



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 479–493

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 479–493

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493>, EDN: JDIVGD

Научная статья

УДК 539.3

Контактная задача для функционально-градиентной ортотропной полосы

А. О. Ватульян¹, Д. К. Плотников²✉

¹Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8-А

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватулина, д. 53

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Плотников Дмитрий Константинович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, dustheap@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2989-1949>, AuthorID: 1037652

Аннотация. В рамках плоской задачи теории упругости исследована задача о равновесии функционально-градиентной ортотропной упругой полосы под действием штампа с гладким основанием. С помощью преобразования Фурье сформирована каноническая система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант компонент вектора смещений и тензора напряжений. Построена связь между вертикальным смещением и нормальным напряжением на границе, с помощью которой сформулировано интегральное уравнение первого рода с разностным ядром. Символ ядра интегрального уравнения построен численно с помощью метода пристрелки. На основе метода Вишика – Люстерника проведен асимптотический анализ символа ядра при больших значениях параметра преобразования. Построена вычислительная схема решения интегрального уравнения с неизвестной областью контакта на основе метода граничных элементов. Представлены результаты решения контактной задачи для разных законов неоднородности полосы.

Ключевые слова: контактная задача, функционально-градиентная полоса, ортотропный материал, асимптотический анализ, метод граничных элементов

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (проект № 22-11-00265).

Для цитирования: Ватульян А. О., Плотников Д. К. Контактная задача для функционально-градиентной ортотропной полосы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 479–493. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493>, EDN: JDIVGD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Contact problem for functionally graded orthotropic strip

A. O. Vatulyan¹, D. K. Plotnikov²✉

¹Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, 8-A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfned.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Dmitry K. Plotnikov, dustheap@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2989-1949>, AuthorID: 1037652

Abstract. Within the framework of plane elasticity, the equilibrium problem for an inhomogeneous orthotropic elastic strip under the action of a stamp with a smooth base is investigated. Based on the Fourier transform, a canonical system of differential equations with variable coefficients with respect to transformants of the displacement vector and stress tensor components is constructed. A connection between the vertical displacement and the normal boundary stress is constructed, with which an integral equation of the first kind with a difference kernel is formulated. Using the shooting method, the kernel symbol for the integral equation of the contact problem is constructed numerically. Based on the Vishik – Lyusternik method, an asymptotic analysis of the kernel symbol for large values of the transformation parameter is carried out. A computational scheme for solving an integral equation with an unknown contact area is constructed. The solution of the contact problem for different laws of strip inhomogeneity is presented.

Keywords: contact problem, functionally graded strip, orthotropic material, asymptotic analysis, boundary element method

Acknowledgements: This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265).

For citation: Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. Contact problem for functionally graded orthotropic strip. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 479–493 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493>, EDN: JDIVGD

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

При изготовлении элементов конструкций ответственного назначения широко применяются различные технологии нанесения покрытий, которые позволяют придать конструктивным элементам желаемые свойства.

В настоящее время при изготовлении покрытий все чаще используются композиционные материалы, обладающие существенно неоднородными свойствами. Одним из направлений в конструировании неоднородных объектов является изготовление функционально-градиентных материалов (ФГМ), свойства которых изменяются по некоторому закону. Наиболее распространенным инструментом для оценки приповерхностных свойств новых материалов являются методы индентирования [1, 2]. Применение индентирования для оценки свойств неоднородных структур требует разработки новых эффективных методов моделирования контактного взаимодействия неоднородных тел.



Как правило, при описании деформирования покрытий используются модели полосы и полуплоскости, свойства которой изменяются в приповерхностном слое. Контактные задачи представляют собой один из разделов смешанных задач теории упругости и, как правило, сводятся к исследованию интегрального уравнения или системы интегральных уравнений первого рода со слабой особенностью. Одним из эффективных способов аналитического решения контактных задач являются асимптотические методы. В основополагающей работе в этом направлении [3] впервые был применен метод больших λ . В монографии [4] представлены общие вопросы контактного взаимодействия, методы исследования интегральных уравнений для малых и больших областей контакта (метод больших λ и метод малых λ).

В контактных задачах для неоднородных структур основная трудность состоит в том, что для произвольных законов неоднородности символы ядер интегральных операторов невозможно построить в явном виде. В [5] ряд результатов в рамках метода больших λ был распространен на неоднородную полосу. В основе решения задачи лежит аппроксимация символа ядра интегрального уравнения. В работах [6, 7] данный подход распространен на задачи для многослойных структур с неоднородным покрытием.

Другим способом исследования контактных задач является построение приближенных моделей деформирования неоднородных оснований. В [8] представлен ряд моделей контактного взаимодействия тел с тонкими покрытиями и прослойками. Монография [9] посвящена построению асимптотических моделей трехмерных контактных задач линейной теории упругости. В [10, 11] на основе гипотез о характере компонент поля смещений построены модели деформирования неоднородной упругой полосы, позволяющие рассматривать произвольные законы неоднородности, в том числе разрывные.

Также решение контактных задач может быть построено на основе численных методов. Отметим работу [12], где разработан численный метод нахождения распределения контактного давления между упругими телами, в том числе для полосы и штампа. В статьях [13, 14] представлены решения контактных задач для функционально-градиентных покрытий под действием штампа. В [15] исследована контактная задача для неоднородной упругой полосы, причем символ ядра проанализирован с помощью сочетания численных схем и асимптотического подхода, а решение интегрального уравнения получено с помощью метода граничных элементов.

Важное место в теории контактных задач для функционально-градиентных материалов занимают задачи, где учтены не только градиентность материала, но и анизотропия. В работе [16] исследована задача о действии жесткого штампа на анизотропное полупространство. В [17] представлено решение контактной задачи для ортотропного полупространства и жесткого штампа.

Среди работ, посвященных контактным задачам для анизотропной полосы, отметим [18–25].

В настоящей работе рассмотрена контактная задача для функционально-градиентной ортотропной упругой полосы и штампа с гладким основанием.

1. Постановка задачи

В рамках плоской задачи теории упругости рассмотрим задачу о контактном взаимодействии без трения функционально-градиентной ортотропной упругой полосы толщиной h и штампа с гладким основанием, внедряющегося в полосу под действием силы P . Нижняя граница полосы жестко сцеплена с недеформируемым основанием.



Коэффициенты тензора модулей упругости полосы C_{ij} являются произвольными функциями координаты x_3 : $C_{ij} = C_{ij}(x_3)$, $x_3 \in [0, h]$, удовлетворяющими условиям положительной определенности упругой энергии.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения для ортотропной полосы имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} &= 0, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} &= 0. \\ \sigma_{11} &= C_{11}(x_3)u_{1,1} + C_{13}(x_3)u_{3,3}, \\ \sigma_{33} &= C_{13}(x_3)u_{1,1} + C_{33}(x_3)u_{3,3}, \\ \sigma_{13} &= C_{55}(x_3)(u_{1,3} + u_{3,1}). \end{aligned}$$

где u_i , σ_{ij} — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений соответственно.

Граничные условия контактной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0, \\ \sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad |x_1| > a, \quad u_3(x_1, h) = -\delta + f(x_1), \quad |x_1| \leq a, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ — глубина внедрения штампа, $2a$ — область контакта, а функция $f(x_1)$ характеризует основание штампа.

Постановку задачи замыкает условие равновесия штампа

$$P = \int_{-a}^a q(x_1) dx_1, \quad q(x_1) = \sigma_{33}(x_1, h).$$

Введем безразмерные параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_i = x_i/h, \quad \hat{u}_i = u_i/h, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/C_0, \quad i, j = 1, 3, \\ \beta = a/h, \quad \hat{\delta} = \delta/h, \quad \hat{f} = f/h, \\ C_{ij} = C_0 \hat{C}_{ij}(\xi_3), \quad \hat{P} = P/C_0 h, \quad \hat{q} = q/C_0, \end{aligned}$$

где C_0 — характерное значение C_{55} , например среднее значение на отрезке $[0, h]$:

$$C_0 = \frac{1}{h} \int_0^h C_{55}(x_3) dx_3.$$

Для удобства далее опустим символ « $\hat{}$ ». Стандартной схемой решения контактной задачи является сведение ее к интегральному уравнению с разностным ядром относительно контактного давления. Поскольку коэффициенты дифференциального оператора являются переменными, то такая схема может быть реализована на основе численного решения вспомогательной задачи.

2. Вспомогательная задача о действии нормальной нагрузки

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки $q(\xi_1)$, локализованной на отрезке $[-\beta, \beta]$ верхней границы полосы. Применяя преобразование Фурье по координате ξ_1 , получим каноническую систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант компонент смещений и напряжений в виде

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad X_1 = i\tilde{u}_1, \quad X_2 = \tilde{u}_3, \quad X_3 = i\tilde{\sigma}_{13}, \quad X_4 = \tilde{\sigma}_{33}, \quad (2)$$



где $\tilde{u}_i, \tilde{\sigma}_{ij}$ — символы Фурье компонент вектора перемещений и тензора напряжений.

Коэффициенты матрицы A зависят от законов неоднородности полосы и определяются формулой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \frac{1}{C_{55}} & 0 \\ \alpha \frac{C_{13}}{C_{33}} & 0 & 0 & \frac{1}{C_{33}} \\ \alpha^2 \frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}} & 0 & 0 & -\alpha \frac{C_{13}}{C_{33}} \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия вспомогательной задачи в трансформантах примут вид

$$X_1(\alpha, 0) = 0, \quad X_2(\alpha, 0) = 0, \quad X_3(\alpha, 1) = 0, \quad X_4(\alpha, 1) = Q(\alpha), \quad (3)$$

где $Q(\alpha)$ — трансформанта Фурье нормальной нагрузки:

$$Q(\alpha) = \int_{-\beta}^{\beta} q(\xi_1) \exp(i\alpha\xi_1) d\xi_1.$$

В ряде работ [7, 26] подобные канонические системы строились относительно других характеристик, тогда коэффициенты матрицы A содержат производные от законов неоднородности полосы и не могут быть использованы для кусочно-непрерывных законов неоднородности.

Решение краевой задачи (2), (3) построим численно с помощью метода пристрелки [27]. Для оператора (2) сформулируем следующие вспомогательные задачи Коши:

$$X_1^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^{(1)}(\alpha, 0) = 1, \quad X_4^{(1)}(\alpha, 0) = 0,$$

$$X_1^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_4^{(2)}(\alpha, 0) = 1.$$

Решение краевой задачи (2), (3) представим в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач Коши

$$X_j(\alpha, \xi_3) = c_1 X_j^{(1)}(\alpha, \xi_3) + c_2 X_j^{(2)}(\alpha, \xi_3), \quad j = \overline{1, 4}.$$

Неизвестные c_1 и c_2 найдем, удовлетворяя краевым условиям (3) при $\xi_3 = 1$. Окончательно решение вспомогательной краевой задачи получим в виде

$$X_j(\alpha, \xi_3) = \left(X_3^{(2)}(\alpha, 1) X_j^{(1)}(\alpha, \xi_3) - X_3^{(1)}(\alpha, 1) X_j^{(2)}(\alpha, \xi_3) \right) \Delta^{-1}(\alpha) Q(\alpha),$$

$$\Delta(\alpha) = X_3^{(1)}(\alpha, 1) X_4^{(2)}(\alpha, 1) - X_3^{(2)}(\alpha, 1) X_4^{(1)}(\alpha, 1).$$

Для нахождения оригиналов компонент вектора перемещения осуществим обратное преобразование Фурье. Вертикальная компонента поля смещений определяется формулой

$$\hat{u}_3(\xi_1, \xi_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\alpha, \xi_3) e^{-i\alpha\xi_1} d\alpha. \quad (4)$$



3. Формулировка интегрального уравнения и его исследование

На основе (4) и граничных условий (1) сформулируем интегральное уравнение контактной задачи в виде

$$\int_{-\beta}^{\beta} k(\eta - \xi_1) \hat{q}(\eta) d\eta = -\delta_* + \gamma(\xi_1), \quad |\xi_1| \leq \beta, \quad (5)$$

причем ядро интегрального уравнения имеет вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad t = \eta - \xi_1,$$

где символ ядра $K(\alpha)$ — передаточная функция, являющаяся мероморфной и связывающая трансформанты вертикального смещения и нагрузки

$$X_2(\alpha, 1) = K(\alpha)Q(\alpha).$$

Она определяется через решения вспомогательных задач равенством

$$K(\alpha) = \left(X_3^{(2)}(\alpha, 1)X_2^{(1)}(\alpha, 1) - X_3^{(1)}(\alpha, 1)X_2^{(2)}(\alpha, 1) \right) \Delta^{-1}(\alpha).$$

Символ ядра интегрального уравнения играет ключевую роль при исследовании контактных задач. Нетрудно показать, меняя в (2) α на $-\alpha$, что для любых законов неоднородности $K(\alpha)$ является четной функцией, т. е. $K(-\alpha) = K(\alpha)$.

Проведем асимптотический анализ передаточной функции при малых и больших значениях параметра преобразования α . Для удобства рассмотрим краевую задачу (2), (3), полагая $Q(\alpha) = 1$, что соответствует действию сосредоточенной силы в точке $\xi_1 = 0$ верхней границы полосы. Тогда краевые условия примут вид

$$X_1(\alpha, 0) = 0, \quad X_2(\alpha, 0) = 0, \quad X_3(\alpha, 1) = 0, \quad X_4(\alpha, 1) = 1. \quad (6)$$

4. Анализ символа ядра при малых значениях параметра преобразования

Представим решение краевой задачи (2), (6) при малых значениях α в виде регулярных разложений

$$X_j(\alpha, \xi_3) = X_{j0}(\xi_3) + \alpha X_{j1}(\xi_3) + \alpha^2 X_{j2}(\xi_3) + \dots + \alpha^m X_{jm}(\xi_3) + \dots \quad (7)$$

Подставляя (7) в каноническую систему (2), составляя и решая краевые задачи при одинаковых степенях α , найдем главные члены разложения в виде

$$\begin{aligned} X_{10}(\xi_3) &= 0, & X_{20}(\xi_3) &= \int_0^{\xi_3} \frac{d\tau}{C_{33}(\tau)}, & X_{30}(\xi_3) &= 0, & X_{40}(\xi_3) &= 1, \\ X_{11}(\xi_3) &= - \int_0^{\xi_3} \int_0^{\tau} \frac{d\eta}{C_{33}(\eta)} d\tau, & X_{21}(\xi_3) &= 0, \\ X_{31}(\xi_3) &= - \int_1^{\xi_3} \frac{C_{13}(\tau)}{C_{33}(\tau)} d\tau, & X_{41}(\xi_3) &= 0, \end{aligned}$$



а для $m \geq 2$ X_{jm} определяются рекуррентным образом согласно формулам

$$\begin{aligned}
 X_{1m}(\xi_3) &= - \int_0^{\xi_3} X_{2(m-1)}(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^{\xi_3} \frac{1}{C_{55}(\tau)} \int_1^{\tau} \left[\frac{C_{11}(\eta)C_{33}(\eta) - C_{13}^2(\eta)}{C_{33}(\eta)} X_{1(m-2)}(\eta) - \frac{C_{13}(\eta)}{C_{33}(\eta)} X_{4(m-1)}(\eta) \right] d\eta d\tau, \\
 X_{2m}(\xi_3) &= \int_0^{\xi_3} \left[\frac{C_{13}(\tau)}{C_{33}(\tau)} X_{1(m-1)}(\tau) d\tau + \int_1^{\tau} X_{3(m-1)}(\eta) d\eta \right] d\tau, \\
 X_{3m}(\xi_3) &= \int_1^{\xi_3} \left[\frac{C_{11}(\tau)C_{33}(\tau) - C_{13}^2(\tau)}{C_{33}(\tau)} X_{1(m-2)}(\tau) d\tau - \frac{C_{13}(\tau)}{C_{33}(\tau)} X_{4(m-1)}(\tau) \right] d\tau, \\
 X_{4m}(\xi_3) &= \int_1^{\xi_3} X_{3(m-1)}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Тогда передаточная функция для малых значений параметра α с учетом четности может быть записана в виде

$$K(\alpha) = X_2(\alpha, 1) = X_{20}(1) + \alpha^2 X_{22}(1) + \dots + \alpha^m X_{2m}(1) + \dots,$$

причем главный член разложения имеет вид

$$X_{20}(1) = \int_0^1 \frac{1}{C_{33}(\tau)} d\tau.$$

5. Анализ символа ядра при больших значениях параметра преобразования

В случае больших значений параметра преобразования Фурье каноническая система представляет собой краевую задачу для векторного уравнения с малым параметром при старшей производной. Численный анализ такой системы наталкивается на определенные трудности, и поэтому далее построим асимптотику символа ядра с помощью асимптотического метода. Исследование символа ядра при больших α проведем на основе метода Вишика – Люстерника [28]. В работе [15] была исследована каноническая система вида (2) в изотропном случае, и главные члены асимптотики символа ядра при больших значениях параметра преобразования были построены на основе анализа решения задачи для однородной полосы. В настоящей работе представлен более простой способ получения асимптотик. Произведем в (2) замену

$$Y_1 = \alpha X_1, \quad Y_2 = \alpha X_2, \quad Y_3 = X_3, \quad Y_4 = X_4. \quad (8)$$

Тогда каноническая система примет вид $\mathbf{Y}' = \alpha A_1 \mathbf{Y}$, где коэффициенты матрицы



A_1 не зависят от α и имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{C_{55}} & 0 \\ \frac{C_{13}}{C_{33}} & 0 & 0 & \frac{1}{C_{33}} \\ \frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}} & 0 & 0 & -\frac{C_{13}}{C_{33}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проведения асимптотического анализа передаточной функции при больших α достаточно построить погранслоное решение краевой задачи в окрестности $\xi_3 = 1$. Решение краевой задачи при больших положительных α ($\alpha > 0$) в окрестности $\xi_3 = 1$ представим в виде

$$Y = v_0 + \frac{1}{\alpha}v_1 + \frac{1}{\alpha^2}v_2 + \dots$$

Ограничимся построением главного члена асимптотического разложения (8), который согласно методу Вишика – Люстерника может быть найден из решения задачи Коши для системы с постоянными коэффициентами вида

$$v'_0(\eta) = A_2 v_0(\eta), \quad v_{03}(0) = 0, \quad v_{04}(0) = 1, \quad \eta = \alpha(1 - \xi_3), \quad (9)$$

где $A_2 = -A_1|_{\xi_3=1}$.

Пусть λ_j – собственные числа матрицы A_2 , выберем из них λ_1, λ_2 такие, что $\text{Re}(\lambda_1) < 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0$. Будем строить погранслоные решения, убывающие внутрь полосы. Получим решение в виде

$$v_0(\eta) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} a_1 e^{\lambda_1 \eta} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} a_2 e^{\lambda_2 \eta},$$

где векторы a_j имеют вид

$$a_j = \left(\frac{C_{13} + \lambda_j^2 C_{33}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \Big|_{\xi_3=1}, -\frac{C_{11} + \lambda_j^2 C_{13}}{\lambda_j(C_{11}C_{33} - C_{13}^2)} \Big|_{\xi_3=1}, -\lambda_j, 1 \right)^T.$$

Структура символа ядра при больших значениях параметра преобразования α ($\alpha > 0$) определяется формулой

$$K(\alpha) = \frac{1}{\alpha}v_0(0) + \frac{1}{\alpha^2}v_1(0) + \frac{1}{\alpha^3}v_2(0) + \dots$$

С учетом четности передаточной функции асимптотика $K(\alpha)$ при больших значениях α может быть записана в виде

$$K(\alpha) = C|\alpha|^{-1} + o(|\alpha|^{-1}), \quad (10)$$

причем главный член асимптотики в (10) находится в аналитическом виде

$$C = \sqrt{\frac{2(C_2 - \sqrt{C_1})}{C_1}} \cdot \frac{C_{11}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \Big|_{\xi_3=1}, \quad C_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad C_2 = -\frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}C_{55}}{C_{33}C_{55}}. \quad (11)$$



Отметим, что при переходе к изотропному случаю главный член асимптотики (10) определяется формулой

$$C = \frac{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{2\hat{\mu}(\hat{\lambda} + \hat{\mu})} \Big|_{\xi_3=1},$$

где $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$ – безразмерные параметры Ламе полосы, что соответствует результатам асимптотического анализа, проведенного в [15].

В таблице представлены значения упругих модулей полосы C_{ij} в размерном виде, главного члена асимптотики (10) и собственные числа матрицы A_2 ($\lambda_1, \lambda_2 : \text{Re}(\lambda_1) < 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0$) для некоторых минералов.

Упругие постоянные C_{ij} (10^9 Н/м²), собственные числа матрицы A_2 (9), коэффициент C (11)

Table. Elastic constants C_{ij} (10^9 N/m²), eigenvalues of matrix A_2 (9), coefficient C (11)

Минерал	C_{11}	C_{33}	C_{55}	C_{13}	λ_1	λ_2	C
Топаз	282.0	295.0	133.0	85.0	-0.910 +0.386i	-0.910 -0.386i	0.919
Ангидрит	93.8	112.0	26.5	15.2	-0.537	-1.703	0.592
Серя	24.0	48.3	8.7	17.1	-0.831 +0.117i	-0.831 -0.117i	0.568
Барит	89.0	107.0	28.1	31.7	-0.685	-1.331	0.649
Целестин	104.4	128.6	27.9	60.5	-0.946 +0.073i	-0.946 -0.073i	0.627
Вольфрамит	176.7	233.1	63.1	79.6	-0.926 +0.117i	-0.926 -0.117i	0.680
Сегнетова соль	25.5	37.1	3.2	11.6	-0.336	-2.465	0.341

6. Решение интегрального уравнения.

Метод граничных элементов

Ввиду четности функций $K(\alpha)$ и $q(\xi_1)$ интегральное уравнение (5) может быть представлено в виде

$$\int_0^\beta k_1(\eta, \xi_1)q(\eta)d\eta = -\delta_* + \gamma(\xi_1), \quad 0 \leq \xi_1 \leq \beta, \tag{12}$$

где $k_1(\eta, \xi_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K(\alpha) [\cos(\alpha(\eta + \xi_1)) + \cos(\alpha(\eta - \xi_1))] d\alpha$.

Решение (12) построим численно с помощью метода граничных элементов [29]. Разобьем отрезок интегрирования $[0, \beta]$ на N отрезков $\Delta_j = [\eta_j, \eta_{j+1}]$, на каждом из которых искомая функция считается постоянной и равной q_j , и потребуем выполнения (12) в точках коллокаций $\xi_{1j} = (\eta_j + \eta_{j+1})/2$.

После дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных q_j в виде

$$\sum_{j=1}^N H_{jm}q_j = g_m, \quad m = 1..N, \quad g_m = -\delta_* + \gamma(\xi_m), \tag{13}$$



где

$$H_{jm} = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{K(\alpha)}{\alpha} [\sin(\alpha(\eta + \xi_1)) + \sin(\alpha(\eta - \xi_1))] d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_b^\infty \frac{C}{\alpha^2} [\sin(\alpha(\eta + \xi_1)) + \sin(\alpha(\eta - \xi_1))] d\alpha. \quad (14)$$

В контактных задачах для штампа с гладким основанием область контакта не известна и зависит от глубины внедрения. Как правило, при реализации вычислительных схем решения интегральных уравнений в контактных задачах задаются значения глубины внедрения штампа или действующей на него силы, а затем определяется величина области контакта, которая нелинейным образом зависит от задаваемых величин. В ряде работ определение величины области контакта строится с помощью итерационного процесса, в котором начальная область контакта полагается заведомо большей, чем действительная, а затем уточняется на каждом шаге из условия неотрицательности контактного давления.

При реализации вычислительной схемы, построенной в настоящей работе, задается значение β , а величина внедрения определяется из условия равенства нулю контактного давления на границах контактной области, которое после дискретизации является условием равенства нулю узлового значения q_N искомой функций вблизи границы контакта и может быть записано в виде

$$\Delta_N = 0, \quad (15)$$

где Δ_N — определитель матрицы, получающейся заменой N -го столбца матрицы H на вектор-столбец g . Отметим, что параметр δ_* входит в правые части интегральных уравнений линейно, и уравнение (15) является линейным алгебраическим уравнением относительно δ_* , что позволяет просто найти связь $\delta_*(\beta)$.

При вычислении коэффициентов алгебраической системы (13) интегрирование по отрезку $[0, b]$ в (14) осуществляется с помощью квадратурных формул Гаусса, а значения интегралов на полуинтервале $[b, \infty)$ представляются через специальные функции.

7. Результаты вычислительных экспериментов

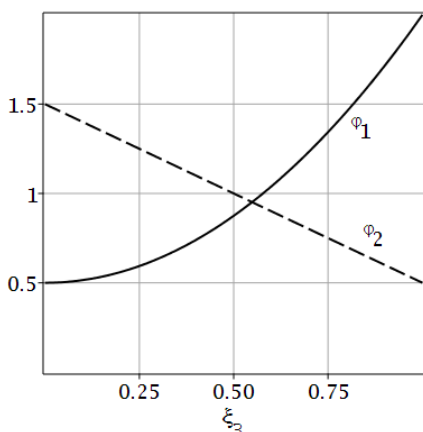


Рис. 1. Законы неоднородности полосы

Fig. 1. Band inhomogeneity laws

Ниже представлены некоторые результаты вычислительных экспериментов. Упругие модули полосы зависят от координаты ξ_3 :

$$C_{ij} = \varphi_k(\xi_3) c_{ij}, \quad k = 1, 2,$$

что при $\varphi(\xi_3) \equiv 1$ соответствует аустенитной стали со следующими значениями параметров $c_{11} = 2.036$, $c_{13} = 1.124$, $c_{33} = 1.674$. В качестве законов неоднородности полосы (рис. 1) рассмотрены:

- 1) квадратичные возрастающие $\varphi_1(\xi_3) = 1.5\xi_3^2 + 0.5$;
- 2) линейные убывающие $\varphi_2(\xi_3) = -\xi_3 + 1.5$.

Причем средние значения законов неоднородности равны

$$\int_0^1 \varphi_1(\xi_3) d\xi_3 = \int_0^1 \varphi_2(\xi_3) d\xi_3 = 1.$$



Решения задачи построены для различных конфигураций граничных элементов. Проведено сравнение значений контактного давления в общих для разных разбиений точках коллокации. Проведенный анализ показал сходимость вычислительной схемы при увеличении количества отрезков разбиения. Более эффективным является построение неравномерной сетки граничных элементов со сгущением вблизи границ области контакта.

На рис. 2, 3 представлены решения контактных задач для законов неоднородности 1 и 2. На рис. 2 кривые соответствуют различному количеству граничных элементов: кружочками обозначено решение для неравномерной сетки со сгущением вблизи границ области контакта при $N = 10$, остальные кривые соответствуют равномерному разбиению ($N = 10, 30, 90$). Распределение контактного давления для разных законов построено при одинаковом значении внедрения $\delta_* = 0.01$. Контактное давление достигает наибольшей величины для закона, имеющего большее значение на верхней границе полосы.

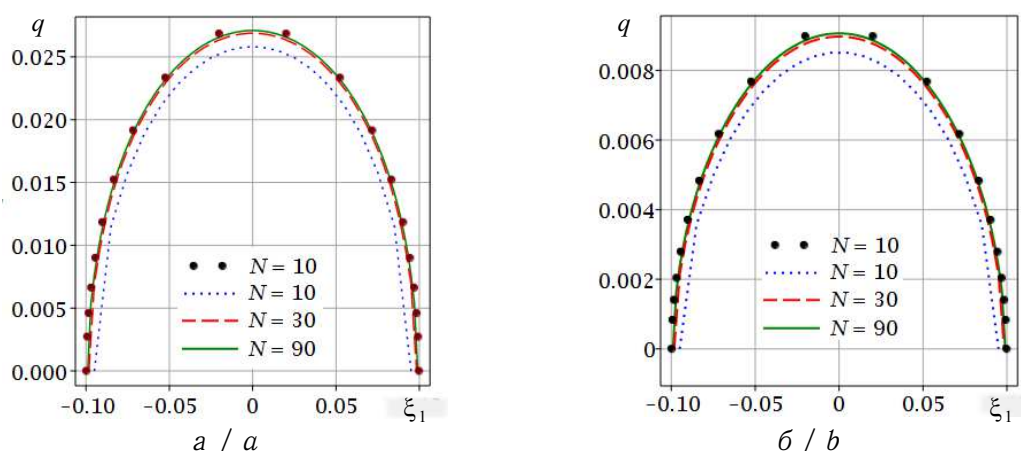


Рис. 2. Контактное давление под штампом: a — закон 1, b — закон 2 (цвет online)

Fig. 2. Contact pressure under the stamp: a is law 1, b is law 2 (color online)

На рис. 3 представлены результаты вычислительных экспериментов, построенные для штампа с основанием параболической формы $\gamma(\xi_1) = \xi_1^2/2r$ при значениях параметров: $r = 5$, $N = 30$, $l_n/l_1 = 0.01$, l_p — длина отрезка Δ_p .

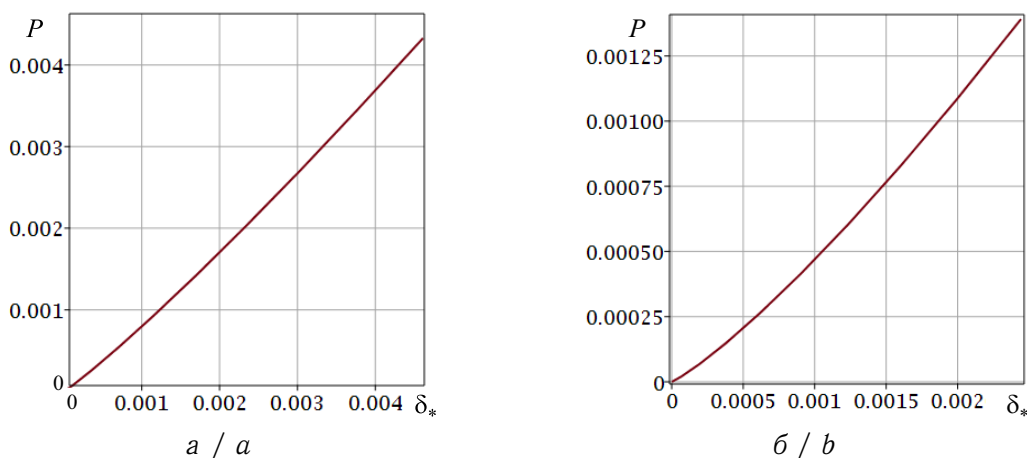


Рис. 3. Зависимость сила – внедрение: a — закон 1, b — закон 2

Fig. 3. The force – intrusion dependence: a is law 1, b is law 2



Заключение

Исследована контактная задача для функционально-градиентной ортотропной упругой полосы и штампа с гладким основанием. Проведен асимптотический анализ символа ядра интегрального уравнения контактной задачи при малых и больших значениях параметра преобразования. Показано, что значение символа ядра в нуле, характеризующее среднее значение контактного давления, определяется среднеинтегральным значением податливости полосы, а поведение на бесконечности, определяющее структуру контактного давления у границ области контакта, определяется значениями упругих модулей на верхней границе полосы. Представлена вычислительная схема решения интегрального уравнения контактной задачи, позволяющая исследовать задачи с переменной областью контакта, не прибегая к затратной схеме ее определения в расширенной области. Построены основные характеристики контактного взаимодействия для различных законов неоднородности.

Список литературы

1. Головин Ю. И. Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикробъемах, тонких поверхностных слоях и пленках // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, № 12. С. 2113–2142. EDN: RCRLTN
2. Epshtein S. A., Borodich F. M., Bull S. J. Evaluation of elastic modulus and hardness of highly inhomogeneous materials by nanoindentation // Applied Physics A. 2015. Vol. 119, iss. 1. P. 325–335. <https://doi.org/10.1007/s00339-014-8971-5>
3. Ворович И. И., Устинов Ю. А. О давлении штампа на слой конечной толщины // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 3. С. 445–455.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. Москва : Наука, 1974. 456 с.
5. Бабешко В. А. Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике // Доклады АН СССР. 1969. Т. 186, № 6. С. 1273–1276.
6. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины // Известия Академии наук СССР. Механика. 1965. № 2. С. 95–107.
7. Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконов А. В., Кренев Л. И., Трубчик И. С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. Москва : Физматлит, 2006. 240 с. EDN: OPWVHF
8. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва : Наука, 1983. 488 с.
9. Аргатов И. И. Асимптотические модели упругого контакта. Санкт-Петербург : Наука, 2005. 447 с. EDN: QJQFGH
10. Ватульян А. О., Плотников Д. К. Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы // Доклады Академии наук. 2019. Т. 485, № 5. С. 564–567. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524855564-567>
11. Ватульян А. О., Плотников Д. К., Поддубный А. А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 421–432. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>
12. Conway H. D., Vogel S. M., Farnham K. A., So S. Normal and shearing contact stresses in indented strip and slabs // International Journal of Engineering Science. 1966. Vol. 4, iss. 4. P. 343–359. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(66\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(66)90036-X)
13. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М., Селезнев Н. М., Леонтьева А. В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестник Пермского национального



- исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 4. С. 20–34. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>
14. *Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M.* Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Физика и механика материалов. 2018. Т. 35, вып. 1. С. 175–180. https://doi.org/10.18720/МРМ.3512018_20
 15. *Ватульян А. О., Плотников Д. К.* К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 3. С. 283–293. <https://doi.org/10.31857/S0032823521030103>
 16. *Ватульян А. О.* О действии жесткого штампа на анизотропное полупространство // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости / отв. ред. И. И. Ворович. Ростов-на-Дону : Изд-во Ростовского ун-та, 1983. С. 112–115. EDN: **XQUWZM**
 17. *Пожарский Д. А.* Контактная задача для ортотропного полупространства // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 3. С. 100–108. EDN: **YQQEKT**
 18. *Batra R. C., Jiang W.* Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer // International Journal of Solids and Structures. 2008. Vol. 45, iss. 22–23. P. 5814–5830. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.06.016>
 19. *Erbaş B., Yusufoglu E., Kaplunov J.* A plane contact problem for an elastic orthotropic strip // Journal of Engineering Mathematics. 2011. Vol. 70. P. 399–409. <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9422-8>
 20. *Greenwood J. A., Barber J. R.* Indentation of an elastic layer by a rigid cylinder // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49, iss. 21. P. 2962–2977. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.05.036>
 21. *Argatov I. I., Mishuris G. S., Paukshto M. V.* Cylindrical lateral depth-sensing indentation testing of thin anisotropic elastic films // European Journal of Mechanics — A/Solids. 2015. Vol. 49. P. 299–307. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.07.009>
 22. *Можаровский В. В., Кузьменков Д. С.* Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании // Проблемы физики, математики и техники. 2016. Вып. 4 (29). С. 74–82. EDN: **XEEKKX**
 23. *Можаровский В. В., Марьина Н. А., Кузьменков Д. С.* Реализация решения контактной задачи о вдавливании жесткого цилиндрического индентора в изотропную вязкоупругую полосу на ортотропном основании // Проблемы физики, математики и техники. 2018. Вып. 2 (35). С. 51–56. EDN: **XUFGCL**
 24. *Comez I., Yilmaz K. B., Guler M. A., Yildirim B.* On the plane frictional contact problem of a homogeneous orthotropic layer loaded by a rigid cylindrical stamp // Archive of Applied Mechanics. 2019. Vol. 89. P. 1403–1419. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01511-6>
 25. *Yilmaz K. B., Comez I., Guler M. A., Yildirim B.* The effect of orthotropic material gradation on the plane sliding frictional contact mechanics problem // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2019. Vol. 54, iss. 4. P. 254–275. <https://doi.org/10.1177/0309324719859110>
 26. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. Москва : Наука, 1989. 344 с.
 27. *Бахвалов Н. С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). Москва : Наука, 1975. 632 с.
 28. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, № 5 (77). С. 3–122.
 29. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. Москва : Мир, 1984. 244 с.



References

1. Golovin Yu. I. Nanoindentation and mechanical properties of solids in submicrovolumes, thin near-surface layers, and films: a review. *Physics of the Solid State*, 2008, vol. 50, iss. 12, pp. 2205–2236. <https://doi.org/10.1134/S1063783408120019>
2. Epshtein S. A., Borodich F. M., Bull S. J. Evaluation of elastic modulus and hardness of highly inhomogeneous materials by nanoindentation. *Applied Physics A*, 2015, vol. 119, iss. 1, pp. 325–335. <https://doi.org/10.1007/s00339-014-8971-5>
3. Vorovich I. I., Ustinov Iu. A. Pressure of a die on an elastic layer of finite thickness. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, iss. 3, pp. 637–650. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90158-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90158-3)
4. Vorovich I. I., Alexandrov V. M., Babeshko V. A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical Mixed Problems in Elasticity Theory]. Moscow, Nauka, 1974. 456 p. (in Russian).
5. Babeshko V. A. Asymptotic properties of the solutions of a class of integral equations occurring in elasticity theory and mathematical physics. *Soviet Physics. Doklady*, 1969, vol. 14, pp. 529–531.
6. Alexandrov V. M., Babeshko V. A. Contact problems for an elastic strip of small thickness. *Izv. USSR Academy of Sciences. Mechanics*, 1965, iss. 2, pp. 95–107 (in Russian).
7. Aizikovich S. M., Aleksandrov V. M., Belokon A. V., Krenev L. I., Trubchik I. S. *Kontaktnie zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnyh sred* [Contact Problems of Theory of Elasticity for Inhomogeneous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 240 p. (in Russian). EDN: [OPWVHF](https://doi.org/10.1134/S1028335819040074)
8. Alexandrov V. M., Mhitaryan S. M. *Kontaktnie zadachi dlya tel s tonkimi pokritiyami i podlozhkami* [Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Layers]. Moscow, Nauka, 1983. 488 p. (in Russian).
9. Argatov I. I. *Asimptoticheskie modeli uprugogo kontakta* [Asymptotic Models of Elastic Contact]. St. Petersburg, Nauka, 2005. 447 p. (in Russian). EDN: [QJQFGH](https://doi.org/10.1134/S1028335819040074)
10. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. A model of indentation for a functionally graded strip. *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, iss. 4, pp. 173–175. <https://doi.org/10.1134/S1028335819040074>
11. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K., Poddubny A. A. On some models of indentation for functionally-graded coatings. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 421–432 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>
12. Conway H. D., Vogel S. M., Farnham K. A., So S. Normal and shearing contact stresses in indented strip and slabs. *International Journal of Engineering Science*, 1966, vol. 4, iss. 4, pp. 343–359. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(66\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(66)90036-X)
13. Volkov S. S., Vasilev A. S., Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Leonteva A. V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20–34 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>
14. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 35, iss. 1, pp. 175–180. https://doi.org/10.18720/MPM.3512018_20
15. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. On a study of the contact problem for an inhomogeneous elastic strip. *Mechanics Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1379–1387. <https://doi.org/10.3103/S0025654421070268>
16. Vatulyan A. O. On the action of a rigid stamp on an anisotropic half-space. In: I. I. Vorovich (ed.) *Sticheskie i dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Static and Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory]. Rostov-on-Don, Rostov University Publ., 1983, pp. 112–115 (in Russian). EDN: [XQUWZM](https://doi.org/10.1134/S1028335819040074)



17. Pozharskii D. A. Contact problem for an orthotropic half-space. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, pp. 315–322. <https://doi.org/10.3103/S0025654417030086>
18. Batra R. C., Jiang W. Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, vol. 45, iss. 22–23, pp. 5814–5830. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.06.016>
19. Erbas B., Yusufoglu E., Kaplunov J. A plane contact problem for an elastic orthotropic strip. *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, vol. 70, pp. 399–409. <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9422-8>
20. Greenwood J. A., Barber J. R. Indentation of an elastic layer by a rigid cylinder. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, iss. 21, pp. 2962–2977. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.05.036>
21. Argatov I. I., Mishuris G. S., Paukshto M. V. Cylindrical lateral depth-sensing indentation testing of thin anisotropic elastic films. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2015, vol. 49, pp. 299–307. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.07.009>
22. Mozharovsky V. V., Kuzmenkov D. S. The technique for determining the parameters of a contact for indenter with the orthotropic coating on the elastic isotropic substrate. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2016, iss. 4 (29), pp. 74–82 (in Russian). EDN: XEEKKX
23. Mozharovsky V. V., Maryina N. A., Kuzmenkov D. S. Realization of solution of the contact problem on indentation of rigid cylindrical indenter in isotropic viscoelastic strip on the orthotropic basis. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, iss. 2 (35), pp. 51–56 (in Russian). EDN: XUFGCL
24. Comez I., Yilmaz K. B., Guler M. A., Yildirim B. On the plane frictional contact problem of a homogeneous orthotropic layer loaded by a rigid cylindrical stamp. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, vol. 89, pp. 1403–1419. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01511-6>
25. Yilmaz K. B., Comez I., Guler M. A., Yildirim B. The effect of orthotropic material gradation on the plane sliding frictional contact mechanics problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2019, vol. 54, iss. 4, pp. 254–275. <https://doi.org/10.1177/0309324719859110>
26. Babeshko V. A., Glushkov E. V., Zinchenko Zh. F. *Dinamika neodnorodnykh lineino-uprugikh sred* [Dynamics of Inhomogeneous Linearly Elastic Media]. Moscow, Nauka, 1989. 344 p. (in Russian).
27. Bakhvalov N. S. *Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nye uravneniia)* [Numerical Methods (Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations)]. Moscow, Nauka, 1975. 632 p. (in Russian).
28. Vishik M. I., Ljusternik L. A. Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, iss. 5 (77), pp. 3–122 (in Russian).
29. Benerdzhii P., Batterfield R. *Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh* [Boundary Element Methods in Applied Sciences]. Moscow, Mir, 1984. 244 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 06.06.2022

Принята к публикации / Accepted 05.08.2022

Опубликована / Published 30.11.2022