2j+1) = \frac{x^{n-k}(j) - m^{n-k}(j)}{2}. \quad (3)$$



Замечание 1. Деление пополам из формул (3) можно перенести в прямой алгоритм БПХ. Приведенный вариант предпочтительней, так как в случае целочисленного исходного массива он позволяет все вычисления прямого и обратного БПХ производить в целых числах.

1.4. Вариант алгоритма БПХ, приведенный во введении, в статье [8] назван алгоритмом БПХ с прореживанием по времени. Мы назовем его алгоритмом типа $\delta-A-S$, так как в терминах векторов двух базисов \mathbb{R}^2 в формуле (2) все кронекеровы множители вида δ расположены слева от A , а вида S — справа от A .

В [8] предложен также вывод алгоритма БПХ с прореживанием по частоте. В наших терминах это алгоритм типа $S-A-\delta$ с теми же кронекеровыми множителями:

$$\varphi_{m,j} = S^{n-m-1\otimes} \otimes A \otimes \delta_{2^m}^{j\rightarrow}.$$

2. Дискретные p -аналоги системы Хаара

2.1. При построении системы Хаара используют двойную нумерацию индексов m, j и указывают ее связь $n = 2^m + j$ со сквозной нумерацией. При построении p -ичного обобщения прибегают к тройной нумерации m, j, k , из которой в случае системы Крестенсона получают [4, 10] сквозную нумерацию по подпачкам $n = kp^m + j$. Отличительной чертой системы Хаара, привлекательной для прикладников, служит реализация процедуры синтеза на ее основе в виде последовательной прорисовки деталей. Стремление сохранить эту особенность для обобщений определяет вид новой сквозной нумерации.

Как и ранее, введем два базиса в пространстве \mathbb{R}^p : стандартный базис из дельта-сигнала и его сдвигов $\delta = (1\ 0\ 0\ \dots\ 0)$, $\delta^{\rightarrow} = (0\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0)$, $\delta^{2\rightarrow} = (0\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0)$, \dots , $\delta^{(p-1)\rightarrow} = (0\ \dots\ 0\ 1)$; произвольный базис $\{A_s\}_{s=0}^{p-1}$ с условием на начальный элемент $A_0 = (1\ 1\ \dots\ 1)$ в виде постоянного сигнала, который по аналогии с двоичным случаем также обозначим S .

По базису $\{A_s\}_{s=0}^{p-1}$ вейвлетный базис в пространстве \mathbb{R}^N , где $N = p^n$, строится по правилам из теории всплесков.

Масштабирующий элемент, как и ранее, определим в виде кронекеровой степени выделенного сигнала $S = (1\ 1\ \dots\ 1) \in \mathbb{R}^p$:

$$\varphi_0 = S^{n\otimes} = (1\ 1\ \dots\ 1) \in \mathbb{R}^N.$$

Материнские элементы определим через остальные элементы базиса при $s = \overline{1, p-1}$

$$\varphi_s = \varphi_{0,0,s} = A_s \otimes S^{n-1\otimes}. \tag{4}$$

Элементы p -ичного вейвлетного базиса в \mathbb{R}^N зададим с тройной и сквозной нумерацией при $m = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, p^m-1}$, $s = \overline{1, p-1}$ следующей формулой:

$$\varphi_{p^m+j(p-1)+s-1} = \varphi_{m,j,s} = \delta_{p^m}^{j\rightarrow} \otimes A_s \otimes S^{n-m-1\otimes}. \tag{5}$$

При увеличении на 1 одного из трех параметров m, j, s формулы (5) осуществляются следующие процедуры: увеличение m соответствует сжатию в p раз по временной оси, увеличение j соответствует процедуре глобального сдвига, а увеличение s соответствует процедуре перехода к следующей базисной функции (4). Первые две процедуры относятся к типичным всплесковым. Следовательно, базис $\{A_k\}$ в \mathbb{R}^p



надо выбрать так, чтобы при его переборе сохранялась какая-либо вейвлетная характеристика. В качестве таковой обозначим принцип последовательной прорисовки деталей не только для пачек (глобальный сдвиг), но и для подпачек. В этом случае увеличение s на единицу можно назвать всплесковой процедурой локального сдвига, который должен непосредственно предшествовать глобальному сдвигу, что и определяет выбор нумерации.

2.2. Конкретизируем общий вид системы, предложив следующий ортогональный базис в \mathbb{R}^p , дополняющий единицу $S = A_0$ дискретными периодическими функциями Бернулли [1] нулевого порядка по сжимающейся сетке (где опустили нормировку и отсчеты отделили запятыми)

$$A_1 = (p-1, -1, \dots, -1), A_2 = (0, p-2, -1, \dots, -1), \dots, A_{p-1} = (0, \dots, 0, 1, -1). \quad (6)$$

Утверждение 2. Набор $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2^m-1}$ дискретных функций (5) с материнскими вейвлетами (6) ортогонален в \mathbb{R}^N .

Доказательство. Из ортогональности $\langle \delta^{j \rightarrow}, \delta^{k \rightarrow} \rangle = 0$, $\langle A_j, A_k \rangle = 0$ при $j \neq k$ двух исходных базисов по лемме 1 вытекает ортогональность предложенной системы. \square

Вычислим нормы элементов исходного базиса $\|S\|^2 = \langle S, S \rangle = p$, $\|A_k\|^2 = (p-k)^2 + p-k = (p-k)(p-k+1)$ при $k > 0$.

Явный вид элемента (5)

$$\varphi_{m,j,s} = \left(\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{(jp+s-1)p^{n-m-1}} \ \underbrace{(p-s) \ \dots \ (p-s)}_{p^{n-m-1}} \ \underbrace{-1 \ -1 \ \dots \ -1}_{(p-s)p^{n-m-1}} \ \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{p^{n-(j+1)p^{n-m}}} \right),$$

откуда $\|\varphi_{m,j,p-k}\|^2 = (k^2 + k)p^{n-m-1}$.

Формула синтеза (1) с $a_k = \langle x, \varphi_k \rangle$ превратится в формулу

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k = \frac{a_0}{N} \varphi_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{p^{n-m-1}} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{a_{k(m,j,s)} \varphi_{k(m,j,s)}}{(p-s)^2 + p-s}, \quad (7)$$

где $k(m, j, s) = p^m + j(p-1) + s - 1$. Эта формула упрощается до формулы $x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \varphi_k$, если ввести обозначение $c_k = \frac{a_k}{\|\varphi_k\|^2}$. В частности, при $\varphi_k = A_k$ имеем $c_k = \frac{a_k}{(p-k+1)(p-k)}$ для $1 \leq k \leq p-1$.

Процедура анализа сигнала $x \in \mathbb{R}^N$ состоит в получении выходного массива $A = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N-1})$ или вида $C = (c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{N-1})$. Процедура синтеза заключается в восстановлении исходного x по формуле (7) или $x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \varphi_k$.

Например, для $p = 5$, $n = 1$ и сигнала $x = (1 \ 3 \ 7 \ 0 \ 2)$ по формулам $a_0 = \sum_{s=0}^4 x_s$, $a_1 = 5x_0 - a_0$, $a_2 = 4(x_1 - x_0) + a_1$, $a_3 = 3(x_2 - x_1) + a_2$, $a_4 = 2(x_3 - x_2) + a_3$ получаем выходной массив $A = (13 \ -8 \ 0 \ 12 \ -2)$ или $C = (2.6 \ -0.4 \ 0 \ 2 \ -1)$.

Последовательно вычисляя частные суммы, восстанавливаем x :

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbf{2.6} & \mathbf{2.6} & \mathbf{2.6} & \mathbf{2.6} & \mathbf{2.6} & = & \mathbf{2.6} \ \mathbf{S} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & = & \dots - 0.4A_1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & = & \dots + 0A_2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & = & \dots + 2A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & = & \dots - A_4 \end{array}$$



Этот пример наглядно демонстрирует принцип последовательной прорисовки деталей — на каждом шаге уточняем только два (выделенных жирным шрифтом) числа: очередное значение и среднее арифметическое чисел на уменьшенном интервале. Слева от выделенных чисел значения далее не меняются, а справа от них повторяются, что позволяет сократить число операций за счет исключения дублирования. Это наблюдение приобретает особую значимость при больших n .

2.3. Приведем базовые алгоритмы анализа и синтеза для входного массива $x \in \mathbb{R}^p$ ортогонального варианта базиса, где также уменьшили число операций за счет вычислений каждого отсчета через предыдущий отсчет, а не по общей формуле.

Алгоритм анализа для ортогонального базиса.

1. $a_0 = \sum_{j=0}^{p-1} x_j$, $c_0 = \frac{a_0}{p}$.
2. $a_1 = px_0 - a_0$, $c_1 = \frac{a_1}{p(p-1)}$.
3. Для k от 2 до $p-1$ выполняем

$$a_k = (p - k + 1)(x_{k-1} - x_{k-2}) + a_{k-1}, \quad c_k = \frac{a_k}{(p - k + 1)(p - k)}.$$

Вывод алгоритма анализа.

1. Очевидно, что $a_0 = \langle x, S \rangle = \sum_{j=0}^{p-1} x_j$, $c_0 = \frac{a_0}{\|S\|^2} = \frac{a_0}{p}$.
2. Выразим вектор $A_1 = (p-1, -1, \dots, -1)$ из (6) через базовые векторы $A_1 = p\delta - S$. Тогда $a_1 = \langle x, A_1 \rangle = p\langle x, \delta \rangle - \langle x, S \rangle = px_0 - a_0$. Отсюда $c_1 = \frac{a_1}{\|A_1\|^2} = \frac{a_1}{p(p-1)}$.
3. Выразим вектор $A_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, p-k, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{p-k})$ из (6) через предыдущий

$$A_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-2}, p-k+1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{p-k+1}) - (p-k+1)(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-2}, 1, \underbrace{-1, 0, 0, \dots, 0}_{p-k}).$$

Получили $A_k = A_{k-1} - (p - k + 1)(\delta^{(k-2)\rightarrow} - \delta^{(k-1)\rightarrow})$.

Тогда

$$a_k = \langle x, A_k \rangle = \langle x, A_{k-1} \rangle + (p - k + 1)(\langle x, \delta^{(k-1)\rightarrow} \rangle - \langle x, \delta^{(k-2)\rightarrow} \rangle),$$

$$a_k = a_{k-1} + (p - k + 1)(x_{k-1} - x_{k-2}).$$

Аналогично $c_k = \frac{a_k}{\|A_k\|^2} = \frac{a_k}{(p-k+1)(p-k)}$.

Алгоритм синтеза для ортогонального базиса.

1. $y_0 = c_0$.
2. Для k от 0 до $p-2$ выполняем $x_k = y_k + (p - k - 1)c_{k+1}$, $y_{k+1} = y_k - c_{k+1}$.
3. $x_{p-1} = y_{p-1}$.

Вывод алгоритма синтеза получается из разложения $x = \sum_{j=0}^{p-1} c_j A_j$.

Подставляем из (6) выражения для базовых векторов A_k и вычисляем по очереди все координаты:

$$x_0 = c_0 + (p - 1)c_1 = y_0 + (p - 1)c_1, \text{ где } y_0 := c_0,$$

$$x_1 = c_0 - c_1 + (p - 2)c_2 = y_1 + (p - 2)c_2, \text{ где } y_1 := y_0 - c_1,$$

$$x_2 = c_0 - c_1 - c_2 + (p - 3)c_3 = y_2 + (p - 3)c_3, \text{ где } y_2 := y_1 - c_2, \dots,$$

$$x_{p-2} = c_0 - c_1 - \dots - c_{p-2} + c_{p-1} = y_{p-2} + 1 \cdot c_{p-1}, \text{ где } y_{p-2} := y_{p-3} - c_{p-2},$$

$$x_{p-1} = c_0 - c_1 - \dots - c_{p-2} - c_{p-1} = y_{p-1}, \text{ где } y_{p-1} := y_{p-2} - c_{p-1}.$$



Замечание 2. Процедуру вычисления массива C можно перенести из алгоритма анализа в алгоритм синтеза.

Обозначим $AN(x)$ данный алгоритм анализа, аргументом которого служит входной массив $x \in \mathbb{R}^p$. При построении на основе этого алгоритма быстрого алгоритма хааровского типа на выходе этого алгоритма отделим начальную координату c_0 и оставшийся массив $C \in \mathbb{R}^{p-1}$: $AN(x) \Rightarrow (c_0; C)$. Тогда алгоритм синтеза $AN^{-1}(c_0; C) \Rightarrow x$ служит обратным и применяется к паре массивов, один из которых из одного элемента, а другой из $(p - 1)$ -го.

2.4. Предложим другой вейвлетный p -ичный базис. Вместо ортогональности материнского базиса A_1, A_2, \dots, A_{p-1} , в пространстве $\mathbb{R}_0^p = S^\perp$ выберем вариант их циклического построения из одного материнского элемента. При этом формулы для алгоритмов окажутся даже проще.

В качестве исходного элемента возьмем сигнал $A = (-1 \ 0 \dots 0 \ 1)$, служащий сигналом Бернулли минус первого порядка [1, 11]. В качестве материнского базиса в $\mathbb{R}_0^p = S^\perp \subset \mathbb{R}^p$ возьмем все его циклические сдвиги:

$$A^{\rightarrow} = (1 \ -1 \ 0 \dots 0), \ A^{2\rightarrow} = (0 \ 1 \ -1 \ 0 \dots 0), \ \dots, \ A^{p-1\rightarrow} = (0 \dots 0 \ 1 \ -1).$$

Аналогично пункту 2.2 строится вейвлетный базис в \mathbb{R}^N , где $N = p^n$: тот же масштабирующий элемент

$$\psi_0 = S^{m\otimes} = (1 \ 1 \dots 1) \in \mathbb{R}^N$$

и аналогичный (5) вид остальных элементов (для тех же m, j, s)

$$\psi_{p^m+j(p-1)+s-1} = \psi_{m,j,s} = \delta_{p^m}^{j\rightarrow} \otimes A^{s\rightarrow} \otimes S^{n-m-1\otimes}, \quad (8)$$

явный вид которых

$$\psi_{m,j,s} = \left(\underbrace{0 \ 0 \dots 0}_{(jp+s-1)p^{n-m-1}} \ \underbrace{1 \ 1 \dots 1}_{p^{n-m-1}} \ \underbrace{-1 \ -1 \dots -1}_{p^{n-m-1}} \ \underbrace{0 \ 0 \dots 0}_{p^n-(pj+s+1)p^{n-m-1}} \right).$$

Заметим, что нарушение ортогональности носит локальный характер — каждый вектор (8) ортогонален всем элементам за исключением соседних. Проще вычисляется квадрат нормы $\|\psi_{m,j,s}\|^2 = 2p^{n-m-1}$.

2.5. Приведем базовые алгоритмы анализа и синтеза для входного массива $x \in \mathbb{R}^p$ неортогонального варианта базиса.

Алгоритм анализа для неортогонального базиса.

1. $a_0 = \sum_{j=0}^{p-1} x_j$.
2. Для k от 1 до $p - 1$ выполняем $a_k = x_{k-1} - x_k$.

Для получения обратного алгоритма найдем обратную матрицу к матрице порядка p

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix},$$



с помощью которой записывается матричная форма $a = M \cdot x$ алгоритма анализа. Вычислим обратную матрицу

$$M^{-1} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 & p-2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & -1 & p-2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -2 & \dots & 2-p & 1 \\ 1 & -1 & -2 & \dots & 2-p & 1-p \end{pmatrix},$$

реализующую формулой $x = M^{-1} \cdot a$ алгоритм синтеза.

Нулевой столбец этой матрицы, состоящий из единиц, выбивается из общего вида. В остальных столбцах выше диагонали одинаковые положительные числа, которые вычисляются по элементам первой строки (в которой числа по убыванию), а ниже диагонали (включая ее) одинаковые отрицательные числа, которые вычисляются по элементам последней строки (в которой числа по убыванию). Из сравнения строк этой матрицы с предыдущей строкой получаем следующий алгоритм.

Алгоритм синтеза для ортогонального базиса.

1. $x_0 = (a_0 + \sum_{j=1}^{p-1} (p-j)a_j)/p$.
2. Для k от 1 до $p-1$ выполняем $x_k = x_{k-1} - a_k$.

Обозначим этот алгоритм анализа $ANALYSIS(x)$, аргументом которого служит входной массив $x \in \mathbb{R}^p$. На выходе отделим начальную координату a_0 и оставшийся массив $A \in \mathbb{R}^{p-1}$: $ANALYSIS(x) \Rightarrow (a_0; A)$. Тогда алгоритм синтеза служит обратным: $ANALYSIS^{-1}(a_0; A) \Rightarrow x$.

2.6. Построим (и назовем алгоритмом полного анализа) p -аналог алгоритма БПХ для входного массива $x \in \mathbb{R}^N$ с $N = p^n$. Этот массив сначала переобозначим как x^0 — массив начального уровня. В основе алгоритма лежит процедура разбивки массива x^{k-1} на подмассивы Y^j (где $j = \overline{0, N_k - 1}$, $N_k = p^{n-k}$) по p последовательных элементов в каждом подмассиве, которую обозначим $BR(x^{k-1}) \Rightarrow (Y^0, Y^1, \dots, Y^{N_k-1})$. Алгоритмический вариант этой процедуры не приводим, так как каждый программист реализует эту простейшую процедуру по-своему.

Алгоритм полного анализа (ортогональный).

Для k от 0 до $n-1$ выполняем:

- 1) $BR(x^k) \Rightarrow (Y^0, Y^1, \dots, Y^{N_{k+1}-1})$,
- 2) для j от 0 до $N_{k+1}-1$ выполняем $AN(Y^j) \Rightarrow (x_j; \alpha^j)$.

При этом выходные данные x_j и α^j помещаем в новые массивы:

элемент x_j — в массив $x^{k+1} := (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_j \ \dots \ x_{N_{k+1}-1})$ в естественном порядке; подмассив α^j — в выходной массив

$$\alpha = \left(\underbrace{\dots}_{p^{n-k-1}} \underbrace{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^j, \dots, \alpha^{N_{k+1}-1}}_{p^{n-k-1}(p-1)}, \underbrace{\alpha_{p^{n-k}} \alpha_{p^{n-k}+1} \dots \alpha_{p^n-1}}_{p^n - p^{n-k}} \right),$$

где указано в какое место массива (начиная с конца массива) и в каком порядке помещаются блоки (разделенные запятыми), причем ранее (на предыдущих шагах) размещенные блоки здесь представлены уже как элементы массива при сквозной нумерации. Указано, по сколько разрядов (координат) занимают незаполненные разряды, вносимые блоки и ранее вычисленные координаты.



Последний блок x^n состоит из одного элемента, который в конце процедуры помещаем в массив α в виде недостающего элемента α_0 .

Если процедуру AN заменим на процедуру $ANALYSIS$, то получим алгоритм полного анализа для неортогонального варианта базиса.

Итак, массив $\alpha \in \mathbb{R}^N$ на выходе представляет набор спектральных характеристик, аналогичный массиву $C \in \mathbb{R}^p$ алгоритма анализа AN (или массиву $A \in \mathbb{R}^p$ для $ANALYSIS$ соответственно).

2.7. Построим обратный алгоритм к алгоритму предыдущего пункта. На вход этого алгоритма подается массив $\alpha \in \mathbb{R}^N$, где $N = p^n$.

Алгоритм полного синтеза (ортогональный).

1. Формируем массив $x^n = (\alpha_0)$, состоящий из одного элемента.

2. Для j от 0 до $p^k - 1$, где k от 0 до $n - 1$, выбираем очередной элемент x_j из массива x^{n-k} и $(p - 1)$ очередных элементов в виде подмассива α^j из массива α и выполняем процедуру $AN^{-1}(x_j; \alpha^j)$. Результат выполнения каждого j -го шага помещаем в новый формируемый массив $x^{n-k-1} = (x_0 \ x_1 \dots \ x_{p^{k+1}-1})$ в виде подмассива $(x_{jp} \ x_{jp+1} \dots \ x_{(j+1)p-1})$.

Аналогично, если процедуру AN^{-1} заменим на процедуру $ANALYSIS^{-1}$, то получим алгоритм полного синтеза для неортогонального базиса.

2.8. При $p = 2$ оба представленных алгоритма превращаются в БПХ.

Для случая $p = 3$ конструкция на основе данного ортогонального варианта базиса в терминах анализа Фурье на нульмерных группах встретилась в [12], а слегка измененный неортогональный вариант предложенного алгоритма подробно рассмотрен в [13].

В алгоритме полного анализа одна и та же процедура вычисления по алгоритму анализа повторяется $p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1}$ раз. А в базовом алгоритме p раз вычисляются несложные линейные комбинации, каждую из которых будем считать за одну операцию. Получили число операций алгоритма порядка $\frac{Np}{p-1}$. Это число с ростом p убывает. Хотя при $p = 2$ оно самое большое, выигрыш происходит за счет простоты базовых операций.

Если в формуле (5) в качестве элементов исходного базиса $\{A_s\}_{s=0}^{p-1}$ взять дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ), рассмотренные в [6, 7, 10], $r^k = (1 \ \omega^k \ \omega^{2k} \ \dots \ \omega^{(p-1)k})$, где $\omega = \exp \frac{2\pi i}{p}$, то получим векторную форму записи дискретных функций Хаара – Крестенсона, которые в [7] приведены в матричном виде со сквозной нумерацией по подпачкам. При этом подходе применяется векторная форма записи дискретных функций Крестенсона, предложенная в [14]. Только для $p = 4$ с привлечением быстрого алгоритма ДПФ (и для $p = 3$ при работе в троичном базисе, как в [15]) число операций для алгоритма полного анализа на основе дискретных функций Хаара – Крестенсона примерно такое же. В общем случае число операций увеличивается, так как в базовом алгоритме вместо p простых линейных комбинаций используется $(p - 1)^2$ умножений на комплексные числа.

К тому же на основе базиса ДЭФ не получается организовать процедуру последовательной прорисовки деталей. При организации процедуры синтеза приходится на каждом шаге пересчитывать все (комплексные) коэффициенты подпачки. По этим причинам приводить этот известный хаароподобный алгоритм не будем.

2.9. Предложенные две вейвлетные системы (5) или (8) вида $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$ или $\{\psi_k\}_{k=0}^{N-1}$ являются в терминах [8] системой с прореживанием по времени или δ - A - S системой в нашей терминологии. Преобразование, описанное в пункте 2.4, переводит каждую из них в тип S - A - δ или в систему с прореживанием по частоте.



Построение для них соответствующих алгоритмов полного анализа и полного синтеза даже проще за счет возможности представления аргументов в векторном виде и организации параллельных вычислений.

Каждая из двух предложенных вейвлетных систем (5) или (8) может быть преобразована в систему с переменными основаниями, заданными набором чисел $\{p_k\}_{k=1}^n$ таких, что $p_k \geq 2$. В этом случае каждый из базовых алгоритмов AN, ANALYS, BR следует рассматривать как алгоритм, зависящий от параметра p_k , с пошаговой сменой этого параметра.

Список литературы

1. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. С.-Петербург : Лань, 2012. 304 с.
2. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. Т. 53, вып. 6 (324). С. 53–128. <https://doi.org/10.4213/rm89>
3. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. Москва : Физматлит, 2005. 616 с.
4. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Москва : Наука, 1987. 344 с.
5. Беспалов М. С., Склярченко В. А. Дискретные функции Уолша и их приложения. Владимир : ВлГУ, 2014. 68 с.
6. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их приложения в управлении, связи и других областях. Москва : Наука, 1989. 496 с.
7. Дагман Э. Е., Кухарев Г. А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск : Наука, 1983. 232 с.
8. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Хааровские спектры дискретных сверток // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 954–960.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва : Наука, 1969. 368 с.
10. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. Москва : Советское радио, 1975. 208 с.
11. Беспалов М. С. Дискретные периодические функции Бернулли // Прикладная дискретная математика. 2019. Т. 43. С. 16–36. <https://doi.org/10.17223/20710410/43/2>
12. Лукомский С. Ф. О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 14–19. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-1-14-19>
13. Беспалов М. С. Троичный дискретный вейвлетный базис // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 367–377. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>
14. Беспалов М. С. Дискретные преобразования Крестенсона // Проблемы передачи информации. 2010. Т. 46, № 4. С. 91–115. <https://doi.org/10.1134/S003294601004006X>
15. Ефимов А. В. Оценка коэффициентов Фурье по системе Крестенсона – Леви в G -локально интегральной метрике // Математические заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 29–36.

References

1. Malozemov V. N., Macharskiy S. M. *Osnovy discretnogo garmonicheskogo analiza* [Basics of Discrete Harmonic Analysis]. St. Petersburg, Lan', 2012. 304 p. (in Russian).
2. Novikov I. J., Stechkin S. B. Basic wavelet theory. *Russian Mathematical Surveys*, 1998, vol. 53, iss. 6, pp. 1159–1231. <https://dx.doi.org/10.1070/RM1998v053n06ABEH000089>
3. Novikov I. J., Protasov V. J., Skopina M. A. *Teoriya vspleskov* [Wavelet Theory]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 616 p. (in Russian).



4. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh Series and Transforms. Theory and Applications*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 1991. 360 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1987. 344 p.).
5. Беспалов М. С., Склярченко В. А. *Дискретные функции Уолша и их приложения* [Discrete Walsh Functions and its Applications]. Vladimir, VISU, 2014. 68 p. (in Russian).
6. Zalmanzon L. A. *Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их приложения в управлении, связи и других областях* [Fourier, Walsh, Haar Transforms and Their Applications in Control, Communication and Other Fields]. Moscow, Nauka, 1989. 496 p. (in Russian).
7. Dagman Je. E., Kucharev G. A. *Быстрые дискретные ортогональные преобразования* [Fast Discrete Orthogonal Transforms]. Novosibirsk, Nauka, 1983. 232 p. (in Russian).
8. Masharsky S. M., Malozemov V. N. Haar spectra of discrete convolutions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 6, pp. 914–921.
9. Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis*. New York, Toronto, London, Mcgray-Hill Book Company, 1960. 372 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1969. 368 p.).
10. Trahtman A. M., Trahtman V. A. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах* [Foundations of the Theory of Discrete Signals at Finite Intervals]. Moscow, Sovetskoe radio, 1975. 208 p. (in Russian).
11. Беспалов М. С. Bernoulli's discrete periodic functions. *Applied Discrete Mathematics*, 2019, no. 43, pp. 16–36. <https://doi.org/10.17223/20710410/43/2>
12. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional abelian group. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 14–19 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-1-14-19>
13. Беспалов М. С. Ternary discrete wavelet basis. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 367–377 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>
14. Беспалов М. С. Discrete Chrestenson transform. *Problems of Information Transmission*, 2010, vol. 46, no. 4, pp. 353–375. <https://doi.org/10.1134/S003294601004006X>
15. Efimov A. V. A bound on Fourier coefficients according to the Chrestenson – Levy system in ag -locally integral metric. *Mathematical Notes*, 1990, vol. 48, iss. 4, pp. 992–997. <https://doi.org/10.1007/BF01139598>

Поступила в редакцию / Received 17.11.2020

Принята к публикации / Accepted 24.04.2021

Опубликована / Published 30.11.2021