



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 494–505

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 494–505

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505>, EDN: KFJVBH

Научная статья

УДК 539.3

Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича)

А. Д. Тебякин, А. В. Крысько, М. В. Жигалов[✉], В. А. Крысько

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, д. 15

Тебякин Алексей Дмитриевич, младший научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, prototype9235@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6973-7065>

Крысько Антон Вадимович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, anton.krysko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, AuthorID: 357800

Жигалов Максим Викторович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, zhigalovm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>, AuthorID: 9130

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, tak@san.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, AuthorID: 3929

Аннотация. В работе построена математическая модель по деформационной теории пластичности исследования напряженно-деформированного состояния нанопластин Кирхгофа (наноэффекты учитываются по модифицированной моментной теории упругости). Разработан экономичный и корректный итерационный метод расчета напряженно-деформированного состояния нанопластин — метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича). По сравнению с методами Бубнова – Галеркина или Ритца он не требует задания системы аппроксимирующих функций, удовлетворяющих граничным условиям, так как на каждой итерации строит систему аппроксимирующих функций, которая вытекает из решения обыкновенного дифференциального уравнения после применения процедуры Канторовича. Корректность метода обеспечена теоремами сходимости метода переменных параметров упругости И. И. Воровича, Ю. П. Красовского и теоремами о сходимости метода вариационных итераций В. А. Крысько, В. Ф. Кириченко. Кроме того, достоверность решений для упругих нанопластин Кирхгофа, полученных с помощью метода вариационных итераций, обеспечивается сопоставлением с точным решением Навье и решениями по методам Бубнова – Галеркина в высших приближениях, конечных разностей и конечных элементов. С точки зрения затрат машинного времени разработанный метод и методология расчета упруго-пластического деформирования нанопластин Кирхгофа являются более эффективными по сравнению с методами Бубнова – Галеркина в высших приближениях, конечных разностей, Канторовича – Власова, Вайндинера и особенно с методом конечных элементов. В статье также проведено исследование влияния нанокoeffициента, типов зависимостей интенсивности деформаций — интенсивности напряжений на упругопластическое поведение нанопластины.



Ключевые слова: нанопластины, метод вариационных итераций, расширенный метод Канторовича, деформационная теория пластичности, метод переменных параметров упругости Биргера

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-11-00160).

Для цитирования: Тебякин А. Д., Крысько А. В., Жигалов М. В., Крысько В. А. Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 494–505. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505>, EDN: KFJVBH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method)

A. D. Tebyakin, A. V. Krysko, M. V. Zhigalov[✉], V. A. Krysko

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 15 Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia

Alexey D. Tebyakin, prototype9235@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6973-7065>

Anton V. Krysko, anton.krysko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, AuthorID: 357800

Maxim V. Zhigalov, zhigalovm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>, AuthorID: 9130

Vadim A. Krysko, tak@san.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, AuthorID: 3929

Abstract. In this paper, a mathematical model is constructed based on the deformation theory of plasticity for studying the stress-strain state of Kirchhoff nanoplates (nanoeffects are taken into account according to the modified moment theory of elasticity). An economical and correct iterative method for calculating the stress-strain state of nanoplates has been developed — the method of variational iterations (the extended Kantorovich method). The method of variational iterations (the extended Kantorovich method) has the advantage over the Bubnov – Galerkin or Ritz method in that it does not require specifying a system of approximating functions satisfying boundary conditions, because the method of variational iterations builds a system of approximating functions at each iteration, which follows from solving an ordinary differential equation after applying the Kantorovich procedure. The correctness of the method is ensured by the convergence theorems of the method of variable elasticity parameters by I. I. Vorovich, Yu. P. Krasovsky and the convergence theorems of the method of variational iterations by V. A. Krysko, V. F. Kirichenko. In addition, the reliability of the solutions for elastic Kirchhoff nanoplates obtained using the variational iteration method is ensured by comparison with the exact Navier solution and solutions using Bubnov – Galerkin methods in higher approximations, finite differences and finite elements. The developed method and the methodology for calculating elastic-plastic deformation of Kirchhoff nanoplates, which is based on this method, are effective in terms of machine time costs compared with the methods of Bubnov – Galerkin in higher approximations, finite differences, Kantorovich – Vlasov, Weindiner and especially finite elements. The influence of the nano coefficient, the types of dependences of strain intensity (stress intensity on the elastic-plastic behavior of the nanoplates) has been studied.

Keywords: nanoplates, variational iteration method, extended Kantorovich method, deformation theory of plasticity, Birger method of variable elasticity parameters



Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00160).

For citation: Tebyakin A. D., Krysko A. V., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method). *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 494–505 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505>, EDN: KFJVBH This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Тонкостенные пространственные конструкции применяют во многих областях авиа- и космической техники, приборостроения — при создании приборов с нанoelementами в виде пластин, которые часто подвергаются значительным статическим нагрузкам, приводящим к пластическим деформациям. Эксперименты [1] показывают зависимость результатов от наноразмера механической конструкции. При испытании на вдавливание жесткого индентора в нанопленку [2] обнаружили, что предел текучести увеличивается при уменьшении толщины пленки. Эти экспериментальные результаты привели к тому, что при математическом моделировании нанопластин появилась необходимость учитывать упруго-пластические деформации. В настоящее время имеется ряд математических теорий механики, учитывающих масштабные эффекты.

Исследование выпучивания упруго-пластической микропластины с помощью метода конечных элементов приведено в работе [3]. Авторы указали, что так как размер конечного элемента велик по сравнению с внутренней длиной — микроразмером, то результаты могут быть неточными. В научной литературе имеются публикации [4, 5], посвященные исследованию микропрямоугольных пластин, лежащих на упругом основании под действием как поперечной, так и продольной нагрузки, по теории течения. Решение проводится методом Рунге в одночленном приближении для получения аналитического решения. Исследуются коэффициенты упрочнения напряженно-деформированного состояния. В работах [6, 7] исследуется устойчивость кольцевых полноразмерных пластин. Решения получены в тригонометрических рядах. Можно утверждать, что решений, полученных для упруго-пластического изгиба пластинок с учетом наноэффектов, практически нет. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) для анализа упруго-пластического изгиба пластин с учетом наноэффектов не применялся, и настоящая работа является первой попыткой в этом направлении.

Остановимся на краткой истории появления этого метода. Упоминание об этом методе впервые относится к 1933 г. [8], и он был переоткрыт в 1964 г. [9]. Метод вариационных итераций в западноевропейской научной литературе получил название расширенного метода Канторовича [10–13]. Библиография работ по МВИ представлена в работе [14]. Обоснование этого метода для класса уравнений, описываемых положительно определенными операторами, дано в работе [15]. Этот метод использовался при решении контактных задач [16], контактных задач с учетом физической нелинейности и разномодульности материала [17], задач с учетом воздействия полей различной природы и пористости [18, 19]. Отметим, что эти исследования применялись для полноразмерных механических систем. Исследования упруго-пластического изгиба нанопластин только начинаются [3–7]. В данной работе этот метод впервые применен для исследования упруго-пластического изгиба нанопластин.



1. Постановка задачи

Рассмотрим изотропную однородную прямоугольную в плане нанопластину с размерами a, b, h вдоль осей x, y, z соответственно. Начало координат расположено в левом верхнем углу пластины в ее срединной поверхности, оси x, y параллельны сторонам пластины, ось z направлена вниз. В указанной системе координат пластина, как трехмерная область Ω , определяется: $\Omega = \{x, y, z : (x, y, z) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h/2, -h/2]\}$. Срединная поверхность при $z = 0$ обозначена как $\Gamma = \{x, y : (x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$.

В основу построенной математической модели положены следующие гипотезы:

- 1) кинематическая модель первого приближения — Кирхгофа [17];
- 2) материал, из которого изготовлена нанопластина считается изотропным, но неоднородным $E(x, y, z, e_i)$, $G(x, y, z, e_i)$, $K(x, y, z, e_i)$, $\nu(x, y, z, e_i)$, $\sigma_s(x, y, z, e_i)$;
- 3) наноэффекты учитываются с помощью модифицированной моментной теории упругости F. Yang [20];
- 4) используется критерий пластичности Мизеса [21].

Запасенная энергия деформации U в упругом теле при бесконечно малых деформациях

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \underline{m_{xx}\chi_{xx} + m_{yy}\chi_{yy} + m_{xy}\chi_{xy}}) d\Omega, \quad (1)$$

где первые три слагаемые относятся к классической теории упругости,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{Ez}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), & \sigma_{yy} &= \frac{Ez}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), & \sigma_{xy} &= \frac{Ez}{1+\nu}\varepsilon_{xy}, \\ \varepsilon_{xx} &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_{yy} &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \varepsilon_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \end{aligned}$$

а последние три — к теории упругости высшего порядка F. Yang [20],

$$\begin{aligned} m_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)}l^2\chi_{xx}, & m_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)}l^2\chi_{yy}, & m_{xy} &= \frac{E}{(1+\nu)}l^2\chi_{xy}, \\ \chi_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, & \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, & \chi_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \end{aligned}$$

Из вариации энергии деформации U (1) упруго-пластической нанопластины [17] получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \left[D_{20}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = q(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь

$$\begin{aligned} D_i(x, y) &= \int_{-h/2}^{h/2} E(x, y, z, e_i) \left(\frac{z^2 \nu^{i-1}(x, y, z, e_i)}{1 - \nu^2(x, y, z, e_i)} + \frac{l^2}{1 + \nu(x, y, z, e_i)} \right) dz, \quad i = 1, 2, \\ D_{20}(x, y) &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, y, z, e_i)(z^2 + l^2)}{1 + \nu(x, y, z, e_i)} dz, \end{aligned}$$

l — нанопараметр.



К уравнению (2) следует присоединить одно из краевых условий (3), (4):

1) защемление по контуру

$$w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0; \quad (3)$$

2) шарнирное опирание по контуру

$$w|_{\Gamma} = \frac{\partial w^2}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где n — нормаль к границе Γ . Уравнения приведены к безразмерному виду стандартным образом [14].

Исследование проводилось при действии равномерно-распределенной нагрузки: $q(x, y) = q$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Для моделирования упруго-пластического изгиба рассмотрены два типа зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Идеально упруго-пластическое тело Prandtl L [22]

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 3G_0 e_i, & e_i < e_s, \\ \sigma_i &= \sigma_s, & e_i \geq e_s, \end{aligned} \quad (5)$$

где G_0 — характерное значение модуля сдвига в недеформированном состоянии e_s , σ_s — предельные значения интенсивности деформаций и напряжений соответственно.

Диаграмма для чистого алюминия Ohashi [23]

$$\sigma_i = \sigma_s \left[1 - \exp\left(-\frac{e_i}{e_s}\right) \right]. \quad (6)$$

В работе исследована упруго-пластическая деформация стальной пластины (сталь ЭИ395 [24]) для двух значений констант материала ($M1$ и $M2$), приведенных в табл. 1, и двух зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$ — (5), (6).

Таблица 1 / Table 1

Физические константы стальной пластины для моделей $M1$ и $M2$

Physical constants of the steel plate for models $M1$ and $M2$

Модели	E , ГПа	ν	G , ГПа	e_s	σ_s , МПа	e_{si}	σ_{si} , МПа
$M1$	282.400	0.3	108.615	$2.5 \cdot 10^{-3}$	706	$2.213 \cdot 10^{-3}$	719.8
$M2$	226.087	0.3	94.322	$2.1 \cdot 10^{-3}$	515	$1.974 \cdot 10^{-3}$	514.948

2. Численный эксперимент

Численные исследования уравнения (2) с краевыми условиями (3), (4) проводятся методом вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) с зависимостями $\sigma_i(\varepsilon_i)$ (5), (6) с числовыми данными для констант материала стали ЭИ395 (см. табл. 1). Идея метода вариационных итераций изложена в работах [14–17]. На каждом шаге метода вариационных итераций осуществляется процедура метода переменных параметров упругости Биргера [25] — это внутренняя итерация. На шаге применения метода вариационных итераций обыкновенные дифференциальные уравнения сводятся методом конечных разностей второго порядка точности к системе алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона. Тем самым построен метод вложенных одна в другую итерационных процедур. Обоснование



сходимости метода переменных параметров упругости Биргера дано в работе [21], а метода вариационных итераций — в [15]. Это дает возможность утверждать, что построенный в настоящей работе метод вложенных одна в другую итерационных процедур расчета упруго-пластического изгиба нанопластин является корректным, и численный эксперимент, приведенный ниже, это подтверждает.

Важным вопросом исследования изгиба нанопластин является вопрос о достоверности получаемых результатов. С этой целью модифицированное уравнение Жермен – Лагранжа [14] (в уравнении Жермен – Лагранжа учтен наноэффект по модифицированной моментной теории упругости [20]) решалось методами Бубнова – Галеркина в высших приближениях, аппроксимирующая функция для

$$w(x, y) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \sin(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b),$$

удовлетворяющая краевым условиям (4), Канторовича – Власова [26, 27], Вайндинера [28], конечных разностей второго порядка точности и метода конечных элементов. Эти результаты приведены в таблице 19 работы [14].

В табл. 2 приведены решения, полученные аналитически и численно с указанием количества членов ряда в разложении функции $w(x, y)$, кроме того, получено точное решение модифицированного уравнения Жермен – Лагранжа — решение Навье.

Таблица 2 / Table 2

Сравнение значений прогиба $w(0.5; 0.5)$ упругой нанопластины Кирхгофа при решении модифицированного уравнения Жермен – Лагранжа методами [14] граничным условием (4) и равномерной распределенной нагрузкой $q = 7$

Comparison of deflection values $w(0.5; 0.5)$ of an elastic Kirchhoff nanoplate when solving the modified Germain – Lagrange equation by [14] boundary condition (4) and a uniformly distributed load $q = 7$

Методы	$l = 0$	$l = 0.5$
Метод Навье — точное решение	0.311	0.151
Метод Бубнова – Галеркина ($N = 5$)	0.311	0.153
Метод Канторовича – Власова, первое приближение	0.314	0.153
Метод Канторовича – Власова, второе приближение	0.312	0.152
Метод вариационных итераций, первое приближение	0.309	0.150
Метод Вайндинера, первое приближение	0.309	0.150
Метод конечных разностей 11×11 разбиений по $x \in [0; 1]$ и по $y \in [0; 1]$	0.310	0.151
Метод конечных элементов — треугольные элементы 350 элементов в области Ω	0.310	0.151
Метод конечных элементов — четырехугольные элементы 165 элементов в области Ω	0.310	0.151

Анализ этих результатов показывает, что метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) обладает высокой точностью. Встает вопрос об эффективности разработанной в настоящей работе метода исследования упруго-пластического изгиба нанопластин (решение уравнений (2)–(4)), т. е. количестве машинного времени для получения достоверного решения. В табл. 3 приводится время, необходимое для получения решения для одного шага нагружения. Решение уравнения (2) для граничных условий (3) проводится методами Бубнова – Галеркина и вариационных итераций.



Таблица 3 / Table 3

Время расчета решения системы (2), (3) для одного шага нагружения упруго-пластической нанопластины
 Calculation time of the solution of the system (2), (3) for one step of loading elastic-plastic nanoplate

Методы	Время, с
Метод Бубнова – Галеркина ($N = 3$)	0.517
Метод Бубнова – Галеркина ($N = 5$)	279.815
Метод вариационных итераций, первое приближение	0.017

Решение производилось на компьютере следующей конфигурации: процессор Intel Core i7 9750H 2.6 ГГц; оперативная память 8192 Мб, DDR4, 2666 МГц; графический процессор nVidia GeForce RTX 2060 – 6144 Мб. Алгоритм получения решения упруго-пластической задачи нанопластины тот же, что и при решении методом вариационных итераций. Полученные результаты позволили сделать вывод о том, что эффективность метода вариационных итераций выше, чем среди указанных в табл. 2 и 3 методов. Кроме того, исследовалось количество точек разбиения по плану и по толщине нанопластины упруго-пластических задач методом вариационных итераций для получения решения с относительной погрешностью $\varepsilon = 10^{-7}$ ($n_x \times n_y \times n_z = 30 \times 30 \times 15$).

Исследуем напряженно-деформированное состояние методом вариационных итераций нанопластин под действием поперечной равномерно-распределенной нагрузки для двух типов краевых условий (3) и (4), двух значений размерно-зависимых параметров ($l = 0$ – полноразмерная пластина и $l = 0.5$ – нанопластина) и для двух моделей $M1$ и $M2$. На рис. 1 приведены графики зависимости нагрузка–прогиб $q(w(0.5; 0.5))$ для двух типов граничных условий (3), (4), двух зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$, двух значений размерного параметра $l = 0, 0.5$ и двух моделей ($M1, M2$).

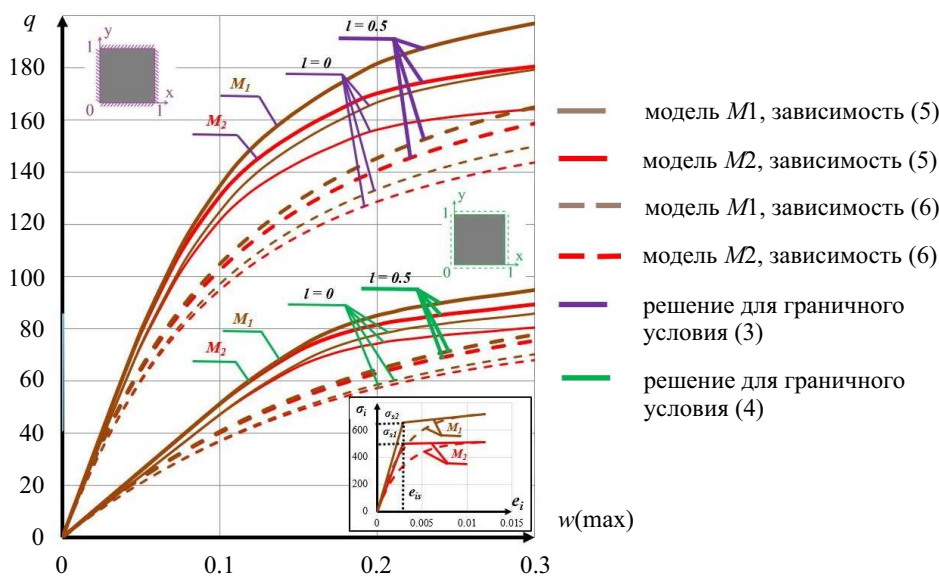


Рис. 1. Графики зависимостей $q(w(\max))$ упруго-пластической нанопластины Кирхгофа с граничными условиями (3), (4), полученные методом вариационных итераций для равномерно-распределенной нагрузки (цвет online)
 Fig. 1. Dependency graphs $q(w(\max))$ of an elastic-plastic Kirchhoff nanoplate with boundary conditions (3), (4) obtained by variational iteration method for uniformly distributed load (color online)



В правом нижнем углу рис. 1 приведена зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i)$ интенсивности напряжений от интенсивности деформации для двух моделей (M1 и M2). Учет размерно-зависимого параметра $l = 0.5$ приводит к существенному повышению несущей способности пластины по сравнению с полноразмерной пластиной $l = 0$. Аппроксимация зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$ существенно влияет на несущую способность пластины как для полноразмерного случая, так и для нанопластины. На рис. 2 приведены уруго-пластические деформации для равномерно-распределенной нагрузки при $q = 90$, для зашеченной по контуру пластины (3), в сечениях по толщине ($z = \pm 0.5; \pm 0.284; \pm 0.148$), а также линии равных интенсивностей деформаций по плану пластины.

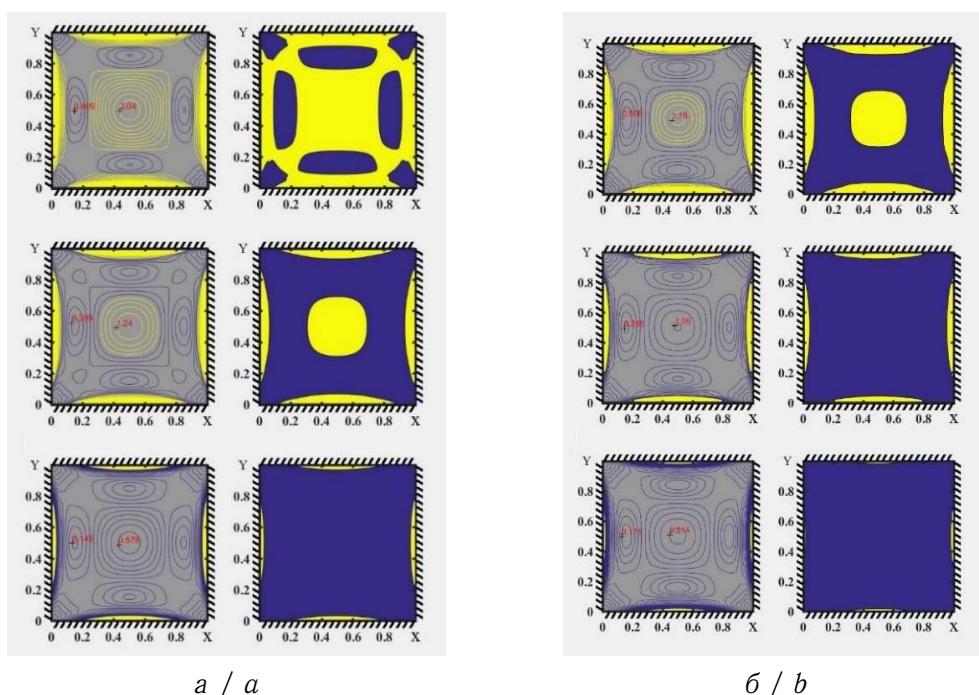


Рис. 2. Линии равных интенсивностей деформаций и зоны пластичности при $q = 90$ с граничными условиями (3) и равномерно-распределенной нагрузкой для зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$: а — тип зависимости (5); б — тип зависимости (6). Желтым цветом обозначены пластические деформации, синим цветом — уругие (цвет online)

Fig 2. Lines of equal strain intensities and plasticity zones at $q = 90$ with boundary conditions (3) and uniformly distributed load for dependencies $\sigma_i(\varepsilon_i)$: a showing dependency type (5); b showing dependency type (6). Plastic deformations are indicated in yellow, elastic deformations are indicated in blue (color online)

Сравнительный анализ линий интенсивностей деформаций и зон пластичности для экспоненциальной зависимости и зависимости с линейным уругнением показывает, что последняя имеет меньшие по размеру зоны пластичности. Это говорит о большой жесткости пластины, что подтверждают зависимости $q(w)$ на рис. 1. Увеличение значения нанокoeffициента l с 0 до 0.5 для первой модели не оказывает существенного влияния на величину зон пластичности, в отличие от второй модели, где отличия заметны. Такой же вывод можно сделать и по линиям равных интенсивностей деформации — отличие при $l = 0$ и $l = 0.5$ для $z = \pm 0.5$ в первой модели составляет 13.5%, а отличие для второй модели — 26.0%, т.е. различие увеличилось почти в два раза. Таким образом, как и для зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$ Prandtl [22] (5), пластина с учетом зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$ Ohashi [23] (6) имеет большую несущую способность.



Заключение

1. Построена математическая модель упруго-пластических нанопластин Кирхгофа по деформационной теории пластичности и модифицированной моментной теории упругости.

2. Создан эффективный метод исследования упруго-пластических деформаций нанопластин Кирхгофа. В основу метода положено сочетание нескольких эффективных и корректных итерационных процедур: метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича), метод переменных параметров упругости И. А. Биргера, метод Ньютона решения алгебраических систем уравнений.

3. Достоверность результатов подтверждена для упругих нанопластин Кирхгофа сравнением с точным решением Навье, Бубнова – Галеркина в высших приближениях, конечных разностей и конечных элементов. Для упруго-пластических задач нанопластин Кирхгофа достоверность результатов подтверждена сравнением с решениями, полученными методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях, в сочетании с методом переменных параметров упругости, разработанным авторами.

4. Анализ упруго-пластических деформаций показал, что результаты существенно зависят от типа аппроксимации $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Пластина с линейным упрочнением (5) имеет большую несущую способность, чем пластина с зависимостью Ohashi (6). Увеличение значения нанокoeffициента также увеличивает несущую способность нанопластины.

Список литературы

1. Kiener D., Motz C., Schobert T., Jenko M., Dehm G. Determination of mechanical properties of copper at the micron scale // *Advanced Engineering Materials*. 2006. Vol. 8, iss. 11. P. 1119–1125. <https://doi.org/10.1002/adem.200600129>
2. Huber N., Nix W., Gao H. Identification of elastic-plastic material parameters from pyramidal indentation of thin films // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2002. Vol. 458. P. 1593–1620. <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0927>
3. Ristinmaa M., Vecchi M. Use of couple-stress theory in elasto-plasticity // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 136, iss. 3–4. P. 205–224. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(96\)00996-6](https://doi.org/10.1016/0045-7825(96)00996-6)
4. Darvishvand A., Zajkani A. Strain gradient micromechanical modeling of substrate-supported crystalline microplates subjected to permanent in-plane and out-of-plane tractions // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2021. Iss. 7. P. 969–985. <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1705167>
5. Darvishvand A., Zajkani A. Comparative modeling of power hardening micro-scale metallic plates based on lower and higher-order strain gradient plasticity theories // *Metals and Materials International*. 2021. Vol. 27, iss. 6. P. 1392–1402. <https://doi.org/10.1007/s12540-019-00524-8>
6. Tun M. A. Plastic buckling of moderately thick annular plates // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2005. Vol. 5, iss. 3. P. 337–357. <https://doi.org/10.1142/S0219455405001611>
7. Lanzoni L., Radi E., Nobili A. Ultimate carrying capacity of elastic-plastic plates on a Pasternak foundation // *Journal of Applied Mechanics*. 2014. Vol. 81, iss. 5. 051013-1. <https://doi.org/10.1115/1.4026190>
8. Schunck T. E. Zur Knickfestigkeit schwach gekrümmter zylindrischer Schalen // *Ingenieur-Archiv*. 1933. Bd. 4. S. 394–414. <https://doi.org/10.1007/BF02081563>
9. Жуков Е. Е. Вариационный прием последовательных приближений к расчету тонких прямоугольных плит // *Расчет тонкостенных пространственных конструкций* / под ред. А. П. Ржаницына. Москва : Стройиздат, 1964. С. 27–35.



10. Kerr A. D. An extended Kantorovich method for solution of eigenvalue problem // International Journal of Solids and Structures. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 559–572. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90028-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90028-6)
11. Yuan S., Jin Y. Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method // Composite Structures. 1998. Vol. 66, iss. 6. P. 861–867. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(97\)00111-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00111-9)
12. Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M. Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions — a semi analytical approach // Composite Structures. 2008. Vol. 82, iss. 4. P. 521–537. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.02.003>
13. Eisenberger M., Shufrin I. The extended Kantorovich method for vibration analysis of plates // Analysis and Design of Plated Structures / eds. by N. E. Shanmugam, Chieng Ming Wang. Cambridge : Woodhead Publishing, 2007. Vol. 1. Stability. P. 192–218. <https://doi.org/10.1533/9781845692292.192>
14. Awrejcewicz J., Krysko-jr. V. A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: from macro to nano-structural dynamics // Archives of Computational Methods in Engineering. 2021. Vol. 28. P. 4781–4813. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09550-5>
15. Кириченко В. Ф., Крысько В. А. Метод вариационных итераций в теории пластин и его обоснование // Прикладная механика. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 71–76.
16. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Krysko V. A. On the contact interaction between two rectangular plates // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 85. P. 2729–2748. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2858-2>
17. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Zhigalov M. V., Krysko A. V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical non-linearity // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 91. P. 1191–1211. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6>
18. Awrejcewicz J., Krysko-jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. Vol. 146. 104162. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>
19. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Smirnov A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field // Meccanica. 2022. Vol. 57. P. 1591–1616. <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01515-7>
20. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
21. Ворович И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 126, вып. 4. С. 740–743.
22. Prandtl L. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper // ZAMM: Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik. 1928. Bd. 8, Ht. 2. S. 85–106. <https://doi.org/10.1002/zamm.19280080202>
23. Ohashi Y., Murakami S. The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate // Applied Mechanics / ed. H. Görtler. Berlin, Heidelberg : Springer, 1966. Vol. 1. P. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25
24. Температурный коэффициент линейного расширения стали // Thermalinfo. URL: <http://thermalinfo.ru/svoystva-materialov/metally-i-splavy/temperaturnyj-koeffitsient-linejnogo-rasshireniya-stali> (дата обращения: 03.08.2022).
25. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1951. Т. 15, вып. 6. С. 765–770.



26. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Москва : Физматгиз, 1962. 708 с.
27. Власов В. В. Общая теория оболочек. Москва : Гостехиздат, 1949. 784 с.
28. Вайндинер А. И. Об одной новой форме рядов Фурье и выборе наилучших полиномов Фурье // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, вып. 1. С. 177–185. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25

References

1. Kiener D., Motz C., Schobert T., Jenko M., Dehm G. Determination of mechanical properties of copper at the micron scale. *Advanced Engineering Materials*, 2006, vol. 8, iss. 11, pp. 1119–1125. <https://doi.org/10.1002/adem.200600129>
2. Huber N., Nix W., Gao H. Identification of elastic-plastic material parameters from pyramidal indentation of thin films. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2002, vol. 458, pp. 1593–1620. <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0927>
3. Ristinmaa M., Vecchi M. Use of couple-stress theory in elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, vol. 136, iss. 3–4, pp. 205–224. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(96\)00996-6](https://doi.org/10.1016/0045-7825(96)00996-6)
4. Darvishvand A., Zajkani A. Strain gradient micromechanical modeling of substrate-supported crystalline microplates subjected to permanent in-plane and out-of-plane tractions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2021, iss. 7, pp. 969–985. <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1705167>
5. Darvishvand A., Zajkani A. Comparative modeling of power hardening micro-scale metallic plates based on lower and higher-order strain gradient plasticity theories. *Metals and Materials International*, 2021, vol. 27, iss. 6, pp. 1392–1402. <https://doi.org/10.1007/s12540-019-00524-8>
6. Tun M. A. Plastic buckling of moderately thick annular plates. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2005, vol. 5, iss. 3, pp. 337–357. <https://doi.org/10.1142/S0219455405001611>
7. Lanzoni L., Radi E., Nobili A. Ultimate carrying capacity of elastic-plastic plates on a Pasternak foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, vol. 81, iss. 5, 051013-1. <https://doi.org/10.1115/1.4026190>
8. Schunck T. E. Zur Knickfestigkeit schwach gekrümmter zylindrischer Schalen. *Ingenieur-Archiv*, 1933, vol. 4, pp. 394–414 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF02081563>
9. Zhukov E. E. Variational method of successive approximations to the calculation of thin rectangular plates. In: A. P. Rzhanitsyn (ed.) *Raschet tonkostennykh prostranstvennykh konstruktsiy* [Calculation of Thin-Walled Spatial Structures]. Moscow, Stroyizdat, 1964, pp. 27–35 (in Russian).
10. Kerr A. D. An extended Kantorovich method for solution of eigenvalue problem. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 559–572. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90028-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90028-6)
11. Yuan S., Jin Y. Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method. *Composite Structures*, 1998, vol. 66, iss. 6, pp. 861–867. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(97\)00111-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00111-9)
12. Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M. Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions — a semi analytical approach. *Composite Structures*, 2008, vol. 82, iss. 4, pp. 521–537. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.02.003>
13. Eisenberger M., Shufrin I. The extended Kantorovich method for vibration analysis of plates. In: N. E. Shanmugam, Chieng Ming Wang (eds.) *Analysis and Design of Plated Structures*. Cambridge : Woodhead Publ., 2007. Vol. 1. Stability, pp. 192–218. <https://doi.org/10.1533/9781845692292.192>



14. Awrejcewicz J., Krysko-jr. V. A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: from macro to nano-structural dynamics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021, vol. 28, pp. 4781–4813. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09550-5>
15. Kirichenko V. F., Krysko V. A. Method of variational iterations in the theory of plates and its substantiation. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics], 1981, vol. 17, iss. 4, pp. 71–76 (in Russian).
16. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Krysko V. A. On the contact interaction between two rectangular plates. *Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 85, pp. 2729–2748. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2858-2>
17. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Zhigalov M. V., Krysko A. V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical non-linearity. *Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 91, pp. 1191–1211. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6>
18. Awrejcewicz J., Krysko-jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, vol. 146, 104162. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>
19. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Smirnov A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field. *Meccanica*, 2022, vol. 57, pp. 1591–1616. <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01515-7>
20. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
21. Vorovich I. I., Krasovsky Yu. P. On the method of elastic solutions. *Doklady Mathematics*, 1959, vol. 126, iss. 4, pp. 740–743 (in Russian).
22. Prandtl L. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. *ZAMM: Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 1928, vol. 8, iss. 2, pp. 85–106 (in German). <https://doi.org/10.1002/zamm.19280080202>
23. Ohashi Y., Murakami S. The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate. In: H. Görtler (ed.) *Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966. Vol. 1, pp. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25
24. Temperature coefficient of linear expansion of steel. *Thermalinfo*. Available at: <http://thermalinfo.ru/svoystva-materialov/metally-i-splavy/temperaturnyj-koefitsient-linejnogo-rasshireniya-stali> (accessed 3 August 2022) (in Russian).
25. Birger I. A. Some general methods for solving problems in the theory of plasticity. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1951, vol. 15, iss. 6, pp. 765–770 (in Russian).
26. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 708 p. (in Russian).
27. Vlasov V. V. *Obshchaia teoriya obolochek* [General Shell Theory]. Moscow, Gostekhizdat, 1949. 784 p. (in Russian).
28. Weindiner A. I. On a new form of Fourier series and the choice of the best Fourier polynomials. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1967, vol. 7, iss. 1, pp. 240–251. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(67\)90076-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90076-6)

Поступила в редакцию / Received 08.08.2022

Принята к публикации / Accepted 08.09.2022

Опубликована / Published 30.11.2022