



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 207–226

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 207–226

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-207-226>, EDN: XMXZRM

Научная статья

УДК 517.98

Пассивное демпфирование колебаний цилиндрической оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью

С. В. Лекомцев, В. П. Матвеев, А. Н. Сенин[✉]

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Россия, 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1

Лекомцев Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, lekomtsev@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

Матвеев Валерий Павлович, доктор технических наук, академик РАН, заведующий отделом, mvp@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

Сенин Александр Николаевич, младший научный сотрудник, senin.a@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7537-0001>, AuthorID: 1030284

Аннотация. Оценена возможность пассивного демпфирования колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью. Механизм основан на шунтировании закреплённого на поверхности конструкции разомкнутого пьезоэлектрического кольца внешней электрической цепью, состоящей из последовательно соединённых сопротивления и катушки индуктивности. Выбор их оптимальных величин осуществлён численно с использованием разработанного конечно-элементного алгоритма. Предложенный подход основан на решении серии модальных задач. Он позволяет получить более высокие показатели демпфирования, чем традиционно используемые для этой цели аналитические выражения, и приводит к наименьшей разнице между собственными частотами колебаний конструкции и электрической цепи. При моделировании пространственной оболочки её криволинейная поверхность аппроксимируется совокупностью плоских сегментов. В каждом из них выполняются соотношения теории слоистых пластин и уравнения линейной теории пьезоупругости, записанные для случая плоского напряжённого состояния. Данный подход позволяет оставить в векторах напряжённости электрического поля и электрической индукции отличными от нуля только компоненты, нормальные к электродированной поверхности пьезокольца. Основные соотношения, описывающие безвихревую динамику идеальной сжимаемой жидкости в случае малых возмущений, формулируются в терминах потенциала возмущения скорости. Соответствующее волновое уравнение записывается в связанной с конструкцией системе координат и совместно с условием непроницаемости и граничными условиями преобразуется к слабой форме методом Бубнова – Галёркина. В работе проанализировано изменение комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от сопротивления и индуктивности последовательной электрической цепи. Проведено сравнение различных способов вычисления её оптимальных параметров. Построены амплитудно-частотные характеристики, демонстрирующие снижение амплитуды вынужденных гармонических колебаний при заданной скорости течения жидкости.



Ключевые слова: пассивное демпфирование колебаний, пьезоэлектрическое кольцо, электрическая цепь, цилиндрическая оболочка, текущая жидкость, метод конечных элементов

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10054).

Для цитирования: Лekomтцев С. В., Матвеевко В. П., Сенин А. Н. Пассивное демпфирование колебаний цилиндрической оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 207–226. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-207-226>, EDN: XMXZRM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Passive damping of vibrations of a cylindrical shell interacting with a flowing fluid

S. V. Lekomtsev, V. P. Matveenko, A. N. Senin[✉]

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 1 Academician Korolev St., Perm 614013, Russia

Sergey V. Lekomtsev, lekomtsev@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

Valerii P. Matveenko, mvp@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

Alexander N. Senin, senin.a@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7537-0001>, AuthorID: 1030284

Abstract. The possibility of passive damping of vibrations of a thin-walled cylindrical shell interacting with a flowing fluid is evaluated. The mechanism is based on connecting the open piezoelectric ring fixed on the surface of the structure to an external shunt electric circuit consisting of series-connected resistance and inductance coil. Their optimal values were selected numerically using the developed finite-element algorithm. The proposed approach is based on solving a series of modal problems. It allows us to obtain higher damping ratios compared to those evaluated by the commonly used analytical expressions and leads to the smallest difference in the natural frequencies of the structure and the electric circuit. In modeling a spatial shell, its curvilinear surface is approximated by a set of flat segments. Each of them is supposed to comply with the relations of the theory of multilayer plates and the equations of linear theory of piezoelectricity written for the case of plane stress state. With this approach, in the vectors of electric field and electric induction it is possible to keep nonzero only such components that are normal to the electroded surface of the piezoelectric ring. The constitutive relations, describing the vortex-free dynamics of an ideal compressible fluid in the case of small perturbations, are formulated in terms of the perturbation velocity potential. The corresponding wave equation is written in the coordinate system associated with the structure and is transformed together with the impermeability condition and boundary conditions to a weak form using the Bubnov – Galerkin method. The paper analyzes the variation of the complex eigenvalues of an electromechanical system depending on the values of resistance and inductance of a series electric circuit. Different methods for calculating the optimal parameters of the system are compared. The frequency response curves demonstrating a decrease in the amplitude of forced harmonic vibrations at a given fluid flow velocity are obtained.



Keywords: passive vibrations damping, piezoelectric ring, electric circuit, cylindrical shell, flowing fluid, finite element method

Acknowledgements: The study was supported by the grant of the Russian Scientific Foundation (project No. 18-71-10054).

For citation: Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Passive damping of vibrations of a cylindrical shell interacting with a flowing fluid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 207–226 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-207-226>, EDN: XMXZRM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Техника пассивного демпфирования колебаний конструкции за счёт прикрепления к ней пьезоэлемента и соединения его электродированных поверхностей с внешней электрической цепью, обладающей импедансом, известна достаточно давно [1]. В настоящее время такой подход нашёл широкое практическое применение благодаря возможности осуществлять управление динамическим поведением объектов, находящихся в труднодоступных местах, ограниченном пространстве или под водой.

Известно, что можно добиться существенного снижения амплитуды резонанса или увеличения скорости затухания свободных колебаний за счёт подбора номинальных значений различных элементов электрической цепи [1–8]. Обзор работ по этой тематике представлен в публикациях [9–11] и книге [12]. Отдельно отметим статьи [13–19], в которых рассматриваются вопросы пассивного подавления шума подводных объектов или колебаний конструкций, взаимодействующих с жидкостью. В большинстве из этих работ выбор параметров электрической цепи, обеспечивающих наилучшее демпфирование заданной моды колебаний конструкции, осуществляется с помощью аналитических выражений, предложенных в [1]. Из приведённых выше публикаций только в [17] исследуется конструкция, взаимодействующая с текущей жидкостью. В данной статье рассматривается подводная подъёмная поверхность в виде консольно-закреплённой прямоугольной пластины. Экспериментально показано, что её собственные частоты колебаний слабо зависят от скорости жидкости (числа Рейнольдса), текущей в поперечном направлении. Это позволило использовать в теоретических расчётах аналитические выражения [1], а в конечно-элементных — модель неподвижной акустической среды. Тем не менее, полученные результаты продемонстрировали возможность пассивного демпфирования колебаний пластины, функционирующей в таких условиях. Однако применимость используемого подхода в случае зависимости собственных частот колебаний конструкции от скорости течения жидкости или при наличии в системе механизма сильного гидродинамического демпфирования не обсуждается. В связи с этим актуальным является разработка инструмента для подбора параметров пассивной электрической цепи, обеспечивающих подавление резонансных колебаний тонкостенной конструкции, взаимодействующей с текущей жидкостью.

С целью проведения детального исследования в этой области предлагается использовать апробированную ранее методологию и подход [20] в комбинации с эффективным конечно-элементным алгоритмом, представленным в данной работе.

1. Основные соотношения

Рассматривается пространственная тонкостенная цилиндрическая оболочка, на внешней поверхности которой расположено P поляризованных в направлении толщины (ось \bar{z}) пьезоэлектрических разомкнутых колец. Внутренняя поверхность конструкции взаимодействует с жидкостью, текущей со скоростью U в направлении оси Ox (рис. 1, а). К каждому k -му пьезокольцу ($k = 1, 2, \dots, P$) через электродированные поверхности подключена собственная электрическая цепь, состоящая из последовательно соединённых резистора сопротивления R_k и катушки индуктивности L_k .

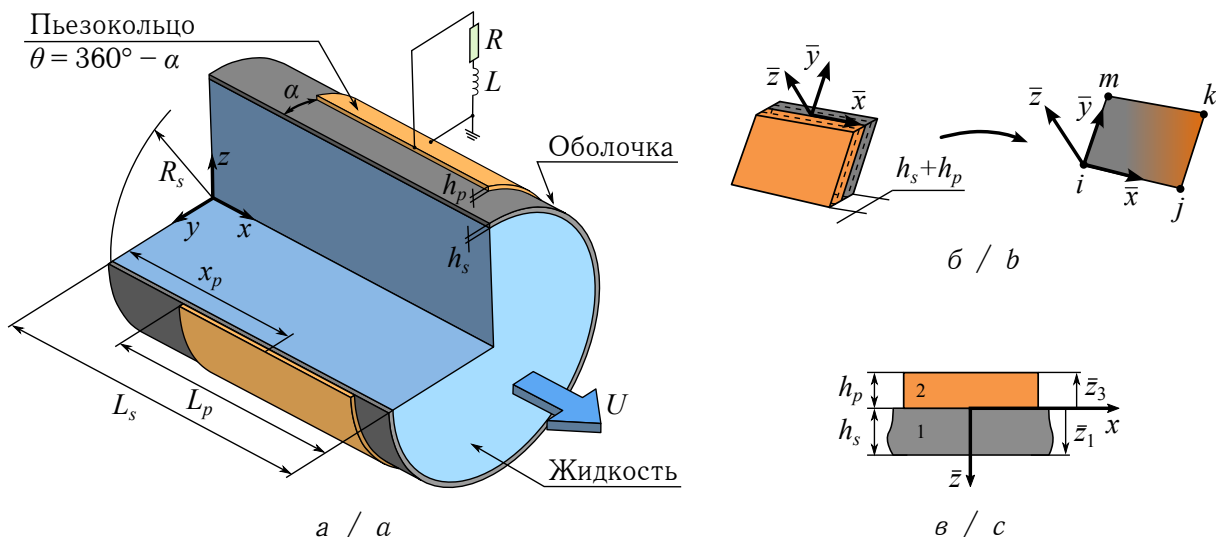


Рис. 1. Круговая цилиндрическая оболочка с пьезоэлектрическим кольцом, взаимодействующая с текущей жидкостью (а), конечный элемент оболочки (б), поперечное сечение слоистой конструкции (в) (цвет онлайн)

Fig. 1. Circular cylindrical shell with a piezoelectric ring and interacting with flowing fluid (a), shell finite element (b), cross-section of the laminated structure (c) (color online)

При моделировании пространственной тонкостенной оболочки полагается, что её криволинейная поверхность достаточно точно может быть аппроксимирована совокупностью плоских сегментов (рис. 1, б) [21]. В каждом из них выполняются соотношения классической теории слоистых пластин [22] и уравнения линейной теории пьезоупругости [23], записанные для случая плоского напряжённого состояния [22]. С учётом допущений и гипотез, изложенных в [24], они формулируются для каждого n -го ($n = 1, 2, \dots, N$) слоя в виде [25, 26]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} & 0 \\ \tilde{Q}_{12} & \tilde{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix}^{(n)} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{\bar{z}} \end{Bmatrix}^{(n)}, \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{\bar{z}} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{e}_{31} & \tilde{e}_{32} & 0 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix}^{(n)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{33} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{\bar{z}} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (2)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(n)} &= \tilde{\mathbf{c}}^{(n)} \bar{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{e}}^{(n)} \bar{\mathbf{E}}^{(n)}, \\ \bar{\mathbf{D}}^{(n)} &= (\tilde{\mathbf{e}}^{(n)})^T \bar{\varepsilon} + \tilde{\mathbf{e}}^{(n)} \bar{\mathbf{E}}^{(n)}. \end{aligned}$$



где $\bar{\sigma}$ и $\bar{\epsilon}$ — векторы, содержащие компоненты тензора напряжений и тензора малых деформаций в случае плоского напряжённого состояния; $\bar{\mathbf{E}}$ и $\bar{\mathbf{D}}$ — векторы напряжённости электрического поля и электрической индукции; $\tilde{\mathbf{c}}$ — матрица упругих констант, вычисленная при постоянном электрическом поле; $\tilde{\mathbf{e}}$ — матрица пьезоэлектрических констант; $\tilde{\epsilon}$ — матрица диэлектрических констант, вычисленная при постоянных деформациях. Здесь и далее прямая черта сверху означает принадлежность величины к системе координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанной с боковой поверхностью конструкции (рис. 1, б). При отсутствии пьезоэлектрического эффекта в n -ом слое слагаемое, содержащее матрицу $\tilde{\epsilon}$, и уравнение (2) не учитываются.

Элементы матриц $\tilde{\mathbf{c}}^{(n)}$, $\tilde{\mathbf{e}}^{(n)}$ и $\tilde{\epsilon}^{(n)}$ вычисляются следующим образом [27, 28]:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ij}^{(n)} &= Q_{ij}^{(n)} - \frac{Q_{i3}^{(n)} Q_{j3}^{(n)}}{Q_{33}^{(n)}}, & \tilde{Q}_{66}^{(n)} &= Q_{66}^{(n)}, \\ \tilde{e}_{3j}^{(n)} &= e_{3j}^{(n)} - \frac{e_{33}^{(n)} Q_{j3}^{(n)}}{Q_{33}^{(n)}}, & \tilde{\epsilon}_{33}^{(n)} &= \epsilon_{33}^{(n)} - \frac{e_{33}^{(n)} e_{33}^{(n)}}{Q_{33}^{(n)}}, \quad i, j = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты $Q_{ij}^{(n)}$ записываются в терминах инженерных констант [22]:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{11}^{(n)} &= \frac{E_1^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, & \tilde{Q}_{12}^{(n)} &= \frac{\nu_{12}^{(n)} E_2^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}} = \frac{\nu_{21}^{(n)} E_1^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, \\ \tilde{Q}_{22}^{(n)} &= \frac{E_2^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, & \tilde{Q}_{66}^{(n)} &= G_{12}^{(n)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $E_1^{(n)}$ и $E_2^{(n)}$ — модули упругости материала в направлении осей \bar{x} и \bar{y} , $\nu_{ij}^{(n)}$ — коэффициенты Пуассона, $G_{12}^{(n)}$ — модуль сдвига в плоскости $\bar{x}\bar{y}$.

Полагается, что вектор электрического поля ортогонален к электродированным поверхностям, а его интенсивность однородна во всём n -ом пьезоэлектрическом слое [24]:

$$E_{\bar{z}}^{(n)} = -\frac{\psi^{(n)}}{h^{(n)}}, \quad (5)$$

где $\psi^{(n)}$ — разность электрических потенциалов (напряжение) между верхней и нижней электродированными поверхностями n -го пьезоэлектрического слоя, $h^{(n)}$ — толщина n -го слоя.

Малые деформации плоского сегмента определяются соотношениями классической теории пластин [22]:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}\}^T &= \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^0, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^0, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^0\}^T + \bar{z} \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^1, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^1, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^1\}^T, \\ \bar{\epsilon}^0 &= \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^0, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^0, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^0\}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right\}^T, \\ \bar{\epsilon}^1 &= \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^1, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^1, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^1\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}\bar{y}} \right\}^T, \end{aligned} \quad (6)$$

где \bar{u} , \bar{v} и \bar{w} — перемещения точек срединной поверхности сегмента в направлении осей \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} декартовой системы координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.



Обобщённый вектор деформаций $\bar{\varepsilon}$ записывается с использованием обозначений (6) в виде

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}^0 \\ \bar{\varepsilon}^1 \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^0, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^0, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^0, \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^1, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^1, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^1\}^T. \quad (7)$$

С учётом выражений (1) и (5) вектор усилий и моментов $\bar{\mathbf{t}}$ определяется как

$$\bar{\mathbf{t}} = \{N_{\bar{x}\bar{x}}, N_{\bar{y}\bar{y}}, N_{\bar{x}\bar{y}}, M_{\bar{x}\bar{x}}, M_{\bar{y}\bar{y}}, M_{\bar{x}\bar{y}}\}^T = \mathbf{S}\bar{\varepsilon} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{E}}_z, \quad (8)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} & \cdots & g_{2N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ g'_{11} & g'_{12} & \cdots & g'_{1n} & \cdots & g'_{1N} \\ g'_{21} & g'_{22} & \cdots & g'_{2n} & \cdots & g'_{2N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты, входящие в матрицы \mathbf{S} и \mathbf{G} , вычисляются следующим образом:

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(n)}(\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(n)}(\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2),$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(n)}(\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3), \quad i, j = 1, 2, 6, \quad (9)$$

$$g_{in} = (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1})\tilde{e}_{3i}^{(n)} = h^{(n)}\tilde{e}_{3i}^{(n)}, \quad g'_{in} = \frac{1}{2}(\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2)\tilde{e}_{3i}^{(n)}, \quad i = 1, 2.$$

Нормальная компонента E_z вектора напряжённости электрического поля $\bar{\mathbf{E}}$ определяется в каждом n -ом слое материала согласно уравнению (5) с помощью выражения

$$\bar{\mathbf{E}}_z = -\mathbf{B}_\psi \boldsymbol{\psi} = - \begin{bmatrix} 1/h^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/h^{(2)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/h^{(n)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1/h^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \\ \vdots \\ \psi^{(n)} \\ \vdots \\ \psi^{(N)} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Уравнение (2) также переписывается с учётом (5):

$$\bar{\mathbf{D}}_z = \mathbf{G}^T \bar{\varepsilon} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{E}}_z, \quad \mathbf{H} = \text{diag}(\tilde{\epsilon}_{33}^{(1)}, \tilde{\epsilon}_{33}^{(2)}, \dots, \tilde{\epsilon}_{33}^{(n)}, \dots, \tilde{\epsilon}_{33}^{(N)}). \quad (11)$$

Приведённая постановка предназначена для описания поведения тонких пространственных оболочек, имеющих в общем случае N ортотропных упругих и пьезоэлектрических слоёв. При моделировании конструкции с пьезоэлектрическим кольцом полагается, что несущая оболочка состоит из M упругих ортотропных слоёв, а при наличии пьезокольца к ним добавляется ещё один пьезоэлектрический ($N = M + 1$). Учитывая вышесказанное, выражение (8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}} &= \mathbf{S}_s \bar{\varepsilon}, & n &= \overline{1, M}, \\ \bar{\mathbf{t}} &= \mathbf{S}_p \bar{\varepsilon} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{E}}_z, & n &= N, \end{aligned} \quad (12)$$

а соотношение (11) используется только при $n = N$.



Пьезокольцо представляет собой один слой трансверсально-изотропного материала толщиной h_p (рис. 1, в), в котором всего две электрические неизвестные: разность потенциалов ψ (напряжение) и электрический заряд q . В таком случае матрицы, входящие в выражения (10) и (11), принимают вид

$$\mathbf{G} = \{g_{11}, g_{21}, 0, g'_{11}, g'_{21}, 0\}^T, \quad \mathbf{V}_\psi = 1/h_p, \quad \mathbf{H} = \tilde{\epsilon}_{33}. \quad (13)$$

Математическая постановка задачи динамики электроупругой пространственной оболочки основана на вариационном принципе возможных перемещений, который записывается в матричном виде с учётом работы внешних поверхностных сил и сил инерции [24, 29]:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^P \int_{(S_p)_k} \left(\delta \bar{\mathbf{e}}^T (\mathbf{S}_p)_k \bar{\mathbf{e}} + \delta \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{G} \frac{\psi_k}{(h_p)_k} + \frac{\delta \psi_k}{(h_p)_k} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{e}} \right) dS - \delta \psi^T \mathbf{C}_p \psi + \\ & + \sum_{k=1}^P \int_{(S_p)_k} \delta \bar{\mathbf{d}}^T (\mathbf{J}_p)_k \ddot{\mathbf{d}} dS + \delta \psi^T \mathbf{q} + \int_{S_s} \delta \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{S}_s \bar{\mathbf{e}} dS + \int_{S_s} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{J}_s \ddot{\mathbf{d}} dS - \\ & - \int_{S_f} \delta \bar{w} p dS = \int_{S_\sigma} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{f}} dS \end{aligned} \quad (14)$$

и дополняется уравнением для последовательной RL -цепи, связывающим напряжение на каждом пьезоэлементе ψ_k с соответствующим электрическим зарядом q_k [24]:

$$\psi - \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{L}\ddot{\mathbf{q}} = 0. \quad (15)$$

Здесь и далее подстрочными индексами s , p и f обозначена принадлежность величины к конструкции, пьезоэлектрическому кольцу и жидкости; $\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}\}^T$ — обобщённый вектор перемещений, включающий углы поворота $\theta_{\bar{x}}$, $\theta_{\bar{y}}$, $\theta_{\bar{z}}$ относительно соответствующих осей системы координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_P\}^T$ и $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_P\}^T$ — векторы разности потенциалов и электрических зарядов; S_s — поверхность основной конструкции; S_f и S_σ — области оболочки, которые взаимодействуют с текущей жидкостью и находятся под действием статической нагрузки $\bar{\mathbf{f}}$; p — гидродинамическое давление жидкости; $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_P)$ и $\mathbf{L} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_P)$ — диагональные матрицы, содержащие значения сопротивлений и индуктивностей RL -цепей, подключённых к каждому из пьезоэлементов. Матрицы инерции \mathbf{J} и ёмкостей \mathbf{C}_p определяются с помощью выражений:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 \\ -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_P \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \sum_{n=1}^N \rho^{(n)} (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad J_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \rho^{(n)} (\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2),$$

$$J_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \rho^{(n)} (\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3), \quad C_k = \tilde{\epsilon}_{33}^{(k)} A_k / (h_p)_k, \quad (16)$$



где $\rho^{(n)}$ — плотность n -го слоя материала, C_k и A_k — ёмкость и площадь k -го пьезоэлектрического слоя.

Основные соотношения, описывающие безвихревую динамику идеальной сжимаемой жидкости объёма V_f в случае малых возмущений, формулируются в терминах потенциала возмущения скорости ϕ [30–32]. Соответствующее волновое уравнение записывается в декартовой системе координат (x, y, z) и совместно с условием непроницаемости и граничными условиями преобразуется к слабой форме [32]:

$$\int_{V_f} \nabla F_m \cdot \nabla \hat{\phi} dV + \int_{V_f} F_m \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} dV + \int_{V_f} F_m \frac{2U}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t \partial x} dV - \int_{V_f} F_m \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} dV - \int_{S_f} F_m \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} dS - \int_{S_f} F_m U \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} dS = 0, \quad m = \overline{1, m_f}. \quad (17)$$

Здесь $\hat{\phi}$ и \hat{w} — пробные решения для потенциала скорости и нормальных перемещений конструкции \bar{w} ; c — скорость звука в жидкой среде; t — время; F_m и m_f — базисные функции и их количество.

Давление текущей жидкости p , входящее в уравнение (14), вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$p = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (18)$$

где ρ_f — плотность жидкости.

При решении уравнения (17) используются следующие граничные условия:

$$x = 0 : \phi = 0, \quad x = L_s : \partial \phi / \partial x = 0. \quad (19)$$

2. Конечно-элементная реализация

После подстановки выражений (7) и (18) в (14) получим связанную систему уравнений (14), (15), (17). При построении её конечно-элементного аналога пробное решение для потенциала возмущения скорости $\hat{\phi}$, базисные функции F_m , разность электрических потенциалов ψ , электрический заряд q , мембранные перемещения оболочки \bar{u} и \bar{v} описываются с использованием билинейных функций формы Лагранжа. Изгибные перемещения \bar{w} , углы поворота θ_x и θ_y аппроксимируются несовместными кубическими полиномами Эрмита [33]. Конечные элементы, которые граничат с жидкостью, содержат по семь узловых неизвестных: $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ и ϕ . Каждый k -й пьезоэлемент имеет всего две искомым величины: разность потенциалов ψ_k и заряд q_k . Они являются общими для всех его узлов. Дискретизация расчётных областей жидкости и конструкции осуществляется с использованием пространственных 8-узловых призматических и плоских четырёхугольных конечных элементов соответственно. После применения известных процедур метода конечных элементов получим [33, 34]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{r}, \quad (20)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{fs} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{R} \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sp} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{ps} & -\mathbf{K}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{A}_{fs} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{u} = \{\phi, \mathbf{d}, \psi, \mathbf{q}\}^T$, $\mathbf{r} = \{0, \mathbf{f}, 0, 0\}^T$, а типовые матрицы отдельно взятого конечного элемента определяются известным образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f^e &= \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, & \bar{\mathbf{M}}_s^e &= \int_{S_s} \mathbf{N}^T \mathbf{J}_s \mathbf{N} dS + \int_{(S_p)_k} \mathbf{N}^T (\mathbf{J}_p)_k \mathbf{N} dS, & (21) \\ \mathbf{C}_f^e &= \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \mathbf{F} dV, & \bar{\mathbf{C}}_{fs}^e &= - \int_{S_f} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w dS, & \bar{\mathbf{C}}_{sf}^e &= \int_{S_f} \rho_f \mathbf{N}_w^T \mathbf{F} dS, \\ \mathbf{K}_f^e &= \int_{V_f} (\nabla \mathbf{F})^T \nabla \mathbf{F} dV, & \bar{\mathbf{K}}_s^e &= \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_s \mathbf{B} dS + \int_{(S_p)_k} \mathbf{B}^T (\mathbf{S}_p)_k \mathbf{B} dS, \\ \bar{\mathbf{K}}_{sp}^e &= \int_{(S_p)_k} \mathbf{B}^T \mathbf{G} \frac{1}{(h_p)_k} dS, & (\mathbf{K}_p^e)_k &= C_k, & \bar{\mathbf{K}}_{ps}^e &= \int_{(S_p)_k} \frac{1}{(h_p)_k} \mathbf{G}^T \mathbf{B} dS, \\ \mathbf{A}_f^e &= \int_{V_f} \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dV, & \bar{\mathbf{A}}_{fs}^e &= - \int_{S_f} U \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} dS, & \bar{\mathbf{A}}_{sf}^e &= \int_{S_f} \rho_f U \mathbf{N}_w^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dS. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{F} , \mathbf{N} , \mathbf{N}_w — функции формы для потенциала возмущения скорости жидкости, обобщённого вектора узловых перемещений оболочки $\bar{\mathbf{d}}$ и его нормальной составляющей \bar{w} ; \mathbf{B} — матрица градиентов, связывающая вектор деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента; \mathbf{I} — единичная матрица. В определяющих соотношениях (6) отсутствует уравнение для поворота вокруг оси \bar{z} . С целью устранения этой проблемы в матрицу жёсткости конечного элемента оболочки добавляются нулевые строки и столбцы и вводится фиктивный момент [21]. Матрицы с чертой сверху ($\bar{\mathbf{K}}_s^e$, $\bar{\mathbf{M}}_s^e$ и т. д.) формируются в системе координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанной с боковой поверхностью конструкции. Преобразование узловых перемещений и сил к глобальной декартовой системе координат (x, y, z) осуществляется для каждого элемента с помощью матрицы направляющих косинусов известным образом [21, 33, 35]. При отсутствии пьезоэлектрического слоя слагаемое, содержащее интеграл по поверхности $(S_p)_k$, не учитывается.

Формулировка задачи о собственных и вынужденных установившихся гармонических колебаниях электроупругой тонкостенной оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью, основана на представлении решения в форме экспоненты. В первом случае используется выражение (22), а во втором — (23):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\}^T = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{i\lambda t}, \quad (22)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\}^T = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{i\Omega t}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) e^{i\Omega t}, \quad (23)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ — функция, зависящая только от координат \mathbf{x} ; Ω — окружная частота приложенного воздействия; i — мнимая единица; $\lambda = \omega + i\gamma$ — характеристический показатель, где ω — собственная частота колебаний, а γ — величина, характеризующая демпфирование системы.

Подстановка выражений (22) и (23) в систему уравнений (20) позволяет получить

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + i\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (24)$$

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{r}}. \quad (25)$$



Уравнение (24) сводится к обобщённой задаче на собственные значения (26) для несимметричных матриц удвоенной размерности [36], которая решается с использованием неявно перезапускаемого метода Арнольди [37]:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} + \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + i\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} i\lambda \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = 0. \quad (26)$$

Численная реализация приведённой постановки выполнена в среде MATLAB с привлечением возможностей пакета ANSYS для создания конечно-элементной сетки.

В данной работе рассматриваются тонкостенные конструкции с разными вариантами кинематических граничных условий на краях. При их обозначении используются следующие сокращения: F — свободный край, S — свободное опирание ($v = w = 0$), C — жёсткое закрепление ($u = v = w = 0, \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$).

3. Верификация численного алгоритма

В данном разделе продемонстрирована работоспособность разработанного конечно-элементного алгоритма и достоверность получаемого с его помощью решения. Результаты, полученные с использованием изложенной выше математической постановки, обозначены через «shell». Сравнение собственных частот колебаний свободно опертой на обоих краях (SS) цилиндрической оболочки ($L_s = 5$ м, $R_s = 1$ м, $h_s = 0.02$ м), полностью выполненной из пьезокерамики PZT-5H [38], приведено в табл. 1. Через j и m обозначено количество полуволн в окружном и меридиональном направлениях. В расчётах использовались следующие граничные условия для потенциала скоростей: $\phi = 0$ при $x = 0$ и $x = L_s$. Здесь и далее через «open circuit» (o/c) и «short circuit» (s/c) обозначены электрические граничные условия, соответствующие режимам работы пьезоэлемента с разомкнутыми и замкнутыми электродами. Представленные данные демонстрируют хорошее совпадение результатов, полученных при наличии жидкости и её отсутствии.

В следующем примере рассмотрена жёстко закреплённая на обоих краях круговая цилиндрическая оболочка, содержащая внутри неподвижную жидкость ($U = 0$). На её внешней поверхности расположено одно незамкнутое кольцо из пьезоэлектрического материала, к которому подключена последовательная RL -цепь (рис. 1, а). В расчётах использовались приведённые ниже параметры, если не указано иное:

изотропная оболочка

$$L_s = 231 \text{ мм}, \quad R_s = 77.25 \text{ мм}, \quad h_s = 1.5 \text{ мм}, \quad E_1 = E_2 = E_s = 205 \text{ ГПа}, \\ \nu_{12} = \nu_{21} = \nu_s = 0.3, \quad \rho = \rho_s = 7800 \text{ кг/м}^3;$$

пьезокерамическое кольцо

$$L_p = 50 \text{ мм}, \quad h_p = 1 \text{ мм}, \quad x_p/L_s = 0.5, \quad \theta = 63^\circ, \\ Q_{11} = Q_{22} = 109 \text{ ГПа}, \quad Q_{12} = 61 \text{ ГПа}, \quad Q_{13} = Q_{23} = 54 \text{ ГПа}, \\ Q_{33} = 93 \text{ ГПа}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = 24 \text{ ГПа}, \quad \rho = \rho_p = 7500 \text{ кг/м}^3, \\ e_{31} = e_{32} = -4.9 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{33} = 14.9 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{15} = e_{24} = 10.6 \text{ Кл/м}^2, \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 820\epsilon_0, \quad \epsilon_{33} = 840\epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

идеальная жидкость

$$\rho_f = 997 \text{ кг/м}^3, \quad c = 1500 \text{ м/с}.$$



Таблица 1 / Table 1

Сравнение собственных частот колебаний (Гц) свободно опертой на обоих краях цилиндрической оболочки при разных электрических граничных условиях
 A comparison of the natural vibration frequencies (Hz) of a simply supported shell with or without fluid at different combinations of electrical boundary conditions

Без жидкости						С жидкостью					
(j, m)		Short circuit		Open circuit		(j, m)		Short circuit		Open circuit	
j	m	[38]	shell	[38]	shell	j	m	[38]	shell	[38]	shell
1	1	88.23	88.13	93.79	93.73	1	1	44.76	44.61	48.27	48.11
	2	216.26	217.24	228.23	229.39		2	107.39	107.80	115.61	115.97
	0	275.96	280.59	275.96	280.59		3	154.13	154.93	166.07	166.71
	3	311.65	313.21	330.65	332.76		4	189.33	190.10	204.21	204.72
	4	366.97	368.50	392.13	393.95		5	217.19	217.52	234.47	234.47
2	1	37.32	36.81	40.11	39.60	2	1	19.92	19.58	21.46	21.32
	2	114.21	114.11	122.68	122.62		2	62.60	62.37	67.62	67.49
	3	193.79	194.31	207.92	208.57		3	108.58	108.65	117.25	117.43
	4	259.35	260.09	278.43	279.32		4	149.02	149.26	160.91	161.28
	5	308.46	308.55	331.55	331.66		5	182.82	182.81	197.40	197.59

В табл. 2 приведены величины действительных и мнимых частей комплексных собственных значений λ , полученные с использованием изложенного подхода, в сравнении с результатами расчёта на основе трёхмерных уравнений линейной теории пьезоупругости [39]. В отличие от предыдущего примера здесь использовались следующие граничные условия для жидкой среды: $\partial\phi/\partial n = 0$ при $x = 0$ и $\phi = 0$ при $x = L_s$. Относительная ошибка не превышает 0.5% для частот колебаний ω и 2% для демпфирования γ . Несмотря на это, используемая оболочечная постановка качественно верно описывает появление в спектре новой собственной частоты колебаний. Она возникает в результате образования резонансного RLC -контура при шунтировании пьезоэлемента внешней RL -цепью. Соответствующая мода колебаний выделена жирным начертанием в табл. 2. При отсутствии в системе других механизмов диссипации энергии её отличительной чертой является большая величина мнимой части γ .

Таблица 2 / Table 2

Сравнение собственных частот колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью и пьезоэлектрическим кольцом, подключённым к внешней RL -цепи (Гц)
 A comparison of the natural vibration frequencies of a shell with quiescent fluid and piezoelectric element, connected to an external RL -circuit (Hz)

i	Short circuit		Open circuit		$R = 500 \text{ Ом}, L = 0.9 \text{ Гн}$			
	ANSYS	shell	ANSYS	shell	3D [39]		shell	
	ω_i	ω_i	ω_i	ω_i	ω_i	γ_i	ω_i	γ_i
1	983.765	985.234	985.087	986.571	774.862	43.709	772.545	43.277
2	985.547	987.493	985.552	987.495	989.464	0.001	987.489	0.001
3	1066.227	1069.960	1066.227	1069.960	988.536	0.443	988.536	0.438
4	1067.960	1071.515	1069.403	1073.008	1072.100	0.000	1069.960	0.000
5	1149.400	1149.917	1149.638	1150.164	1077.845	0.284	1074.621	0.278
6	1210.480	1208.447	1211.613	1209.544	1152.672	0.030	1150.371	0.030

Постановка задачи о собственных колебаниях при использовании трёхмерных уравнений линейной пьезоупругости для описания поведения пьезоэлемента при



наличии внешней RL -цепи приводит к неклассической проблеме на собственные значения [39, 40]. Она решается методом Мюллера с использованием библиотеки Intel® Math Kernel Library для основных операций с разреженными матрицами. Несмотря на применение технологии параллельных вычислений, расчёты занимают длительное время из-за необходимости несколько раз находить определитель системы на каждой итерации. Использование подхода, изложенного в разд. 1, позволяет получить квадратичную задачу на собственные значения (26), решение которой требует меньше вычислительных ресурсов и позволяет сократить время расчётов в некоторых случаях в двести и более раз.

4. Численные результаты

В данном разделе показана возможность использования пьезоэлектрического элемента в виде разомкнутого кольца, подключённого к внешней RL -цепи, для демпфирования колебаний тонкостенной оболочки, взаимодействующей с потоком жидкости. Расположение пьезокольца на поверхности конструкции, в котором оно функционирует наиболее эффективно, определяется численно из условия максимума коэффициента электромеханической связи K_i , полученного для i -ой частоты (формы) колебаний [1]

$$K_i = \sqrt{\left(\frac{\omega_i^{o/c}}{\omega_i^{s/c}}\right)^2 - 1} \rightarrow \max, \quad (27)$$

где $\omega_i^{o/c}$ и $\omega_i^{s/c}$ — собственные частоты колебаний системы в режимах о/с и с/с, имеющие номер i в возрастающем спектре.

Анализ изменения комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от сопротивления R и индуктивности L электрической цепи позволяет подобрать их оптимальные величины, обеспечивающие максимальную скорость затухания свободных колебаний. В качестве критерия используется условие

$$f(R, L) = |\Delta\lambda_i| = |\lambda_i - \lambda_{ic}| \rightarrow \min, \quad (28)$$

где λ_i и λ_{ic} — комплексные собственные значения, соответствующие демпфируемой (i -ой) моде колебаний и моде электрической цепи, подключённой к пьезокольцу.

Начальное приближение в задаче оптимизации (28) находится с помощью формул, предложенных в [1]. Здесь и далее обозначение «pp» соответствует выражениям, полученным в [1] с использованием техники размещения полюсов,

$$L_i^{pp} = \frac{1}{C_i \left(\omega_i^{s/c}\right)^2 (1 + K_i^2)^2}, \quad R_i^{pp} = \frac{2K_i}{C_i \omega_i^{s/c} \sqrt{(1 + K_i^2)^3}}, \quad C_i = C_0 (1 - K_i^2), \quad (29)$$

а обозначение «tf» — выражениям, полученным в [1] на основе передаточной функции,

$$L_i^{tf} = \frac{1}{C_i \left(\omega_i^{s/c}\right)^2 (1 + K_i^2)}, \quad R_i^{tf} = \frac{\sqrt{2}K_i}{C_i \omega_i^{s/c} (1 + K_i^2)}, \quad (30)$$

где C_0 — статическая ёмкость пьезоэлемента.

По мнению авторов работы [1], выражение (29) должно обеспечить совпадение собственных частот колебаний конструкции и электрической цепи, а также максимальную скорость их затухания. Соотношения (30), в свою очередь, должны приводить к



наибольшему снижению амплитуды вынужденных установившихся гармонических колебаний. В публикациях [20, 39] показано, что сформулированные в [1] аналитические выражения не позволяют получить действительно оптимальные значения индуктивности и сопротивления с точки зрения скорости затухания колебаний.

Пассивное демпфирование колебаний круговой цилиндрической оболочки осуществляется с помощью незамкнутого пьезоэлектрического кольца, соединённого с внешней RL -цепью. Выбор параметров, обеспечивающих его максимально эффективное функционирование, осуществляется из решения задачи оптимизации (27), в которой коэффициент электромеханической связи является функцией координаты x_p и угла θ (рис. 1, а). Последнее означает, что пьезокерамическое тело имеет переменную длину в окружном направлении. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена поверхность $K_1(\xi, \theta)$ для конфигурации, рассмотренной во втором примере разд. 3. Максимальное значение K_1 обозначено крестиком. Безразмерная координата $\xi = x_p/L_s$ определяет положение центра пьезокольца по длине конструкции. Низшая форма колебаний данной оболочки имеет четыре полуволны в окружном направлении, что соответствует числу локальных максимумов функции $K_1(\xi, \theta)$. Все следующие расчёты выполнялись при оптимальных параметрах $\xi = 0.5$ и $\theta = 63^\circ$.

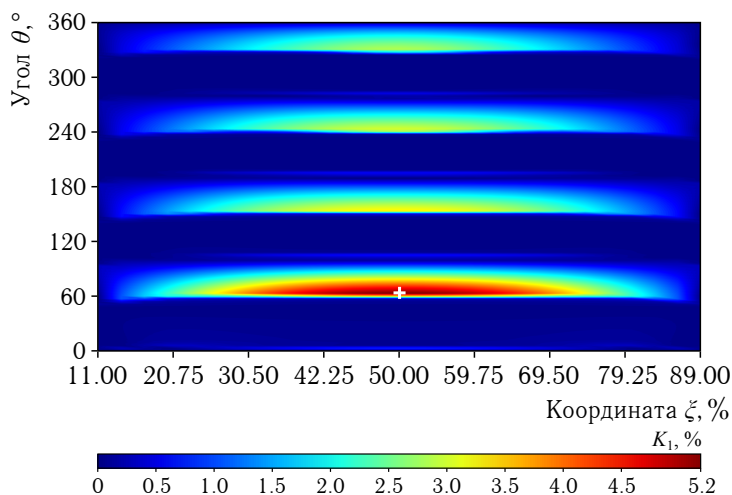


Рис. 2. Распределение коэффициента электромеханической связи $K_1(\xi, \theta)$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Electromechanical coupling coefficient $K_1(\xi, \theta)$ (color online)

В табл. 3 приведены параметры последовательной RL -цепи, обеспечивающие демпфирование низшей частоты (формы) колебаний оболочки, взаимодействующей с внутренним потоком жидкости. Его скорость течения выбиралась из условия $U = 0.5U_D$, где U_D — критическая скорость, при которой наступает потеря устойчивости в виде дивергенции. Параметры RL -цепи, подключённой к пьезокольцу, определены численно с использованием условия (28) и приведены в табл. 3. Там же представлены значения, вычисленные по аналитическим формулам (29) и (30).

Из результатов следует, что условие (28) обеспечивает наибольшую скорость затухания свободных колебаний и наименьшим образом влияет на частотный спектр. Последнее подтверждается тем фактом, что значения ω_1 и ω_{1c} отличаются от частоты колебаний $\omega_1^{o/c}$, полученной при отсутствии электрической цепи, всего на 0.02%. При этом возросшая относительно значений «open circuit» мнимая часть γ_1 свидетельствует об увеличении скорости затухания свободных колебаний. Характерный вид изоповерхности $f(R, L)$ приведён на рис. 3, а в окрестности экстремума. Значения параметров, вычисленные разными способами, показаны точками 1–3. Данный рисунок наглядно демонстрирует их расположение относительно минимума функции $f(R, L)$.

Амплитудно-частотные характеристики, демонстрирующие демпфирование вынужденных установившихся гармонических колебаний, приведены на рис. 3, б. Они

Таблица 3 / Table 3

Оптимальные параметры внешней RL -цепи, вычисленные различными способами, и комплексные собственные значения (Гц)
 Optimal parameters of the external RL -circuit calculated in various ways and complex eigenvalues (Hz)

Вариант	Параметры цепи		λ_1		λ_{1c}	
	R , Ом	L , Гн	ω_1	γ_1	ω_{1c}	γ_{1c}
Условие (28)	506.60	0.8591	787.099	22.160	786.934	22.365
Наgood [1], pp	499.15	0.8711	792.861	15.106	776.014	28.318
Наgood [1], tf	353.54	0.8740	800.472	12.507	767.474	18.118
Open circuit	1×10^{15}	1×10^{15}	787.171	0.034	—	—

получены при действии на оболочку внутреннего равномерного давления 100 кПа. Все из рассмотренных вариантов обеспечивают снижение амплитуды колебаний первого резонанса в несколько десятков раз, но параметры, определённые по формулам (30), позволяют достичь наилучшего результата (кривая 3).

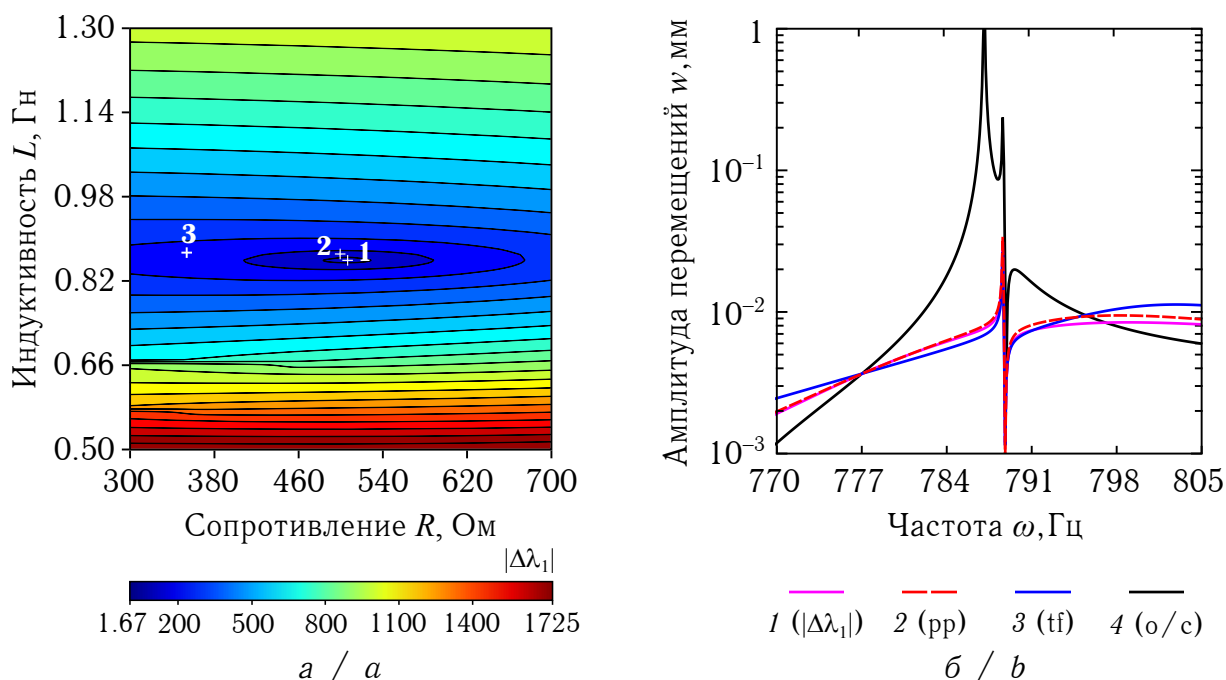


Рис. 3. Изоповерхность $f(R, L)$ (а) и амплитудно-частотные характеристики (б), полученные для оболочки при скорости течения жидкости $U = 0.5U_D$ (цвет онлайн)
 Fig. 3. Isosurface $f(R, L)$ (a) and frequency response curves (b) obtained for a shell at fluid velocity $U = 0.5U_D$ (color online)

Заклучение

Сформулирована математическая постановка задачи и разработан конечно-элементный алгоритм её численной реализации, предназначенные для анализа собственных и вынужденных установившихся гармонических колебаний взаимодействующих с текущей жидкостью пространственных оболочек с пьезоэлектрическими элементами, подключёнными к внешним электрическим цепям.

Проведён анализ изменения комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от параметров электрической цепи, состоящей из



последовательно соединённых резистора и катушки индуктивности. Из решения задачи оптимизации подобраны их оптимальные величины, обеспечивающие наибольшую скорость затухания свободных колебаний. Показано, что предложенный подход позволяет получить более высокие показатели демпфирования, чем традиционно используемые для этой цели аналитические выражения.

Построены амплитудно-частотные характеристики, демонстрирующие снижение амплитуды вынужденных гармонических колебаний при разных скоростях течения жидкости. На их примере проведено сравнение различных способов вычисления оптимальных параметров шунтирующей RL -цепи.

Список литературы

1. Hagood N. W., von Flotow A. H. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // Journal of Sound and Vibration. 1991. Vol. 146, iss. 2. P. 243–268. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9)
2. Park C. H., Inman D. J. Enhanced piezoelectric shunt design // Shock and Vibration. 2003. Vol. 10. P. 127–133. <https://doi.org/10.1155/2003/863252>
3. Fleming A. J., Moheimani S. O. R. Control orientated synthesis of high-performance piezoelectric shunt impedances for structural vibration control // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2005. Vol. 13, iss. 1. P. 98–112. <https://doi.org/10.1109/TCST.2004.838547>
4. Porfiri M., Maurini C., Pouget J.-P. Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures // Smart Materials and Structures. 2007. Vol. 16, iss. 2. P. 323–331. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/2/010>
5. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction // Smart Materials and Structures. 2012. Vol. 21, iss. 1. Art. 015008. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/1/015008>
6. Soltani P., Kerschen G., Tondreau G., Deraemaeker A. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: An exact solution // Smart Materials and Structures. 2014. Vol. 23, iss. 12. Art. 125014. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/12/125014>
7. Heuss O., Salloum R., Mayer D., Melz T. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers // Archive of Applied Mechanics. 2016. Vol. 86. P. 1715–1732. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0972-5>
8. Toftekær J. F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 27, iss. 22. P. 1908–1922. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1549297>
9. Gripp J. A. B., Rade D. A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. Vol. 112. P. 359–383. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.04.041>
10. Presas A., Luo Y., Wang Z., Valentin D., Egusquiza M. A review of PZT patches applications in submerged systems // Sensors. 2018. Vol. 18, iss. 7. 2251. <https://doi.org/10.3390/s18072251>
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A review // Frontiers in Built Environment. 2019. Vol. 5. 64. <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>
12. Moheimani S. O. R., Fleming A. J. Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping. 1st ed. London : Springer, 2006. 287 p. <https://doi.org/10.1007/1-84628-332-9>
13. Zhang J. M., Chang W., Varadan V. K., Varadan V. V. Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coatings // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10, iss. 2. P. 414–420. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/404>



14. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94, iss. 2. P. 501–509. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.08.010>
15. Sun Y., Li Z., Huang A., Li Q. Semi-active control of piezoelectric coating's underwater sound absorption by combining design of the shunt impedances // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 355. P. 19–38. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.036>
16. Larbi W. Numerical modeling of sound and vibration reduction using viscoelastic materials and shunted piezoelectric patches // *Computers & Structures*. 2020. Vol. 232. 105822. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.024>
17. Pernod L., Lossouarn B., Astolfi J.-A., Deü J.-F. Vibration damping of marine lifting surfaces with resonant piezoelectric shunts // *Journal of Sound and Vibration*. 2021. Vol. 496. 115921. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115921>
18. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2021. Vol. 28. P. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
19. Iurlov M. A., Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022. Vol. 22, iss. 9. 2250101. <https://doi.org/10.1142/S0219455422501012>
20. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations // *International Journal of Smart and Nano Materials*. 2018. Vol. 9, iss. 2. P. 135–149. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1461144>
21. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London : McGraw-Hill, 1971. 521 p.
22. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
23. ANSI/IEEE Std176-1987. IEEE Standard on Piezoelectricity. New York : IEEE, 1988. 66 p. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
24. Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: Efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009. Vol. 80, iss. 2. P. 235–268. <https://doi.org/10.1002/nme.2632>
25. Moon S. H., Kim S. J. Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 2001. Vol. 39, № 11. P. 2042–2050. <https://doi.org/10.2514/2.1217>
26. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic airflow // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2014. Vol. 25, iss. 3. P. 259–270. <https://doi.org/10.1177/1045389X13491020>
27. Benjeddou A., Deü J.-F., Letombe S. Free vibrations of simply-supported piezoelectric adaptive plates: An exact sandwich formulation // *Thin-Walled Structures*. 2002. Vol. 40, iss. 7–8. P. 573–593. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(02\)00013-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(02)00013-7)
28. Sheng G. G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells // *Applied Mathematical Modelling*. 2010. Vol. 34, iss. 9. P. 2630–2643. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.024>
29. Allik H., Hughes J. R. Finite element method for piezoelectric vibration // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1970. Vol. 2, iss. 2. P. 151–157. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020202>



30. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. Москва : Наука, 1969. 182 с. EDN: KYUCTU
31. Paidoussis M. P. Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow : in 2 vols. 2nd ed. Vol. 2. London : Elsevier Academic Press, 2016. 944 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>
32. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеев В. П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 6. P. 108–120. <https://dx.doi.org/10.7868/S0568528116060049>
33. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method : in 3 vols. 5th ed. Vol. 2. Solid Mechanics. Oxford ; Boston : Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
34. Reddy J. N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics. 2nd ed. Oxford University Press, 2015. 768 p.
35. Bochkarov S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells // Acta Mechanica. 2019. Vol. 230, iss. 11. P. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
36. Tisseur F., Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem // SIAM Review. 1988. Vol. 43, iss. 2. P. 235–286. <https://doi.org/10.1137/S0036144500381988>
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 1996. Vol. 17, iss. 4. P. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
38. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2007. Vol. 71, iss. 12. P. 1412–1435. <https://doi.org/10.1002/nme.1987>
39. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2021. Vol. 28, iss. 19. P. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
40. Yurlova N. A., Sevodina N. V., Oshmarin D. A., Iurlov M. A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data // International Journal of Smart and Nano Materials. 2019. Vol. 10, iss. 2. P. 156–176. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1542356>

References

1. Hagood N. W., von Flotow A. H. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol. 146, iss. 2, pp. 243–268. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9)
2. Park C. H., Inman D. J. Enhanced piezoelectric shunt design. *Shock and Vibration*, 2003, vol. 10, pp. 127–133. <https://doi.org/10.1155/2003/863252>
3. Fleming A. J., Moheimani S. O. R. Control orientated synthesis of high-performance piezoelectric shunt impedances for structural vibration control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, vol. 13, iss. 1, pp. 98–112. <https://doi.org/10.1109/TCST.2004.838547>
4. Porfiri M., Maurini C., Pouget J.-P. Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures. *Smart Materials and Structures*, 2007, vol. 16, iss. 2, pp. 323–331. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/2/010>
5. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Materials and Structures*, 2012, vol. 21, iss. 1, Art. 015008. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/1/015008>



6. Soltani P., Kerschen G., Tondreau G., Deraemaeker A. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: An exact solution. *Smart Materials and Structures*, 2014, vol. 23, iss. 12, Art. 125014. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/12/125014>
7. Heuss O., Salloum R., Mayer D., Melz T. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, vol. 86, pp. 1715–1732. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0972-5>
8. Toftekær J. F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, vol. 27, iss. 22, pp. 1908–1922. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1549297>
9. Gripp J. A. B., Rade D. A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, vol. 112, pp. 359–383. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.04.041>
10. Presas A., Luo Y., Wang Z., Valentin D., Egusquiza M. A review of PZT patches applications in submerged systems. *Sensors*, 2018, vol. 18, iss. 7, 2251. <https://doi.org/10.3390/s18072251>
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A review. *Frontiers in Built Environment*, 2019, vol. 5, 64. <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>
12. Moheimani S. O. R., Fleming A. J. *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. 1st ed. London, Springer, 2006. 287 p. <https://doi.org/10.1007/1-84628-332-9>
13. Zhang J. M., Chang W., Varadan V. K., Varadan V. V. Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coatings. *Smart Materials and Structures*, 2001, vol. 10, iss. 2, pp. 414–420. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/404>
14. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, iss. 2, pp. 501–509. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.08.010>
15. Sun Y., Li Z., Huang A., Li Q. Semi-active control of piezoelectric coating's underwater sound absorption by combining design of the shunt impedances. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, vol. 355, pp. 19–38. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.036>
16. Larbi W. Numerical modeling of sound and vibration reduction using viscoelastic materials and shunted piezoelectric patches. *Computers & Structures*, 2020, vol. 232, 105822. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.024>
17. Pernod L., Lossouarn B., Astolfi J.-A., Deü J.-F. Vibration damping of marine lifting surfaces with resonant piezoelectric shunts. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 496, 115921. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115921>
18. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, vol. 28, pp. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
19. Iurlov M. A., Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2022, vol. 22, iss. 9, 2250101. <https://doi.org/10.1142/S0219455422501012>
20. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2018, vol. 9, iss. 2, pp. 135–149. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1461144>



21. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London, McGraw-Hill, 1971. 521 p.
22. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
23. *ANSI/IEEE Std176-1987. IEEE Standard on Piezoelectricity*. New York, IEEE, 1988. 66 p. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
24. Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: Efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, vol. 80, iss. 2, pp. 235–268. <https://doi.org/10.1002/nme.2632>
25. Moon S. H., Kim S. J. Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 2001, vol. 39, iss. 11, pp. 2042–2050. <https://doi.org/10.2514/2.1217>
26. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic airflow. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2014, vol. 25, iss. 3, pp. 259–270. <https://doi.org/10.1177/1045389X13491020>
27. Benjeddou A., Deü J.-F., Letombe S. Free vibrations of simply-supported piezoelectric adaptive plates: An exact sandwich formulation. *Thin-Walled Structures*, 2002, vol. 40, iss. 7–8, pp. 573–593. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(02\)00013-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(02)00013-7)
28. Sheng G. G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, vol. 34, iss. 9, pp. 2630–2643. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.024>
29. Allik H., Hughes J. R. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1970, vol. 2, iss. 2, pp. 151–157. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020202>
30. Il'gamov M. A. *Kolebaniya uprigikh obolochek, soderzhaschikh zhidkost' i gaz* [Vibrations of Elastic Shells Containing Liquid and Gas]. Moscow, Nauka, 1969. 182 p. (in Russian).
31. Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*. Vol. 2. 2nd ed. London, Elsevier Academic Press, 2016. 944 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>
32. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, iss. 6, pp. 821–833. <https://doi.org/10.1134/S0015462816060132>
33. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics*. 5th ed. Oxford, Boston, Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
34. Reddy J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. 2nd ed. Oxford University Press, 2015. 768 p.
35. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, iss. 11, pp. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
36. Tisseur F., Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review*, 1988, vol. 43, iss. 2, pp. 235–286. <https://doi.org/10.1137/S0036144500381988>
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1996, vol. 17, iss. 4, pp. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
38. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, vol. 71, iss. 12, pp. 1412–1435. <https://doi.org/10.1002/nme.1987>



39. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, vol. 28, iss. 19, pp. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
40. Yurlova N. A., Sevodina N. V., Oshmarin D. A., Iurlov M. A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2019, vol. 10, iss. 2. pp. 156–176. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1542356>

Поступила в редакцию / Received 26.04.2022

Принята к публикации / Accepted 18.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023