

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 48–61

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 48–61

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

Научная статья

УДК 539.3

Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений

А. Ш. Джабраилов^{1✉}, А. П. Николаев¹,
Ю. В. Клочков¹, Н. А. Гуреева², Т. Р. Ищанов¹

¹Волгоградский государственный аграрный университет, Россия, 400002, г. Волгоград, просп. Университетский, д. 26

²Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, г. Москва, Ленинградский просп., д. 49

Джабраилов Арсен Шахназович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, arsen82@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6494-1377>

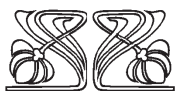
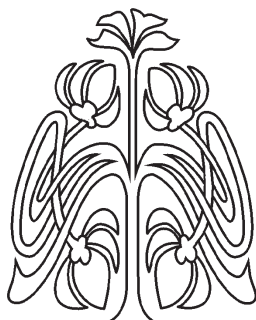
Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>

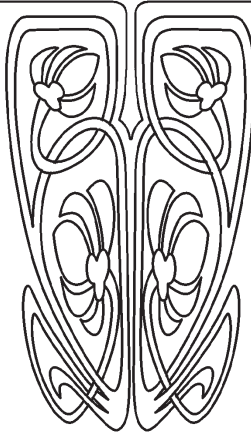
Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>

Ищанов Глек Рахметолович, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, ishchanov.volgau@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2137-4269>

Аннотация. Использован криволинейный конечный элемент срединной линии осесимметрично нагруженной оболочки вращения с матрицей жесткости размером 8×8 при выборе узловых неизвестных в виде перемещений и их первых производных. Определяющие уравнения на шаге нагружения реализованы в двух вариантах. В первом варианте использованы соотношения деформационной теории пластичности, состоящие из выражений упругих и пластических частей. Соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений определялись дифференцированием используемых уравнений. Во втором варианте гипотеза о разделении деформации



Научный
отдел





на упругую и пластическую части не использовалась. Разработанные авторами определяющие уравнения получены на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений напряжений и компонент девиаторов приращений деформаций с коэффициентом пропорциональности в виде функции хордового модуля диаграммы деформирования. Представлен пример расчета, показывающий эффективность разработанного алгоритма.

Ключевые слова: оболочка вращения, тензор деформаций, вектор перемещения, конечный элемент, шаг нагружения, физическая нелинейность, напряжение

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Волгоградской области (проект № 19-41-340002р_а).

Для цитирования: Джабраилов А. Ш., Николаев А. П., Клочков Ю. В., Гуреева Н. А., Ищанов Т. Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 48–61. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Nonlinear deformation of axisymmetrically loaded rotation shell based on FEM with different variants of definitional equations

A. Sh. Dzhabrailov¹✉, A. P. Nikolaev¹, Yu. V. Klochkov¹,
N. A. Gureeva², T. R. Ishchanov¹

¹Volgograd State Agricultural University, 26 Universitetskiy pr., Volgograd 400002, Russia

²Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, Moscow 125993, Russia

Arsen Sh. Dzhabrailov, arsen82@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6494-1377>

Anatoly P. Nikolaev, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>

Yuri V. Klochkov, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>

Natalia A. Gureeva, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>

Tlek R. Ishchanov, ishchanov.volgau@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2137-4269>

Abstract. A curvilinear finite element of the median line of an axisymmetrically loaded shell of revolution with a stiffness matrix of 8×8 size is used when choosing nodal unknowns in the form of displacements and their first derivatives is used. The constitutive equations at the loading step are implemented in two versions. In the first version, the relations of the deformation theory of plasticity are used, which consist of expressions for the elastic and plastic parts. The relationships between strain increments and stress increments were determined by differentiating the equations used. In the second version, the hypothesis of separation of the deformation into elastic and plastic parts was not used. The constitutive equations developed by the authors are obtained on the basis of the hypothesis of the proportionality of the components of the deviators of the stress increments and the components of the deviators of the increments of deformations with the coefficient of proportionality as a function of the chord modulus of the deformation diagram. An example of calculation showing the effectiveness of the developed algorithm is presented.



Keywords: shell of revolution, strain tensor, displacement vector, finite element, loading step, physical nonlinearity, stress

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region (project No. 19-41-340002).

For citation: Dzhabrailov A. Sh., Nikolaev A. P., Klochkov Yu. V., Gureeva N. A., Ishchanov T. R. Nonlinear deformation of axisymmetrically loaded rotation shell based on FEM with different variants of definitional equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 48–61 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В настоящее время расчеты тонкостенных конструкций опираются на достаточно развитую теорию оболочек [1–7]. В современных технологических реалиях значительно возрастает необходимость наиболее полного использования прочностных свойств материалов, которые должны обеспечивать устойчивую работу оболочечной конструкции даже при достижении предельных нагрузок. Действие этих нагрузок носит ярко выраженный местный характер, что в свою очередь может привести к возникновению пластических деформаций. Учет физической нелинейности применяемого материала, несомненно, приводит к более экономичным решениям, позволяя эффективно оценить работу конструкции [8–13]. В расчетах за пределами упругости широко используется деформационная теория пластичности с разделением деформации на упругую и пластическую части. Соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений на шаге нагружения определяются дифференцированием определяющих уравнений деформационной теории пластичности с принятием неизменности объема при пластическом деформировании. При выводе определяющих уравнений в настоящей работе предложена гипотеза о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений, на основе которой коэффициент пропорциональности получен в виде функции хордового модуля диаграммы деформирования. В разработанном варианте получения определяющих уравнений на шаге нагружения исключена операция деления деформации на упругую и пластическую части, что позволило значительно упростить алгоритм формирования определяющих уравнений.

1. Материалы и методы

1.1. Основные соотношения

В процессе деформирования рассматриваются три положения точки срединной линии продольного сечения оболочки вращения: исходное (точка H^0), после j шагов нагружения (точка H , вектор перемещения \mathbf{v}) и после $(j + 1)$ шага (точка H^* , вектор перемещения $\Delta\mathbf{v}$). Соответствующие точки, отстоящие на расстоянии ζ от срединной поверхности, обозначаются символами $H^{0\zeta}$, H^ζ и $H^{*\zeta}$.

Положение точки H^0 оболочки вращения описывается радиус-вектором

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + r\mathbf{k}, \quad (1)$$



где x — осевая координата, r — радиус вращения, являющийся функцией от x , \mathbf{i} , \mathbf{k} — орты декартовой системы координат.

Вектор локального базиса, касательный к срединной линии продольного сечения оболочки, можно получить дифференцированием (1) по криволинейной координате s :

$$\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{R}_{,s}^0 = (\mathbf{i} + r_{,x}\mathbf{k})_{x,s}. \quad (2)$$

Орт нормали к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{j} = -r_{,x}x_s\mathbf{i} + x_s\mathbf{k}. \quad (3)$$

Соотношения (2) и (3) можно представить в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^0 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^0 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $\{\mathbf{e}^0\}^T = \{\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}^0\}$; $\{\mathbf{i}\}^T = \{\mathbf{ik}\}$.

Дифференцированием (2) и (3) с учетом (4) можно сформировать матричное соотношение

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{,s}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{,s}^0 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^0 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Рассматриваемые положения произвольной точки оболочки вращения при учете гипотезы прямой нормали можно описать следующими радиус-векторами (рис. 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{0\zeta} &= \mathbf{R}^0 + \zeta \mathbf{e}^0, & \mathbf{R} &= \mathbf{R}^0 + \mathbf{v}, & \mathbf{R}^* &= \mathbf{R} + \Delta \mathbf{v}, \\ \mathbf{R}^\zeta &= \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v} + \zeta(\mathbf{e} - \mathbf{e}^0), & \mathbf{R}^{*\zeta} &= \mathbf{R}^\zeta + \Delta \mathbf{v} + \zeta(\mathbf{e}^* - \mathbf{e}), \end{aligned} \quad (6)$$

где \mathbf{e} и \mathbf{e}^* — орты нормалей к срединной поверхности оболочки в точках H и H^* соответственно.

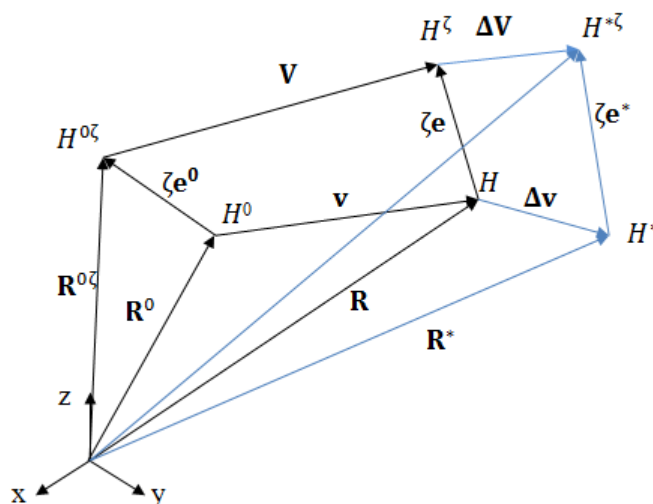


Рис. 1. Положение рассматриваемых точек при деформировании оболочки

Fig. 1. The position of the points under consideration when the shell is being deformed

Векторы перемещения \mathbf{v} и $\Delta\mathbf{v}$, входящие в (6), можно определить выражениями

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1^0 + v\mathbf{e}^0, \quad \Delta\mathbf{v} = \Delta v^1\mathbf{e}_1^0 + \Delta v\mathbf{e}^0. \quad (7)$$

Для определения базисных векторов в точках $H^{0\zeta}$, H^ζ и $H^{*\zeta}$ выполняется дифференцирование (6) по глобальной криволинейной координате s :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{0\zeta} &= \mathbf{R}_{,s}^{0\zeta}, \quad \mathbf{e}_1^\zeta = \mathbf{R}_{,s}^\zeta = \mathbf{e}_1^{0\zeta} + \mathbf{v}_{,s} + \zeta(\mathbf{e}_{,s} - \mathbf{e}_{,s}^0), \\ \mathbf{e}_1^{*\zeta} &= \mathbf{R}_{,s}^{*\zeta} = \mathbf{e}_1^\zeta + \Delta\mathbf{v}_{,s} + \zeta(\mathbf{e}_{,s}^* - \mathbf{e}_{,s}). \end{aligned} \quad (8)$$

Входящие в (8) производные векторов перемещений \mathbf{v} и $\Delta\mathbf{v}$ определяются с учетом (5) соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,s} &= p_1^1\mathbf{e}_1^0 + p_1\mathbf{e}^0, \quad \mathbf{v}_{,ss} = p_{11}^1\mathbf{e}_1^0 + p_{11}\mathbf{e}^0, \\ \Delta\mathbf{v}_{,s} &= l_1^1\mathbf{e}_1^0 + l_1\mathbf{e}^0, \quad \Delta\mathbf{v}_{,ss} = l_{11}^1\mathbf{e}_1^0 + l_{11}\mathbf{e}^0. \end{aligned} \quad (9)$$

Величины $p_1^1 \dots l_{11}$ в соотношениях (9) являются функциями компонент векторов перемещений \mathbf{v} и $\Delta\mathbf{v}$, а также их производных.

Орты нормалей к срединной поверхности оболочки в точках H и H^* определяются векторными произведениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{j} = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,s} \times \mathbf{j} = (\mathbf{e}_1^0 + v_{,s}) \times \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}^* &= \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{j} = (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{v})_{,s} \times \mathbf{j} = (\mathbf{e}_1 + \Delta\mathbf{v}_{,s}) \times \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения деформаций и их приращений в отстоящем на расстоянии ζ от срединной линии слое оболочки вращения при осесимметричном деформировании используются соотношения механики сплошной среды [14]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\zeta &= \frac{(e_{11}^\zeta - e_{11}^{0\zeta})}{2}, \quad \Delta\varepsilon_{11}^\zeta = \frac{(e_{11}^{*\zeta} - e_{11}^\zeta)}{2}, \\ \varepsilon_{22}^\zeta &= \frac{\mathbf{R}^\zeta\mathbf{k} - \mathbf{R}^{0\zeta}\mathbf{k}}{\mathbf{R}^{0\zeta}\mathbf{k}}, \quad \Delta\varepsilon_{22}^\zeta = \frac{\mathbf{R}^{*\zeta}\mathbf{k} - \mathbf{R}^\zeta\mathbf{k}}{\mathbf{R}^\zeta\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где ковариантные компоненты метрических тензоров для исходного и деформированного состояний определяются произведениями соответствующих базисных векторов

$$e_{11}^\zeta = \mathbf{e}_1^\zeta \cdot \mathbf{e}_1^\zeta, \quad e_{11}^{0\zeta} = \mathbf{e}_1^{0\zeta} \cdot \mathbf{e}_1^{0\zeta}, \quad e_{11}^{*\zeta} = \mathbf{e}_1^{*\zeta} \cdot \mathbf{e}_1^{*\zeta}. \quad (12)$$

Выражения (11) с учетом (8)–(10) и (12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\zeta &= v_{,s}^1 - kv + \zeta(-kv_{,s}^1 - k_{,s}v^1 - v_{,ss}), \quad \varepsilon_{22}^\zeta = vk_2 + k_1v^1 + \zeta(-k_1v_{,s} - kk_1v^1), \\ \Delta\varepsilon_{11}^\zeta &= \Delta v_{,s}^1 - k\Delta v + \zeta(-k\Delta v_{,s}^1 - k_{,s}\Delta v^1 - \Delta v_{,ss}), \\ \Delta\varepsilon_{22}^\zeta &= \Delta vk_2 + k_1\Delta v^1 + \zeta(-k_1\Delta v_{,s} - kk_1\Delta v^1), \end{aligned} \quad (13)$$

где $k = r_{,xx}x_{,s}^3$, $k_1 = r_{,x}x_{,s}/r$, $k_2 = x_{,s}/r$.

Деформации (13) представляются в более компактной форме следующим образом:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \varepsilon + \zeta\chi_{\alpha\beta}, \quad \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta\Delta\chi_{\alpha\beta}, \quad (14)$$



где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\chi_{\alpha\beta}$ — деформации и искривления срединной поверхности в точке H , $\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\Delta\chi_{\alpha\beta}$ — приращения деформаций и искривлений срединной поверхности в точке H^* .

Соотношения (14) можно представить в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^\zeta \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ 2 \times 4 \end{Bmatrix} = [G][L] \begin{Bmatrix} v \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon^\zeta \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon \\ 2 \times 4 \end{Bmatrix} = [G][L] \begin{Bmatrix} \Delta v \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\chi_{11}\chi_{22}\}$, $\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}\Delta\varepsilon_{22}\Delta\chi_{11}\Delta\chi_{22}\}$, $\{v\}^T = \{uw\}$, $\{\Delta v\}^T = \{\Delta u\Delta w\}$, $[L]$ — матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

1.2. Зависимости между приращениями деформаций и приращениями напряжений на шаге нагружения

В первом варианте соотношения между компонентами деформаций и напряжений на шаге нагружения устанавливались на основе положений деформационной теории пластичности [15]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta e} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta p}, \quad (16)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta e}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta p}$ — упругие и пластические деформации соответственно.

Согласно [15] компоненты девиаторов упругих и пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{\zeta e} - \varepsilon_s^e = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^e}{\sigma_i} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_s), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{\zeta p} - \varepsilon_s^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_s), \quad \alpha = 1, 2, \quad (17)$$

где ε_s^e и ε_s^p — средняя упругая и пластическая деформации, ε_i^e и ε_i^p — интенсивности упругих и пластических деформаций соответственно, σ_s — среднее напряжение.

В соотношениях (17) полагается, что при пластическом деформировании изменения объема не происходит ($\varepsilon_s^p = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = 0$).

Таким образом, суммарные деформации на шаге нагружения можно представить соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta - \varepsilon_s = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_s), \quad (18)$$

где $\varepsilon_s = \varepsilon_s^e + \varepsilon_s^p = \varepsilon_s^e$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p$.

Связь между средней деформацией и средним напряжением, входящими в (18), такая же, как и в пределах упругости [15]:

$$\varepsilon_s = \left(\frac{1 - 2\nu}{E} \right) \sigma_s = K_1 \sigma_s, \quad (19)$$

где ν — коэффициент поперечной деформации, E — модуль упругости материала оболочки.

Приращения деформаций на шаге нагружения определялись дифференцированием (18) и представлялись в общем виде следующим образом:

$$\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta = \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta}{\partial\sigma_{11}} \Delta\sigma_{11} + \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta}{\partial\sigma_{22}} \Delta\sigma_{22}. \quad (20)$$

На основе (20) формируется матричное соотношение

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon^\zeta \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [D_1] \begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (21)$$



где $\{\Delta\varepsilon^\zeta\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}^\zeta, \Delta\varepsilon_{22}^\zeta\}$, $\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma_{11}, \Delta\sigma_{22}\}$, $[D_1]$ — матрица упругопластического деформирования на шаге нагружения.

Во втором варианте определяющие уравнения записаны на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений:

$$\Delta e_{ij} = \varphi \Delta s_{ij}, \quad (22)$$

где $\Delta e_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_s$, $\Delta s_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta\sigma_s$; $\Delta\varepsilon_s$, $\Delta\sigma_s$ — первые инварианты тензоров приращений деформаций и приращений напряжений.

Для определения коэффициента φ , входящего в (22), используются соотношения [16]

$$\varepsilon_i^\Delta = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta e_{ij} \Delta e_{ij}}, \quad \sigma_i^\Delta = \sqrt{\frac{3}{2} \Delta s_{ij} \Delta s_{ij}}, \quad (23)$$

где ε_i^Δ — интенсивность приращений деформаций, σ_i^Δ — интенсивность приращений напряжений.

Подставляя (22) в (23), можно получить выражения коэффициента φ в виде

$$\varphi = \frac{3 \varepsilon_i^\Delta}{2 \sigma_i^\Delta}. \quad (24)$$

На шаге нагружения принимается равенство

$$\frac{\varepsilon_i^\Delta}{\sigma_i^\Delta} = \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta\sigma_i}, \quad (25)$$

где $\Delta\varepsilon_i$ — приращение интенсивности деформации, $\Delta\sigma_i$ — приращение интенсивности напряжений.

Отношение приращений интенсивностей напряжений и деформаций обозначается хордовым модулем диаграммы деформирования (E_h), а так как на шаге нагружения он неизвестен, то хордовый модуль заменяется касательным модулем диаграммы деформирования (E_k).

При учете (24), (25) коэффициент φ определяется выражением

$$\varphi = \frac{3 \Delta\varepsilon_i}{2 \Delta\sigma_i} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_h} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_k}. \quad (26)$$

На основании эксперимента при растяжении стержня между средними значениями устанавливается зависимость

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \sigma_s \left(\frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \right) \frac{1}{E_s} = K_2 \sigma_s, \quad (27)$$

где E_s — секущий модуль диаграммы деформирования.

На основе (26) и (27) из (22) определяются соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений. Для осесимметрично нагруженной оболочки они запишутся выражениями

$$\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta = \frac{3}{2E_k} \Delta\sigma_{\alpha\alpha} - \Delta\sigma_s \left(\frac{3}{2} \frac{1}{E_k} - K_2 \right),$$

или в матричном виде

$$\begin{matrix} \{\Delta\varepsilon^\zeta\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [D_2] \\ 2 \times 2 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta\sigma\} \\ 2 \times 1 \end{matrix}. \quad (28)$$



1.3. Конечный элемент и матрица жесткости на шаге нагружения

Для случая осесимметричного нагружения наиболее целесообразным является использование одномерного конечного элемента с узлами i и j [17].

Компоненты вектора перемещения внутренней точки конечного элемента в исходном и деформированном состояниях определяются через узловые неизвестные следующим образом:

$$\begin{matrix} \{v\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ 2 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \{\Delta v\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ 2 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \{U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [T] \\ 8 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{U_y^g\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}, \quad (29)$$

где матрица $[A]$ содержит полиномы Эрмита третьей степени, $\{U_y^l\}^T, \{U_y^g\}^T$ — строки узловых неизвестных конечного элемента в локальной и глобальной системах координат, $[T]$ — матрица преобразования узловых неизвестных из локальной системы координат в глобальную.

Матрица-столбец приращений деформаций на шаге нагружения при учете (15) и (29) может быть представлена в виде

$$\begin{matrix} \{\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [G][L][A] \\ 2 \times 44 \times 22 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [G][B] \\ 2 \times 44 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta U_y^g\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}. \quad (30)$$

Для формирования матрицы жесткости конечного элемента используется функционал, определяющий равенство возможных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения:

$$\Phi = \int_V \begin{matrix} \{\Delta \varepsilon^{\zeta}\}^T \\ 2 \times 1 \end{matrix} \left(\begin{matrix} \{\sigma\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \{\Delta \sigma\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right) dV - \int_F \begin{matrix} \{\Delta v\}^T \\ 2 \times 1 \end{matrix} \left(\begin{matrix} \{P\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \{\Delta P\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right) dF, \quad (31)$$

где V — объем элемента, F — площадь приложения нагрузки, $\{P\}^T = \{P_{11} P_{22}\}$, $\{\Delta P\}^T = \{\Delta P_{11} \Delta P_{22}\}$ — внешние нагрузки после j шагов нагружения и ее приращение на $(j + 1)$ -м шаге нагружения.

Подставляя в функционал (31) выражения (21), (28)–(30) и выполняя его минимизацию по глобальным узловым неизвестным [17], можно получить матрицу жесткости конечного элемента $[K]$ и вектор его узловых усилий $\{f\}$, связанных соотношением

$$\begin{matrix} [K] \\ 8 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{U_y^g\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{f\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} - \begin{matrix} \{R\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}, \quad (32)$$

где

$$\begin{matrix} [K] \\ 8 \times 8 \end{matrix} = \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_V \begin{matrix} [B]^T [G]^T [D_n] [G] [B] dV [T], \\ 8 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 44 \times 8 \quad 8 \times 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \{f\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_F \begin{matrix} [A]^T \{ \Delta P \} dF, \\ 8 \times 2 \quad 2 \times 1 \end{matrix}$$

$\{R\} = \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_F \begin{matrix} [A]^T \{P\} dF \\ 8 \times 2 \quad 2 \times 1 \end{matrix} - \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_V \begin{matrix} [B]^T [G] \{ \Delta \sigma \} dV \\ 8 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 2 \times 1 \end{matrix}$ — невязка Ньютона – Рафсона на рассматриваемом шаге нагружения.

Интегралы, входящие в (32), определялись численно на основе формул Гаусса.

2. Результаты

В качестве примера была решена тестовая задача по определению напряженного состояния оболочки вращения в форме усеченного эллипсоида, изображенного на рис. 2.

Оболочка, нижний край которой жестко зашечлен ($w = 0, w_s = 0$), загружена внутренним давлением интенсивности q . Были приняты следующие исходные данные:

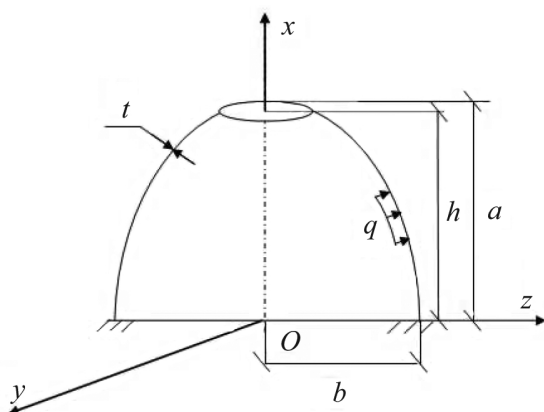


Рис. 2. Усеченная оболочка вращения
Fig. 2. Truncated shell of revolution

внутреннее давление $q = 5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.32$; модуль упругости $E = 7 \cdot 10^5$ МПа; толщина оболочки $t = 0.02$ м; параметры эллипса: $a = 1.3$ м, $b = 0.9$ м; высота усеченной оболочки $h = 1.2$ м; интенсивность напряжения, соответствующая пределу текучести, $\sigma_{iT} = 200$ МПа, интенсивность деформации, соответствующая пределу текучести, $\varepsilon_{iT} = 0.0023$. По условию сходимости вычислительного процесса на первом шаге нагружения при различных вариантах дискретизации оболочки было принято достаточным разбиение рассматриваемой конструкции на 32 элемента.

Было реализовано два варианта расчета. В первом варианте получены конечно-элементные решения на основании определяющих уравнений деформационной теории пластичности (21). Во втором варианте найдены конечно-элементные решения при использовании определяющих уравнений (28), полученных на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций и девиаторов приращений напряжений.

Для представления диаграммы деформирования на участке упрочнения использовалась параболическая функция вида

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^2 + B\varepsilon_i + C, \tag{33}$$

где $A = -23461.55$ МПа, $B = 181201.17$ МПа, $C = 1574.3$ МПа.

Результаты конечно-элементных решений в зависимости от числа шагов нагружения представлены в табл. 1, 2. В них приведены значения меридиональных напряже-

Таблица 1 / Table 1

Меридиональные напряжения при использовании предположения о неизменности объема в результате пластических деформаций
Meridional stresses using the assumption of volume invariance as a result of plastic deformations

Координаты Coordinates		Напряжение, МПа Stress, МПа		
x , см / cm	ζ , см / cm	Число шагов нагружения, n Number of loading steps, n		
		30	50	70
0.0	-1.0	274.21	274.50	277.50
	-0.5	235.20	229.50	238.20
	0.0	119.00	121.40	119.50
	0.5	-28.30	-28.30	-29.10
	1.0	-177.50	-176.80	-178.30
120.0	-1.0	4.80	5.17	5.13
	-0.5	3.70	2.65	2.68
	0.0	0.15	0.19	0.17
	0.5	-2.40	-2.36	-2.30
	1.0	-4.80	-4.78	-4.79



Таблица 2 / Table 2

Меридиональные напряжения при использовании второго варианта определяющих уравнений
 Meridional stresses when using the second version of the constitutive equations

Координаты Coordinates		Напряжение, МПа Stress, МПа		
x , см / cm	ζ , см / cm	Число шагов нагружения, n Number of loading steps, n		
		30	50	70
0.0	-1.0	273.05	275.50	276.10
	-0.5	226.30	227.60	230.50
	0.0	119.60	120.40	122.60
	0.5	-25.20	-26.30	-29.50
	1.0	-176.60	-177.80	-178.40
120.0	-1.0	4.90	5.12	5.12
	-0.5	3.62	2.72	2.65
	0.0	0.15	0.17	0.18
	0.5	-2.30	-2.32	-2.30
	1.0	-4.74	-4.75	-4.89

ний в зависимости от координаты ζ в характерных точках конструкции: в опорном сечении и верхней границе.

Как видно из данных табл. 1, 2, картина напряженного состояния оболочки при нелинейном упрочнении диаграммы деформирования в обоих вариантах определяющих уравнений изменяется незначительно (отклонения в пределах 1%).

Для наглядности и удобства анализа полученных результатов при числе шагов $n = 70$ в опорном сечении оболочки были построены эпюры напряжений (рис. 3),

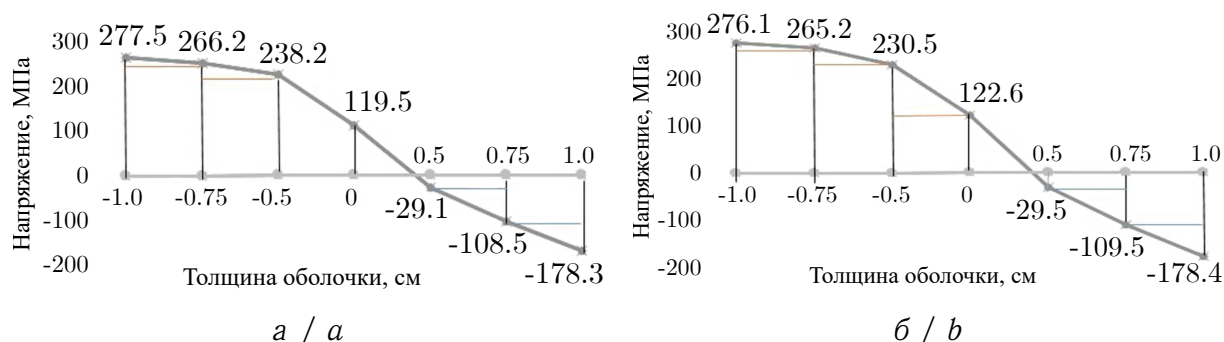


Рис. 3. Эпюры меридиональных напряжений в опорном сечении: а — классический вариант определяющих уравнений, б — предложенный вариант определяющих уравнений

Fig. 3. Diagrams of meridional stresses in the reference section: a — the classical version of constitutive equations, b — the proposed version of the constitutive equations



а также зависимости напряжений вдоль координаты s на внутренней стороне оболочки (рис. 4).

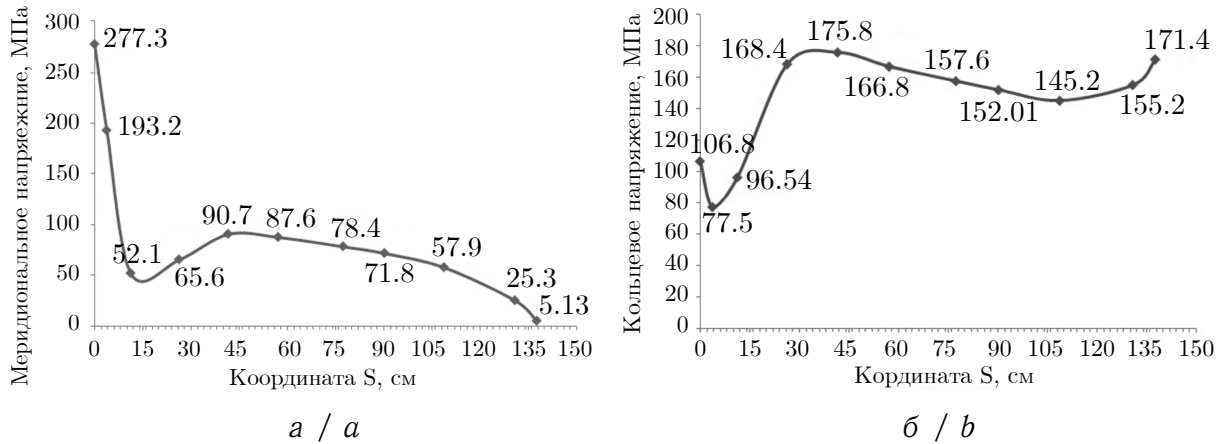


Рис. 4. Графики изменения меридиональных (а) и кольцевых (б) напряжений на внутренней стороне оболочки в зависимости от координаты s
 Fig. 4. Graphs of changes in the meridional (a) and hoop (b) stresses on the inner side of the shell depending on the coordinate s

3. Обсуждения

Для верификации полученных результатов производился анализ сходимости вычислительного процесса. При различных числах шагов нагружения сравнивались полученные значения конечно-элементных решений в рассматриваемых точках конструкции.

Как видно из данных табл. 1, 2, сходимость численных значений меридиональных напряжений в опорном сечении в зависимости от числа шагов нагружения выполняется. Значения контролируемых параметров напряженного состояния несущественно отличаются друг от друга (в пределах 1%).

Для рассматриваемой конструкции проверялось выполнение уравнения статики: сумма проекций всех сил на ось Ox равна нулю

$$P_z - P_v = 0, \tag{34}$$

где P_z — проекция равнодействующей всех заданных сил на ось Ox , P_v — проекция равнодействующей всех внутренних усилий на ось Ox .

Численное значение P_z определялось по формуле

$$P_z = q(\pi R_2^2 - \pi R_1^2) = 50(3.14(89)^2 - 3.14(33.61)^2) = 10667.13 \text{ кН}. \tag{35}$$

Чтобы определить внутреннее усилие в опорном сечении, необходимо разбить эпюру напряжений на элементарные геометрические фигуры и найти их площади, затем умножить полученные усилия на соответствующие данному слою длины окружностей. Суммированием полученных растягивающих и сжимающих усилий определяется значение силы в рассматриваемом сечении.



Суммарные внутренние усилия получились равными $P_v = 10843.9$ кН и $P_v = 10756.9$ кН соответственно при использовании определяющих соотношений, полученных на основании (21) и на основании (28). Погрешности вычислений составили $\delta = 1.64\%$ и $\delta = 0.84\%$ соответственно.

Третьим критерием верификации вычислительного процесса был контроль значения меридионального напряжения на срединной линии поперечного сечения в верхнем крае оболочечной конструкции. В соответствии с физическим смыслом задачи значение напряжения должно стремиться к нулю, так как данный край не загружен.

Анализируя результаты из табл. 1, 2, можно с уверенностью сказать, что данный критерий выполняется.

Заключение

Исходя из вышеизложенного материала, можно заключить, что алгоритм получения определяющих уравнений осесимметрично нагруженных оболочек вращения при учете физической нелинейности применяемого материала на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций и компонент девиатора приращений напряжений является корректным и позволяет получать конечно-элементные решения достаточной степени точности. Использование предположения о неизменности объема в результате пластических деформаций является, по мнению авторов, не совсем корректным. Как показал сравнительный анализ, выполненный для различных вариантов формирования матрицы пластичности на шаге нагружения, связь между средним линейным напряжением и средней линейной деформацией можно осуществлять в виде (27). Это, по мнению авторов, более соответствует физическому смыслу процесса деформирования и значительно упрощает процесс формирования матрицы пластичности на шаге нагружения.

Список литературы

1. Амосов А. А. Техническая теория тонких упругих оболочек. Москва : АСВ, 2011. 304 с.
2. Петров В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. Москва : Инфа-Инженерия, 2014. 480 с.
3. Cohen H., De Silva C. N. Nonlinear theory of elastic surfaces // Journal of Mathematical Physics. 1966. Vol. 7, iss. 2. P. 246–253. <https://doi.org/10.1063/1.1704926>
4. Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Elliptic boundary layer in shells of revolution under normal edge shock loading // Multiscale Solid Mechanics / ed. by H. Altenbach, V. A. Eremeyev, L. A. Igumnov. Advanced Structured Materials. Vol. 141. Cham : Springer, 2021. P. 249–260. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_19
5. Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек. Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петербургского университета, 2002. 388 с.
6. Kayumov R. A. Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, iss. 5. P. 575–580. <https://doi.org/10.3103/S0025654417050120>
7. Badriev I. B., Paimushin V. N. Refined models of contact interaction of a thin plate with postioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Jurnal of Mathematics. 2017. Vol. 38, iss. 5. P. 779–793. <https://doi.org/10.1134/S1995080217050055>
8. Beirao da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2015. Vol. 295. P. 327–346. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>



9. Aldakheel F., Hudobivnik B., Wriggers P. Virtual element formulation for phase-field modeling of ductile fracture // *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2019. Vol. 17, iss. 2. P. 181–200. <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2018026804>
10. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements // *Composite Structures*. 2016. Vol. 154. P. 296–308. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>
11. Ломакин Е. В., Минаев Н. Г. Осесимметричное поле напряжений вблизи кругового выреза в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 317–325. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>
12. Karpov V. V., Ignatev O. V., Semenov A. A. The stress-strain state of ribbed shell structures // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. Iss. 6 (74). P. 147–160. <https://doi.org/10.18720/MCE.74.12>
13. Dzhabrailov A. Sh., Klochkov Yu. V., Marchenko S. S., Nikolaev A. P. The finite element approximation of vector fields in curvilinear coordinates // *Russian Aeronautics*. 2007. Vol. 50, № 2. P. 115–120. <https://doi.org/10.3103/S1068799807020018>
14. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. Москва : Наука, 1976. 492 с.
15. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва : Машиностроение, 1975. 400 с.
16. Ильюшин А. А. Пластичность. Упруго-пластические деформации. Санкт-Петербург : Ленанд, 2018. 352 с.
17. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Джабраилов А. Ш. Конечно-элементный анализ осесимметрично нагруженных оболочек вращения с ветвящимся меридианом при упруго-пластическом деформировании // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2013. № 3. С. 50–56.

References

1. Amosov A. A. *Tekhnicheskaya teoriya tonkikh uprugikh obolochek* [Technical Theory of Thin Elastic Shells]. Moscow, ASV, 2011. 304 p. (in Russian).
2. Petrov V. V. *Nelineinaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear Incremental Building Mechanics]. Moscow, Infa-Inzheneriya, 2014. 480 p. (in Russian).
3. Cohen H., De Silva C. N. Nonlinear theory of elastic surfaces. *Journal of Mathematical Physics*, 1966, vol. 7, iss. 2, pp. 246–253. <https://doi.org/10.1063/1.1704926>
4. Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Elliptic boundary layer in shells of revolution under normal edge shock loading. In: H. Altenbach, V. A. Eremeyev, L. A. Igumnov, eds. *Multiscale Solid Mechanics*. Advanced Structured Materials, vol. 141. Springer, Cham, 2021, pp. 249–260. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_19
5. Kabrits S. A., Mikhailovsky E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F., Shamina V. A. *Obshchaya nelineinaya teoriya uprugikh obolochek* [General Nonlinear Theory of Elastic Shells]. St. Petersburg, Izd-vo S.-Peterburgskogo universiteta, 2002. 388 p.
6. Kayumov R. A. Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, iss. 5, pp. 575–580. <https://doi.org/10.3103/S0025654417050120>
7. Badriev I. B., Paimushin V. N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii Jurnal of Mathematics*, 2017, vol. 38, iss. 5, pp. 779–793. <https://doi.org/10.1134/S1995080217050055>
8. Beirao da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, vol. 295, pp. 327–346. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>



9. Aldakheel F., Hudobivnik B., Wriggers P. Virtual element formulation for phase-field modeling of ductile fracture. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2019, vol. 17, iss. 2, pp. 181–200. <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2018026804>
10. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements. *Composite Structures*, 2016, vol. 154, pp. 296–308. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>
11. Lomakin E. V., Minaev N. G. Axisymmetric stress field near a circular cut in a solid with stress state dependent plastic properties. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 317–325 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>
12. Karpov V. V., Ignatev O. V., Semenov A. A. The stress-strain state of ribbed shell structures. *Magazine of Civil Engineering*, 2017, iss. 6 (74), pp. 147–160. <https://doi.org/10.18720/MCE.74.12>
13. Dzhabrailov A. Sh., Klochkov Yu. V., Marchenko S. S., Nikolaev A. P. The finite element approximation of vector fields in curvilinear coordinates. *Russian Aeronautics*, 2007, vol. 50, no. 2, pp. 115–120. <https://doi.org/10.3103/S1068799807020018>
14. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics: in 2 vols.]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1976. 492 p. (in Russian).
15. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian).
16. Plyushin A. A. *Plastichnost'. Uprugo-plasticheskie deformatsii* [Plastic. Elastic-plastic Deformation]. St. Petersburg, Lenand, 2018. 352 p. (in Russian).
17. Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Dzhabrailov A. Sh. A finite element analysis of axisymmetric loaded shells of revolution with a branching meridian under elastic-plastic deforming. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2013, no. 3, pp. 50–56 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.02.2021

Принята к публикации / Accepted 19.07.2021

Опубликована / Published 31.03.2022