МАТЕМАТИКА

Научный отдел

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 142–156
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 142–156
mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-142-156
EDN: YKNUUN

Научная статья
УДК 517.51

Об оценках порядка наилучших M-членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Зигмунда

Г. Акишев

Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Казахстан, 100008, г. Астана, ул. Кажымукана, д. 11

Акишев Габдолла, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, akishev_g@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8336-6192, AuthorID: 194028

Аннотация. В статье рассматриваются анизотропное пространство Лоренца – Караматы периодических функций многих переменных и класс Никольского – Бесова в этом пространстве. Установлены точные по порядку оценки наилучших M-членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского – Бесова по норме другого пространства Лоренца – Зигмунда.

Ключевые слова: пространство Лоренца – Зигмунда, класс Никольского – Бесова, M-членное приближение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP 08855579).

Для цитирования: *Акишев Г.* Об оценках порядка наилучших M-членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Зигмунда // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 142–156. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-142-156, EDN: YKNUUN

Article

On estimates of the order of the best M-term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space

G. Akishev

Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, 11 Kazhymukan St., Astana 100008, Kazakhstan

Gabdolla Akishev, akishev_g@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8336-6192, AuthorID: 194028

Abstract. The article considers the anisotropic Lorentz – Karamata space of periodic functions of several variables and the Nikol'skii – Besov class in this space. The order-sharp estimates are established for the best M-term trigonometric approximations of functions from the Nikol'skii-Besov class in the norm of another Lorentz – Zygmund space.

Keywords: Lorentz – Zygmund space, Nikol'skii – Besov class, M-term approximation

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project AP 08855579).

For citation: Akishev G. On estimates of the order of the best M-term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 142–156 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-142-156, EDN: YKNUUN

Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{I}^m = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \leqslant x_j < 1;\ j = 1, \ldots, m\} = [0,1)^m$ — m-мерный куб; $\mathbb{Z}_+^m$ — декартово произведение из m множеств $\mathbb{Z}_+$.

Пусть даны числа $p, \tau \in (1, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Пространством Лоренца – Зигмунда $L_{p,\tau}(\log L)^{\alpha}(\mathbb{T})$ называется множество всех измеримых по Лебегу и 2π периодических функций f, для которых (см., например, [1])

$$\|f\|_{p,\alpha,\tau} := \left\{ \int_0^1 (f^*(t))^{\tau} (1 + |\log_2 t|)^{\alpha\tau} t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}} < +\infty,$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi x)|$, $x \in [0,1)$, $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$.

Пространство Лоренца – Зигмунда иногда обозначается как $L_{p,\alpha,\tau}(\mathbb{T})$. Будем пользоваться именно этим обозначением.

Отметим, что для $\alpha = 0$ пространство $L_{p,\alpha,\tau}(\mathbb{T})$ совпадает с пространством Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T})$, $1 < p, \tau < \infty$, которое состоит из всех функций f таких, что (см., например, [2, гл. 1, п. 3])

$$\|f\|_{p,\tau}^* := \left(\int_0^1 f^{*^{\tau}}(t) t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right)^{1/\tau} < \infty.$$

Пусть $\overline{p} = (p_1, \dots p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \dots \tau_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots \alpha_m)$ и $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$. Через $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца – Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f, имеющих период 2π по каждой переменной и для которых конечна величина

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} := \| \dots \| f^{*_1,\dots,*_m} \|_{p_1,\alpha_1,\tau_1} \dots \|_{p_m,\alpha_m,\tau_m} =$$

$$= \left[\int_0^1 \left[\dots \left[\int_0^1 (f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m))^{\tau_1} \left(\prod_{j=1}^m (1+|\log_2 t_j|)^{\alpha_j} t_j^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{\tau_j}} \right)^{\tau_1} dt_1 \right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{1}{\tau_m}},$$

где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0,1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [3, 4]).

Для $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m$ пространство $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ является анизотропным пространством Лоренца и обозначается $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, а его норма $\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} = \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\tau}}$ (см. [3]).

Если $\alpha_j = 0$ и $p_j = \tau_j = p$, $j = 1, \dots, m$, то $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) = L_p(\mathbb{T}^m)$ — известное пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{I}^m} |f(2\pi\overline{x})|^q d\overline{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Введем следующие обозначения: $\mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех функций $f \in L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, m;$$

$a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \overline{n},\overline{x}\rangle}\}$;

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) := \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle \overline{y}, \overline{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$, $\rho(\overline{s}) := \left\{ \overline{k} = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ [2^{s_j-1}] \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, \ j = 1,\dots,m \right\}$, $[a]$ — целая часть числа a и $s_j = 0, 1, \dots$

В теории функций хорошо известно $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ — пространство Никольского – Бесова в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p < \infty$ и его различные обобщения [5–7].

В данной статье рассматривается аналог класса Никольского – Бесова в анизотропном пространстве Лоренца – Зигмунда:

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B := \left\{ f \in \mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \ \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} + \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} \right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant 1 \right\},$$

где $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1,\dots,\tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_m)$, $\overline{r} = (r_1,\dots,r_m)$, $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $0 < \theta_j \leqslant +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,m$, норма $l_{\overline{\theta}}$ числовых последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}$ имеет вид

$$\left\| \{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} = \left(\sum_{n_m\in\mathbb{Z}} \left(\dots \left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} |a_{\overline{n}}|^{\theta_1} \right)^{\theta_2/\theta_1} \dots \right)^{\theta_m/\theta_{m-1}} \right)^{1/\theta_m}.$$

Наилучшим M-членным тригонометрическим приближением функции $f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ называется величина [8]

$$\|f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \overline{k^j}, \overline{x}\rangle}\|^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}},$$

где $\{\overline{k^j}\}_{j=1}^{M}$ — система векторов $\overline{k}^j = (k_1^j, \ldots, k_m^j)$ с целочисленными координатами, b_j — действительные или комплексные числа.

Положим

$$e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}} := \sup_{f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B} e_M(f)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}},$$

где $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\overline{\tau}^{(i)} = (\tau_1^{(i)}, \ldots, \tau_m^{(i)})$ и $1 < q_j, \tau_j^{(i)} < \infty$, $i = 1, 2$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$.

Оценкам порядка наилучших M-членных тригонометрических приближений функций из классов Соболева W_p^r, Никольского – Бесова $S^r_{p,\theta}B$, Лизоркина – Трибеля в пространстве $L_q(\mathbb{T}^m)$ к настоящему времени посвящено большое количество исследований Р. С. Исмагилова, Э. С. Белинского [9], Ю. Маковоза, В. Е. Майорова, Р. Девора, В. Н. Темлякова [10–12], А. С. Романюка [13], М. Хансена и У. Зикеля, С. А. Стасюка, Д. Б. Базарханова [14, 15] (более подробно см. библиографию в [8]).

Оценки наилучших M-членных приближений функций класса Никольского – Бесова в пространствах Лоренца и Лебега с анизотропными нормами исследованы в [16, 17].

Основная цель статьи — найти точный порядок величины $e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}$.

Через $C(p, q, y, \ldots)$ обозначим положительные величины, которые зависят от указанных параметров и отличаются для разных формул. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 A(y)$. Для краткости записи вместо $B \geqslant C_1 A$ или $B \leqslant C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Запись $\log y$ означает логарифм с основанием 2 от числа $y > 0$.

1. Вспомогательные утверждения

В данном разделе приведем несколько лемм, необходимых для доказательства основных результатов статьи.

Лемма 1 ([18]). *Пусть $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ и $0 < \gamma_j' \leqslant \gamma_j$, $0 < \theta_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$ и $\alpha \in (0, \infty)$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha\langle \overline{s}, \overline{\gamma}\rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j + 1)^{\lambda_j} \right\}_{\overline{s} \in Y^m(n, \overline{\gamma}')} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \ll 2^{-n\alpha\delta} n^{\sum\limits_{j \in A} \lambda_j + \sum\limits_{j \in A\setminus\{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\delta = \min\{\frac{\gamma_j}{\gamma_j'} : j = 1, \ldots, m\}$, $A = \{j : \frac{\gamma_j}{\gamma_j'} = \delta,\ j = 1, \ldots, m\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$ и числа $\lambda_j \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$\min\left\{ \sum_{j \in A\setminus\{j'\}} \lambda_j + \sum_{j \in A\setminus\{j_1\}} \frac{1}{\theta_j},\ \lambda_{j'} + \frac{1}{\theta_j'} \right\} > 0, \quad j' = \max\{j \in A\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\kappa > 0$, $0 < \theta_j < \infty$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ *и* $\overline{\gamma}' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m)$, $\overline{\tilde{\gamma}}' = (\tilde{\gamma}'_1, \ldots, \tilde{\gamma}'_m)$, $\gamma'_j = \tilde{\gamma}'_j = 1$ *для* $j \in A$ *и* $\tilde{\gamma}'_j < \gamma'_j$ *для* $j \notin A$. *Тогда*

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa\langle \overline{s}, \overline{\tilde{\gamma}}\rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j+1)^{\lambda_j} \right\}_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle < n} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \ll 2^{n\kappa} n^{\sum\limits_{j\in A} \lambda_j + \sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

при условии

$$\min\left\{ \sum_{j\in A\setminus\{j'\}} \lambda_j + \sum_{j\in A\setminus\{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}, \quad \lambda_{j'} + \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\Omega_{n,\overline{\gamma}'} = \{\overline{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \ \langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle < n\} = \bigcup_{l=1}^{n} \omega_l,$$

где $\omega_l = \{\overline{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \ l-1 \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle < l\}$, $\omega_l \cap \omega_k = \varnothing$, $k \neq l$.

Пусть $\chi_{\Omega_{n,\overline{\gamma}'}}$ и χ_{ω_l} — характеристические функции множеств $\Omega_{n,\overline{\gamma}'}$ и ω_l соответственно. Тогда

$$\chi_{\Omega_{n,\overline{\gamma}'}}(\overline{s}) = \sum_{l=1}^{n} \chi_{\omega_l}(\overline{s}).$$

Поэтому согласно свойству нормы имеем

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa\langle \overline{s}, \overline{\tilde{\gamma}}\rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j+1)^{\lambda_j} \right\}_{\overline{s}\in\Omega_{n,\overline{\gamma}'}} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} = \left\| \left\{ \sum_{l=1}^{n} 2^{\kappa\langle \overline{s}, \overline{\tilde{\gamma}}\rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j+1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\overline{s}) \right\}_{\overline{s}\in\bigcup_{l=1}^{n}\omega_l} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=1}^{n} \left\| \left\{ 2^{\kappa\langle \overline{s}, \overline{\tilde{\gamma}}\rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j+1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\overline{s}) \right\}_{\overline{s}\in\omega_l} \right\|_{l_{\overline{\theta}}}. \qquad (1)$$

Обозначим $\overline{\delta} = 2\overline{\gamma}' - \overline{\tilde{\gamma}}$. Тогда $\delta_j = \gamma'_j = 1$, $j \in A$ и $\delta_j > \gamma'_j$ для $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus A$. Поэтому

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa\langle \overline{s}, \overline{\tilde{\gamma}}\rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j+1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\overline{s}) \right\}_{\overline{s}\in\omega_l} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant 2^{2l\kappa} \left\| \left\{ 2^{-\kappa\langle \overline{s}, \overline{\delta}\rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j+1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\overline{s}) \right\}_{\overline{s}\in\omega_l} \right\|_{l_{\overline{\theta}}}. \qquad (2)$$

Теперь, пользуясь леммой 1 из неравенств (1) и (2), получим утверждение леммы. □

Замечание 1. В случае $\theta_1 = \ldots = \theta_m = \theta$ и $A = \{1, \ldots \nu\}$ лемма 2 ранее доказана в [10, лемма Г].

2. Основные результаты

Теорема. *Пусть* $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\overline{\tau}^{(1)} = (\tau^{(1)}_1, \ldots, \tau^{(1)}_m)$, $\overline{\tau}^{(2)} = (\tau^{(2)}_1, \ldots, \tau^{(2)}_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ *и* $1 < p_j < 2 < q_j < +\infty$, $1 < \tau^{(2)}_j \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $1 < \tau^{(1)}_j < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \beta_j < \infty$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $j = 1, \ldots, m$ *и* $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, \ldots, m\}$, $A = \min\Big\{j : r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} = r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}},$

$j=1,\ldots,m\Big\}$, $j_1=\min\{j\in A\}$ *и* $\left(\frac{1}{p_j}-r_j\right)\frac{1}{q_{j_0}}<\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\frac{1}{q_j}$, $j\notin A$. *Тогда справедлива оценка*

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\right)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}\ll$$

$$\ll M^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}(\log M)^{q_{j_0}\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\theta_j}\right)}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)}$$

для натурального числа $M>M_0>1$ *при условиях:*

а) $2<\tau_j^{(2)}\leqslant\theta_j\leqslant\infty$ *и*

$$\min\left\{\sum_{j\in A\setminus\{j'\}}(\beta_j-\alpha_j)+\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\right),\ \beta_{j'}-\alpha_{j'}+\frac{1}{\tau_{j'}^{(2)}}-\frac{1}{\theta_{j'}}\right\}>0, \tag{3}$$

$$\min\left\{\sum_{j\in A\setminus\{j'\}}(\beta_j-\alpha_j)+\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j}\right),\ \beta_{j'}-\alpha_{j'}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_{j'}}\right\}>0; \tag{4}$$

б) для $1<\tau_j^{(2)}\leqslant\theta_j\leqslant 2$ *при условии* (3), *где* $j'=\max\{j\in A\}$ *и* $a_+=\max\{a,0\}$.

Доказательство. Пусть $f\in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$. Для произвольного натурального числа M найдется натуральное число n такое, что $M\asymp 2^n n^{|A|-1}$. Приближающий полином $P(\Omega_M,\overline{x})$ будем искать в виде

$$P(\Omega_M,\overline{x})=\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma'}\rangle<n}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})+\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}P(\Omega_{N_{\overline{s}}},\overline{x}), \tag{5}$$

где $\overline{\gamma}'=(\gamma_1',\ldots,\gamma_m')$, $\gamma_j'=\gamma_j=1$ для $j\in A$ и $1<\gamma_j'<\gamma_j$, $j\notin A$, $\gamma_j=\dfrac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}}$, $j=1,\ldots,m$.

Полиномы $P(\Omega_{N_{\overline{s}}},\overline{x})$ будут построены для каждого блока $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})$ согласно [9, лемма 2.3], а число $\alpha>1$ выбрано в процессе построения.

Предположим, что искомый полином построен. Тогда в силу равенства (5) и свойства нормы получим

$$\|f-P(\Omega_M)\|^*_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}\leqslant\left\|\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}(\delta_{\overline{s}}(f)-P(\Omega_{N_{\overline{s}}}))\right\|^*_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}+\left\|\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant\alpha n}\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^*_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}=$$

$$=J_1(f)+J_2(f). \tag{6}$$

Так как полином $\sum\limits_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}(\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})-P(\Omega_{N_{\overline{s}}},\overline{x}))$ — непрерывная функция, то она принадлежит пространству $L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$, $q_0=\max\{q_1,\ldots,q_m\}$ и

$$J_1(f)\ll\left\|\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}(\delta_{\overline{s}}(f)-P(\Omega_{N_{\overline{s}}}))\right\|_{q_0}. \tag{7}$$

Так как $q_j\in(2,+\infty)$, $j=1,\ldots,m$, то $q_0\in(2,+\infty)$. Поэтому согласно теореме Литтлвуда – Пэли в пространстве Лебега (см. [5, гл. I, п. 1.5.2]) и [9, лемма 2.3] оценку (7) продолжим в следующем виде:

$$J_1(f) \ll \left(\sum_{n \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < \alpha n} \| \delta_{\overline{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\overline{s}}}) \|_{q_0}^2 \right)^{1/2} \ll \left(\sum_{n \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\overline{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j} \| \delta_{\overline{s}}(f) \|_2^2 \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Оценим $J_2(f)$. Пользуясь [19, теорема 3], получим

$$J_2(f) \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} (s_j + 1)^{\beta_j - \alpha_j} \| \delta_{\overline{s}}(f) \|_{\overline{p}, \overline{\alpha}, \overline{\tau}^{(1)}}^{*} \right\}_{\overline{s} \in Y^m(\alpha n, \overline{\gamma}')} \right\|_{l_{\overline{\tau}^{(2)}}} = C J_3(f), \tag{9}$$

где $Y^m(\alpha n, \overline{\gamma}') = \left\{ \overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle \geqslant \alpha n \right\}$.

Оценим $J_3(f)$. Пусть $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда, применяя неравенство Гельдера с показателями $\eta_j = \frac{\theta_j}{\tau_j^{(2)}} > 1$, $\frac{1}{\eta_j} + \frac{1}{\eta_j'} = 1$, $j = 1, \ldots, m$ и леммой 1 при $\lambda_j = \beta_j - \alpha_j$, $j = 1, \ldots, m$, будем иметь

$$J_3(f) \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\overline{s}}(f) \|_{\overline{p}, \overline{\alpha}, \overline{\tau}^{(1)}}^{*} \right\}_{\overline{s} \in Y^m(\alpha n, \overline{\gamma}')} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ 2^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} \prod_{j=1}^{m} (s_j + 1)^{\beta_j - \alpha_j} \right\}_{\overline{s} \in Y^m(\alpha n, \overline{\gamma}')} \right\|_{l_{\overline{\epsilon}}} \ll$$

$$\ll 2^{-\alpha n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} (n+1)^{\sum\limits_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} \tag{10}$$

для любой функции $f \in S_{\overline{p}, \overline{\alpha}, \overline{\tau}^{(1)}, \overline{\theta}}^{\overline{r}} B$, где $\overline{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)$, $\epsilon_j = \tau_j^{(2)} \eta_j'$, $j = 1, \ldots, m$ при условии

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{\in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right), \; \beta_{j'} - \alpha_{j'} + \frac{1}{\tau_{j'}^{(2)}} - \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0. \tag{11}$$

Теперь из неравенств (9), (10) следует, что

$$J_2(f) \ll 2^{-\alpha n (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} (n+1)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu} (\beta_j - \alpha_j) + \sum\limits_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)_+} \tag{12}$$

для любой функции $f \in S_{\overline{p}, \overline{\alpha}, \overline{\tau}^{(1)}, \overline{\theta}}^{\overline{r}} B$, при условии (11) для $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, m$.

В силу условия $0 \leqslant \beta_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$ справедливо неравенство

$$\| \delta_{\overline{s}}(f) \|_2 \ll \| \delta_{\overline{s}}(f) \|_{2, \overline{\beta}, 2}^{*}. \tag{13}$$

Так как $1 < p_j < 2$, $j = 1, \ldots, m$, то из [19, теоремы 2] следует, что

$$\| \delta_{\overline{s}}(f) \|_{2, \overline{\beta}, 2}^{*} \ll \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{2} \right)} (s_j + 1)^{\beta_j - \alpha_j} \| \delta_{\overline{s}}(f) \|_{\overline{p}, \overline{\alpha}, \overline{\tau}^{(1)}}^{*} \tag{14}$$

для $\beta_j, \alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Из неравенств (13) и (14) следует, что

$$\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 \ll \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2}\right)}(s_j+1)^{\beta_j-\alpha_j}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}} \tag{15}$$

для $0 \leqslant \beta_j < \infty$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Используя неравенство (15) из (8), получим

$$J_1(f) \ll \left(\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} N_{\overline{s}}^{-1}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\frac{2}{p_j}}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}})^2\right)^{1/2}, \tag{16}$$

если $0 \leqslant \beta_j < \infty$ и $1 < \tau_j^{(2)} < \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, m$. Положим

$$N_{\overline{s}} = \left[2^n 2^{\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\langle\overline{s},\overline{\tilde{\gamma}}\rangle} 2^{-\alpha n\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}\right] + 1,$$

где координаты вектора $\overline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_m)$ удовлетворяют соотношениям $\gamma_j' = \tilde{\gamma}_j$ для $j \in A$ и $1 < \tilde{\gamma}_j < \gamma_j'$ для $j \notin A$. По [10, лемма Г] нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} N_{\overline{s}} \ll 2^n n^{\nu-1} \ll M.$$

Теперь, подставив значения чисел $N_{\overline{s}}$ из (16), получим

$$J_1(f) \ll \Bigg\{2^{-n}2^{\alpha n\left(\frac{1}{p_1}-r_1\right)} \sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{-\left(\frac{1}{p_1}-r_1\right)\langle\overline{s},\overline{\tilde{\gamma}}\rangle}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\frac{2}{p_j}}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^2\Bigg\}^{1/2}. \tag{17}$$

Так как $\left(\frac{1}{p_j} - r_j\right)\frac{1}{q_{j_0}} < \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right)\frac{1}{q_j}$, $j \notin A$, то

$$\frac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}} < \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}} = \gamma_j, \quad j \notin A.$$

Поэтому выберем числа γ_j' и $\tilde{\gamma}_j$ так, чтобы $\dfrac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}} < \tilde{\gamma}_j < \gamma_j' < \gamma_j$, $j \notin A$. Тогда

$$2^{-\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\langle\overline{s},\overline{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\frac{2}{p_j}} \leqslant 2^{\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\langle\overline{s},\overline{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j 2r_j}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{-\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\langle\overline{s},\overline{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\frac{2}{p_j}}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\left(\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} 2^{\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\langle\bar{s},\bar{\bar{\gamma}}\rangle} \prod_{j=1}^{m}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\left(\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_j}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)}}\right)^2. \tag{18}$$

Если $2<\theta_j\leqslant+\infty$, $j=1,\ldots,m$, то, применяя неравенство Гельдера $\Big(\eta_j=\frac{\theta_j}{2}$, $\eta'_j=\frac{\theta_j}{\theta_j-2}$, $j=1,\ldots,m\Big)$ к сумме в правой части (18), будем иметь

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{-(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0})\langle\bar{s},\bar{\bar{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)}}\right)^2\ll$$

$$\ll\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{\bar{\gamma}}\rangle\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}\prod_{j=1}^{m}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n}\right\|_{l_{\bar{\eta}'}}. \tag{19}$$

Далее, по лемме 2 при $\theta_j=\eta'_j$ и $\lambda_j=\beta_j-\alpha_j$, $j=1,\ldots,m$ будем иметь

$$\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{\bar{\gamma}}\rangle\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}\prod_{j=1}^{m}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n}\right\|_{l_{\bar{\eta}'}}\ll 2^{n\left(\frac{1}{p_1}-r_1\right)\alpha}(n+1)^{2\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j}} \tag{20}$$

при условии

$$\min\left\{2\sum_{j\in A\setminus\{j'\}}(\beta_j-\alpha_j)+\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j},\ 2(\beta_{j'}-\alpha_{j'})+\frac{1}{\eta'_{j'}}\right\}>0.$$

Теперь из неравенств (19) и (20) следует, что

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n} 2^{-\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\langle\bar{s},\bar{\bar{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)}}\right)^2\ll$$

$$\ll 2^{n\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\alpha}(n+1)^{2\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j}}\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|^2_{l_{\bar{\theta}}} \tag{21}$$

при условии

$$\min\left\{2\sum_{j\in A\setminus\{j'\}}(\beta_j-\alpha_j)+\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j},\ 2(\beta_{j'}-\alpha_{j'})+\frac{1}{\eta'_{j'}}\right\}>0.$$

Далее, из неравенств (17) и (21) получим

$$J_1(f)\ll\left(2^{-n}2^{\alpha n\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}2^{n\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\alpha}(n+1)^{2\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j}}\right)^{1/2} \tag{22}$$

для любой функции $f\in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}B$ при условии

$$\min\left\{2\sum_{j\in A\setminus\{j'\}}(\beta_j-\alpha_j)+\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j},\ 2(\beta_{j'}-\alpha_{j'})+\frac{1}{\eta'_{j'}}\right\}>0,$$

если $0\leqslant\beta_j<\infty$ и $1<\tau_j^{(2)}<\infty$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $1<\tau_j^{(1)}<\infty$, $j=1,\ldots,m$.

В оценке $J_2(f)$ число α выбрано в следующем виде:

$$\alpha=\frac{q_{j_0}}{2}-q_{j_0}\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)\frac{\log n}{n}.$$

Тогда

$$n\alpha=n\frac{q_{j_0}}{2}-q_{j_0}\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)\log n.$$

Следовательно,

$$2^{-n\alpha\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}(n+1)^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\right)}=$$

$$=2^{-n\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{j_0}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}n^{\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)}(n+1)^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\right)}=$$

$$=\left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}n^{\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)}\times$$

$$\times(n+1)^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\right)}. \tag{23}$$

Поэтому из неравенства (12) получим

$$J_2(f)\ll\left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}n^{\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)}\times$$

$$\times(n+1)^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\right)}=$$

$$=\left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}n^{\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)}n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\theta_j}\right)} \tag{24}$$

при условии (11) для $1<\tau_j^{(2)}<\theta_j\leqslant\infty$, $j=1,\ldots,m$.

Далее

$$2^{n\alpha\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}=2^{n\frac{q_{j_0}}{2}\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}n^{-q_{j_0}\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)}.$$

Поэтому из неравенства (22) следует, что

$$J_1(f)\ll 2^{n\frac{q_{j_0}}{2}\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}n^{-q_{j_0}\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)}2^{-\frac{n}{2}}n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j}\right)}=$$

$$=C\left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}n^{\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)}\times$$

$$\times n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\theta_j}\right)} \tag{25}$$

для любой функции $f\in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$ при условиях $2<\theta_j<\infty$, $1<\tau_j^{(2)}\leqslant\theta_j\leqslant\infty$ и (4), $0\leqslant\beta_j<\infty$ и $1<\tau_j^{(2)}<\infty$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $1<\tau_j^{(1)}<\infty$, $j=1,\ldots,m$.

Теперь из неравенств (6), (24), (25) следует, что

$$\|f-P(\Omega_M)\|^*_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}\ll$$

$$\ll \left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} n^{\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)} n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\theta_j}\right)} \qquad (26)$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$, в случае $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $2<\theta_j\leqslant\infty$, $1<\tau_j^{(2)}\leqslant\theta_j\leqslant\infty$, $j=1,\dots,m$ при условиях (3) и (4), если $0\leqslant\beta_j<\infty$ и $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $1<\tau_j^{(1)}<\infty$, $j=1,\dots,m$. Поэтому из оценки (26) следует, что

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\right)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}} \ll \left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\times$$
$$\times n^{\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)} n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\theta_j}\right)},$$

в случае $1<p_j<2<q_j<\infty$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}$, $1<\tau_j^{(2)}\leqslant\theta_j\leqslant\infty$, $2<\theta_j\leqslant\infty$, $0\leqslant\beta_j<\infty$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $1<\tau_j^{(1)}<\infty$, $j=1,\dots,m$ при условиях (3) и (4).

Рассмотрим случай $1\leqslant\theta_j\leqslant 2$. Через e_j обозначим множество всех $s_j\in\mathbb{Z}_+$, для которых $(s_1,\dots,s_j,\dots,s_m)\in Y^m(n,\alpha n,\overline{\gamma}')$ при всех фиксированных s_k, $k\neq j$ и $P_k=e_1\times\ldots\times e_k$, положим

$$G_k(f,n)_{\overline{\theta}_k} = \left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}}\right\}_{\overline{s}_k\in P_k}\right\|_{\overline{\theta}_k},$$

где $\overline{s}_k=(s_1,\dots,s_k),\overline{\tau}_k=(\theta_1,\dots,\theta_k)$. Рассмотрим числа

$$N_{\overline{s}} = \left[2^{n\alpha\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}2^n n^{|A|-1}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^{\theta_1}\prod_{k=1}^{m-1}G_k^{\theta_{k+1}-\theta_k}(f,n)_{\overline{\theta}_k}\right]+1, \qquad (27)$$

где $[y]$ — целая часть числа $y>0$. Тогда, учитывая, что $r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}<0$, будем иметь

$$\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}N_{\overline{s}}\leqslant n^m+2^{n\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}2^n n^{|A|-1}\times$$
$$\times\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\left(2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^{\theta_1}\prod_{k=1}^{m-1}G_k^{\theta_{k+1}-\theta_k}(f,n)_{\overline{\theta}_k}\leqslant$$
$$\leqslant n^m+2^n n^{|A|-1}\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}}\right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}\ll 2^n n^{|A|-1}\ll M. \qquad (28)$$

Подставляя значения чисел $N_{\overline{s}}$ из (27) в (16), будем иметь

$$J_1(f)\ll\left(2^{n\alpha\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}2^n n^{|A|-1}\right)^{-1/2}\left(\sum_{n\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle<\alpha n}\left(2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)}}\right)^{2-\theta_1}2^{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)}\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{k=1}^{m-1}G_k^{\theta_k-\theta_{k+1}}(f,n)_{\overline{\theta}_k}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}(s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2}\right)^{1/2}. \qquad (29)$$

Далее, применяя неравенство Гельдера при $\eta_j = \theta_j(2-\theta_j) > 1$, $1/\eta_j + 1/\eta'_j = 1$, $j = 1,\dots,m$, из (29) получим

$$J_1(f) \ll \left(2^{n\alpha\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} 2^n n^{|A|-1}\right)^{-1/2} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)}} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{\frac{2-\theta_m}{2}} \times$$
$$\times \left\| \left\{ \chi_{Y^m(n,n\alpha,\bar{\gamma}')}(\bar{s}) 2^{\langle \bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle \left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)} \prod_{j=1}^m (s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\eta}'}}^{1/2}, \tag{30}$$

где $\chi_{Y^m(n,n\alpha,\bar{\gamma}')}(\bar{s})$ — характеристическая функция множества $Y^m(n,n\alpha,\bar{\gamma}')$, $\bar{\eta}' = (\eta'_1,\dots,\eta'_m)$.

Так как $\tilde{\gamma}_j = \gamma'_j = 1$, $j \in A$ и $\tilde{\gamma}_j < \gamma'_j$, $j \notin A$, то согласно лемме 2 при $\theta_j = \eta_j$, $j = 1,\dots,m$ и $\kappa = \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} > 0$ имеем

$$\left\| \left\{ \chi_{Y^m(n,n\alpha,\bar{\gamma}')}(\bar{s}) 2^{\langle \bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle \left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)} \prod_{j=1}^m (s_j+1)^{(\beta_j-\alpha_j)2} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\eta}'}} \ll$$
$$\ll 2^{n\alpha\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)} n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)2 + \sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j}} \tag{31}$$

при условии

$$\min\left\{ \sum_{j\in A\setminus\{j'\}} (\beta_j-\alpha_j)2 + \sum_{j\in A\setminus\{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}, \quad (\beta_{j'}-\alpha_{j'})2 + \frac{1}{\eta'_{j'}} \right\} > 0.$$

Теперь из неравенств (30), (31), учитывая определение числа α, получим

$$J_1(f) \ll \left(2^{n\alpha\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} 2^n n^{|A|-1}\right)^{-1/2} \left(2^{n\alpha\left(\frac{1}{p_{j_0}}-r_{j_0}\right)} n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)2 + \sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\eta'_j})}\right)^{1/2} =$$
$$= C\left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} n^{\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)} \times$$
$$\times n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j) + \sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\theta_j}\right)} \tag{32}$$

для любой функции $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}B$, в случае $1 < \tau_j^{(2)} \leqslant \theta_j \leqslant 2$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $0 \leqslant \beta_j < \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,m$ при условии

$$\min\left\{ \sum_{j\in A\setminus\{j'\}} (\beta_j-\alpha_j) + \sum_{j\in A\setminus\{j_1\}} \left(1-\frac{1}{\theta_j}\right),\ \beta_{j'}-\alpha_{j'}+1-\frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0. \tag{33}$$

Теперь из неравенств (6), (24) и (32) следует, что

$$e_M\left(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}B\right)_{\bar{q},\bar{\beta},\bar{\tau}^{(2)}} \ll \left(2^n n^{|A|-1}\right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} \times$$

$$\times n^{\left(r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)q_{j_0}\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right)} n^{\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(1-\frac{1}{\theta_j}\right)}$$

в случае $1 < \tau_j^{(2)} \leqslant \theta_j \leqslant 2$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $0 \leqslant \beta_j < \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ при условии (3).

Отметим, что из условия (3) следует (33). $\square$

Замечание 2. В случае $\alpha_j = \beta_j = 0$ и $p_j = \tau_j^{(1)} = p$, $q_j = \tau_j^{(2)} = q$, $\theta_j = \theta$ для $j = 1, \ldots, m$ из доказанной теоремы следуют ранее известные результаты В. Н. Темлякова [10, теорема 2.2, с. 92] и А. С. Романюка [13, теорема 2.1]. Случай $\alpha_j = \beta_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$ доказан в [16].

Оценки $e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\right)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}$ в случае $1 < p_j < q_j \leqslant 2$, $j = 1, \ldots, m$ следуют из теоремы в [20]. В случае $\alpha_j = \beta_j = 0$ для $j = 1, \ldots, m$ точность оценки доказана в [16], а для $\alpha_j, \beta_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$ она будет опубликована позже. Оценка величины $e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}$ в случае $1 \leqslant \theta_j \leqslant \tau_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, m$ будет изучена в будущем.

Список литературы

1. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. Orlando : Academic Press, 1988. 469 p.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва : Мир, 1974. 333 с.
3. *Blozinski A. P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Transactions of the American Mathematical Society. 1981. Vol. 263, № 1. P. 149–167. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1981-0590417-X
4. *Kolyada V. I.* On embedding theorems // Nonlinear Analysis, Function spaces and Applic. Praha : Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 2007. P. 35–94. URL: http://dml.cz/dmlcz/702492 (дата обращения: 20.02.2022).
5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1977. 456 с.
6. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата : Наука, 1976. 224 с.
7. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1989. Т. 187. С. 143–161.
8. *Dũng D., Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic Cross Approximation. Basel ; Berlin : Springer, 2018. 229 p. (Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona).
9. *Белинский Э. С.* Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных / отв. ред. Ю. А. Брудный. Ярославль : Ярославский гос. ун-т, 1988. С. 16–33.
10. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 3–113.
11. *Темляков В. Н.* Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Математический сборник. 2015. Т. 206, вып. 11. С. 131–160. https://doi.org/10.4213/sm8466
12. *Temlyakov V. N.* Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // Constructive Approximation. 2017. Vol. 45, iss. 3. P. 467–495. https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3
13. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100. https://doi.org/10.4213/im427

14. *Bazarkhanov D. B., Temlyakov V. N.* Nonlinear tensor product approximation of functions // Journal of Complexity. 2015. Vol. 31, iss. 6. P. 867–884. https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.005
15. *Базарханов Д. Б.* Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2016. Т. 293. С. 8–42. https://doi.org/10.1134/S0371968516020023, EDN: WEMXBH
16. *Акишев Г. А.* О точности оценок наилучшего M-членного приближения класса Бесова // Сибирские электронные математические известия. 2010. Т. 7. С. 255–274.
17. *Акишев Г.* О порядках M-членного приближения классов в пространстве Лоренца // Математический журнал. Алматы. 2011. Т. 11, № 1. С. 5–29.
18. *Akishev G.* On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space. arXiv: 2106.07188v2 [mathCA] 14 Jun 2021. 20 p.
19. *Akishev G.* Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space. arXiv: 2105.14810v1 [mathCA] 31 May 2021. 18 p.
20. *Акишев Г.* Об оценках порядка наилучших M-членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Карамата // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 13–16. EDN: XCSQXT

References

1. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of Operators*. Orlando, Academic Press, 1988. 469 p.
2. Stein E. M., Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton, Princeton University Press, 1971. 312 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1974. 333 p.).
3. Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 263, no. 1, pp. 149–167. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1981-0590417-X
4. Kolyada V. I. On embedding theorems. In: *Nonlinear Analysis, Function spaces and Applic*. Praha, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 2007, pp. 35–94. Available at: http://dml.cz/dmlcz/702492 (accessed February 20, 2022).
5. Nikol'skii S. M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniia* [Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems]. Moscow, Nauka, 1977. 456 p. (in Russian).
6. Amanov T. I. *Prostranstva differentsiruemykh funktsiy s dominiruyushchey smeshannoy proizvodnoy* [Spaces of Differentiable Functions with a Dominant Mixed Derivative]. Alma-Ata, Nauka, 1976. 224 p. (in Russian).
7. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
8. Dũng D., Temlyakov V. N., Ullrich T. *Hyperbolic Cross Approximation*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Basel, Berlin, Springer, 2018. 229 p.
9. Belinskii E. S. Approximation by a “floating” system of exponentials on the classes of smooth periodic functions with bounded mixed derivative. In: Brudnyi Yu. A. (ed.) *Research on the Theory of Functions of Many Real Variables*. Yaroslavl, Yaroslavl State University Publ., 1988, pp. 16–33 (in Russian).
10. Temlyakov V. N. Approximations of functions with bounded mixed derivative. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
11. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, iss. 11, pp. 1628–1656. https://doi.org/10.1070/SM2015v206n11ABEH004507
12. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with

small mixed smoothness. *Constructive Approximation*, 2017, vol. 45, iss. 3, pp. 467–495. https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3
13. Romanyuk A. S. Best M-term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, iss. 2, pp. 265–302. https://doi.org/10.1070/IM2003v067n02ABEH000427
14. Bazarkhanov D. B., Temlyakov V. N. Nonlinear tensor product approximation of functions. *Journal of Complexity*, 2015, vol. 31, iss. 6, pp. 867–884. https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.005
15. Bazarkhanov D. B. Nonlinear trigonometric approximations of multivariate function classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, pp. 2–36. https://doi.org/10.1134/S0081543816040027
16. Akishev G. A. On the exact estimations of the best M-terms approximation of the Besov class. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2010, vol. 7, pp. 255–274 (in Russian).
17. Akishev G. On the order of the M-term approximation classes in Lorentz spaces. *Matematical Journal. Almaty*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 5–29 (in Russian).
18. Akishev G. *On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space*. arXiv: 2106.07188v2 [mathCA] 14 Jun 2021. 20 p.
19. Akishev G. *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space*. arXiv: 2105.14810v1 [mathCA] 31 May 2021. 18 p.
20. Akishev G. On estimates of the order of the best M-term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Karamata space. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*: Materials of the 21st International Saratov (Saratov, January 31 – February 4, 2022). Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 13–16 (in Russian). EDN: XCSQXT

Поступила в редакцию / Received 24.02.2022
Принята к публикации / Accepted 01.11.2022
Опубликована / Published 31.05.2023