Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 357–369
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 357–369
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-357-369, EDN: VGTILO

Научная статья
УДК 517.929.4

Устойчивость трехслойных дифференциально-разностных схем с весами в пространстве суммируемых функций с носителями в сетеподобной области

В. Н. Хоанг✉, **В. В. Провоторов**

Воронежский государственный университет, Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1

Хоанг Ван Нгуен, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, fadded9x@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6970-2770, AuthorID: 1136856

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, wwprov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8761-7174, AuthorID: 497347

Аннотация. Работа является естественным продолжением ранних исследований авторов при анализе условий слабой разрешимости одномерных начально-краевых задач с изменяющейся на графе (сети) пространственной переменной в направлении увеличения размерности n ($n > 1$) сетеподобной области изменения этой переменной. Первые результаты в указанном направлении (при $n = 3$) были получены одним из авторов для линеаризованной системы Навье – Стокса, в дальнейшем — для существенно более сложной нелинейной системы Навье – Стокса. При этом анализ проводился классическим путем, используя априорные оценки норм слабых решений в соболевских пространствах функций. В данном исследовании (при произвольном $n > 1$) предлагается другой подход получения условий слабой разрешимости линейных начально-краевых задач — редукция исходной задачи к дифференциально-разностной системе, идея которой восходит к методу Е. Роте полудискретизации начально-краевой задачи по временной переменной. Рассматриваются дифференциально-разностная система уравнений с весовыми параметрами и соответствующая ей трехслойная дифференциально-разностная схема (множество схем). Полученная система является аналогом начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области n-мерного евклидова пространства. Основная цель — установление области изменения весовых параметров, гарантирующей устойчивость дифференциально-разностной схемы (непрерывность по исходным данным задачи), получение оценок операторных норм слабых решений схемы, построение последовательности решений дифференциально-разностной системы, слабо компактной в пространстве ее состояний. Последнее является важным элементом при использовании численных методов анализа широкого класса прикладных многомерных задач и построения вычислительных алгоритмов для отыскания приближений их решений. Результаты применимы в прикладных задачах оптимизации, возникающих при моделировании сетевых процессов переноса сплошных сред с помощью формализмов дифференциально-разностных систем.

Ключевые слова: дифференциально-разностная схема, весовые параметры, сетеподобная область, условия устойчивости

Для цитирования: *Хоанг В. Н., Провоторов В. В.* Устойчивость трехслойных дифференциально-разностных схем с весами в пространстве суммируемых функций с носителями в сетеподобной области // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 357–369. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-357-369, EDN: VGTILO

Article

Stability of three-layer differential-difference schemes with weights in the space of summable functions with supports in a network-like domain

V. N. Hoang✉, V. V. Provotorov

Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russia

Van N. Hoang, fadded9x@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6970-2770, AuthorID: 1136856

Vyacheslav V. Provotorov, wwprov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8761-7174, AuthorID: 497347

Abstract. The work is a natural continuation of the authors' earlier studies in the analysis of the conditions for the weak solvability of one-dimensional initial-boundary value problems with a space variable changing on a graph (network) in the direction of increasing the dimension n ($n > 1$) of the network-like domain of change of this variable. The first results in this direction (for $n = 3$) were obtained by one of the authors for the linearized Navier – Stokes system, later for a much more complex nonlinear Navier – Stokes system. The analysis was carried out in the classical way, using a priori estimates for the norms of weak solutions in Sobolev spaces of functions. In this study (for arbitrary $n > 1$) another approach is proposed to obtain conditions for the weak solvability of linear initial-boundary value problems reduction of the original problem to a differential-difference system, the idea of which goes back to E. Rothe's method of semi-discretization of the initial-boundary value problem by temporary variable. A differential-difference system of equations with weighted parameters and its corresponding three-layer differential-difference scheme (a set of schemes) are considered. The resulting system is an analog of the initial-boundary value problem for a parabolic type equation with a space variable changing in a network-like domain of an n-dimensional Euclidean space. The main aim is to establish a domain of the range of weight parameters that guarantees the stability of the differential-difference scheme (continuity by the initial data of the problem), to obtain estimates for the operator norms of the weak solutions of the scheme, to construct a sequence of solutions for a differential-difference system that is weakly compact in its state space. The latter is an important element when using numerical methods of analysis of a wide class of applied multidimensional problems and constructing computational algorithms for finding approximations to their solutions. The results are applicable in applied optimization problems arising from modeling network processes of continuum transport with the help of the formalisms of differential-difference systems.

Keywords: differential-difference scheme, weight parameters, network-like domain, stability conditions

For citation: Hoang V. N., Provotorov V. V. Stability of three-layer differential-difference schemes with weights in the space of summable functions with supports in a network-like domain. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 357–369 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-357-369, EDN: VGTILO

Введение

В инженерной практике потоковые явления, возникающие в процессе транспортировки сплошной среды и газов по сетевому или магистральному носителям, удобно рассматривать в дискретно изменяющемся времени. Такое видение приводит к полуаппроксимации дифференциальных систем, определяющих математическую модель указанного процесса, по временной переменной [1–3]. Этот подход восходит к методу полудискретизации Е. Роте [4], примененному им в 1930 г. к одномерному параболическому уравнению и обоснованному в рамках классической разрешимости при условии необходимой гладкости исходных данных. Представленные ниже результаты распространяют метод Роте на случай краевых задач для параболических уравнений общего вида в слабой постановке. Теоретической базой исследования явилась общая теория устойчивости разностных схем (см., например, [5, с. 382]) с той лишь разницей, что операторно-разностная схема, полученная полуаппроксимацией дифференциальной системы, рассматривается в классе слабых решений эллиптического уравнения этой системы. Исследуется трехслойная операторно-разностная схема с весовыми параметрами и эллиптическим оператором, определенным в соболевском пространстве функций с носителями в ограниченной сетеподобной области n-мерного евклидова пространства ($n \geqslant 2$). Ставится и решается вопрос отыскания достаточных условий, гарантирующих устойчивость схемы и описания множества значений весовых параметров. Эти условия являются достаточными для слабой разрешимости специальной начально-краевой задачи для параболического уравнения. Используемый в работе подход и предложенные методы исследования расширяют возможности анализа нестационарных процессов гидродинамики [6–10].

1. Необходимые обозначения, понятия и определения

Сетеподобная ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂D состоит из подобластей D_l с границами ∂D_l ($l = \overline{1,N}$), попарно примыкающих определенным образом в M узловых местах ω_j ($j = \overline{1,M}$, $1 \leqslant M \leqslant N-1$): $D = \hat{D} \bigcup \hat{\omega}$, $\hat{D} = \bigcup\limits_{l=1}^{N} D_l$, $\hat{\omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{M} \omega_j$, $D_l \bigcap D_{l'} = \varnothing$ ($l \neq l'$), $\omega_j \bigcap \omega_{j'} = \varnothing$ ($j \neq j'$), $D_l \bigcap \omega_j = \varnothing \; \forall\, l, j$ [3]. В ω_j при фиксированном j ($j = \overline{1,M}$) подобласть D_{l_0} имеет общие границы с D_{l_s} ($s = \overline{1,m_j}$), являющиеся поверхностями примыкания $S_{j\,s}$ ($\operatorname{meas} S_{j\,s} > 0$) D_{l_s} к D_{l_0}: $\bigcup\limits_{s=1}^{m_j} S_{j\,s} = S_j \subset \partial D_{l_0}$. Таким образом, ω_j определяется поверхностью S_j ($j = \overline{1,M}$). Структура области D аналогична геометрическому графу-дереву [1, 2]: каждая подобласть D_l имеет одно либо два узловых места и не менее одной поверхности примыкания к другим подобластям. Считаем, что S_j и $S_{j\,s}$ являются гладкими поверхностями, области D_l — звездные относительно некоторого шара, своего для каждой D_l.

Везде ниже используются классические пространства Лебега и Соболева. Пусть $L_2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) — гильбертово пространство действительных измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ определены формулами $(u, v)_\Omega = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$ и $\|u\|_\Omega = \sqrt{(u, u)}$. Далее, $W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство элементов $u(x) \in L_2(\Omega)$, для которых $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \in L_2(\Omega)$, $\kappa = \overline{1,n}$, скалярное произведение и норма: $(u,v)_\Omega^{(1)} = \int\limits_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum\limits_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx$, $\|u\|_\Omega^{(1)} = \sqrt{(u,u)_\Omega^{(1)}}$; применительно к D: $\int\limits_D u(x)dx = \sum\limits_{l=1}^N \int\limits_{D_l} u(x)dx$, для $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ соотношения

$$(u,v)_D = \int\limits_D u(x)v(x)dx, \;\; \|u\|_D = \sqrt{(u,v)_D}\,, \tag{1}$$

$$(u,v)_D^{(1)} = \int\limits_D \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx, \;\; \|u\|_D^{(1)} = \sqrt{(u,v)_D^{(1)}}\,. \tag{2}$$

Далее, обозначим через $C(\overline{D})$ совокупность непрерывных в $\overline{D}$ функций $u(x)$, $C^1(\overline{D}_l)$ $(l = \overline{1,N})$ — совокупности функций из $C(\overline{D})$, для которых при фиксированном l в $\overline{D}_l$ существуют непрерывные производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \in L_2(\Omega)$, $\kappa = \overline{1,n}$, и $C^1(\overline{D}) = \prod\limits_{l=1}^N C^1(\overline{D}_l)$ — совокупность функций, скалярное произведение и норма которых определяются формулами (2).

Обозначим через $\widetilde{C}_0^1(D)$ множество функций $u(x) \in C^1(\overline{D})$ с компактным носителем в области D, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_{S_j} a(x)_{S_j}\frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial \mathbf{n}_j}ds + \sum_{i=1}^{m_j}\int\limits_{S_{j\,i}} a(x)_{S_{j\,i}}\frac{u(x)_{S_{j\,i}}}{\partial \mathbf{n}_{j\,i}}ds = 0, \quad x \in S_{j\,i}, \;\; i = \overline{1,m_j}, \tag{3}$$

на поверхностях S_j, $S_{j\,i}$ $(i = \overline{1,m_j})$ всех узловых мест ω_j, $j = \overline{1,M}$; назовем (3) условиями взаимного примыкания подобластей D_l, элементы $\widetilde{C}_0^1(D)$ равны нулю вблизи границы ∂D. Здесь $a(x) \in L_2(D)$ и $a(x)_{S_j}$, $u(x)_{S_j}$, $a(x)_{S_{j\,i}}$, $u(x)_{S_{j\,i}}$ – сужения функций $a(x)$, $u(x)$ на S_j и $S_{j\,i}$, векторы $\mathbf{n}_j$ и $\mathbf{n}_{j\,i}$ – внешние нормали к S_j и $S_{j\,i}$, соответственно, $i = \overline{1,m_j}$, $j = \overline{1,M}$. В дальнейшем для упрощения записи символы, означающие сужение, и знак D в $(\cdot,\cdot)_D$, $\|\cdot\|_D$, $(\cdot,\cdot)_D^{(1)}$, $\|\cdot\|_D^{(1)}$ (см. (1), (2)) будут нами опускаться.

Определение 1. *Замыкание множества $\widetilde{C}_0^1(\overline{D})$ по норме (2) назовем пространством $\widetilde{W}_0^1(D)$.*

2. Дифференциально-разностная схема с весами

В дальнейшем изложении используются обозначения и понятия, аналогичные принятым в [5, с. 351]. В пространстве $\widetilde{W}_0^1(D)$ рассматривается множество трехслойных дифференциально-разностных схем с весовыми параметрами σ, σ_1 и σ_2 (σ, σ_1, σ_2 — вещественные числа), от выбора которых зависят устойчивость и точность схем.

На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку с шагом $\tau = T/K$: $\omega_\tau = \{t_k = k\tau,\ k = 0,1,...,K\}$.

Исходя из простоты представления результатов, для функций $y(k) := y(x;k)$,

$k = 0, 1, ..., K$, введем следующие обозначения, учитывая границы изменения индекса k:

$$
\begin{gathered}
y = y(k),\ \ \hat{y} = y(k+1),\ \ \check{y} = y(k-1),\\
y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y),\ \ y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}),\ \ y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}),\ \ y_{\bar{t}t} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}),\\
y_t^{(\sigma)} = \sigma y_t + (1-\sigma)y_{\bar{t}},\ \ y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1\hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2\check{y}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$
\begin{gathered}
y_t = y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{\tau}{2}y_{\bar{t}t},\ \ y_{\bar{t}} = y_{\overset{\circ}{t}} - \frac{\tau}{2}y_{\bar{t}t},\\
y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}t},\\
\hat{y} = y + \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y + \tau y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}t},\\
\check{y} = y - \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y - \tau y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}t},\\
y_t^{(\sigma)} = y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{2}(2\sigma - 1)\tau y_{\bar{t}t},\ \ y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = y + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 y_{\bar{t}t}.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(D)$ рассмотрим трехслойную дифференциально-разностную схему с весами σ, σ_1 и σ_2:

$$
\begin{gathered}
y_t^{(\sigma)} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y^{(\sigma_1,\sigma_2)}}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = f(k), \quad k = \overline{1, K-1},\\
y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x),
\end{gathered}
\tag{6}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y^{(\sigma_1,\sigma_2)}}{\partial x_\iota}\right) = \sum_{\kappa,\iota=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y^{(\sigma_1,\sigma_2)}}{\partial x_\iota}\right), \quad f(k) := f(x;k), \quad k = \overline{1, K-1}.
$$

Для каждого фиксированного k ($k = \overline{1, K-1}$) функция $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$ является решением уравнения (6) и удовлетворяет краевому условию

$$
y(k+1)\ |_{x\in\partial\Gamma} = 0,\ \ k = 1, 2, ..., K-1,
\tag{7}
$$

при этом предполагаются выполненными условия

$$
|b(x)| \leqslant \beta,\ \ x \in D,\ \ a_*\xi^2 \leqslant \sum_{\kappa,\iota=1}^{n} a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota \leqslant a^*\xi^2,\ \ \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^{n}\xi_\kappa^2,
\tag{8}
$$

с фиксированными положительными постоянными a_*, a^*, β и произвольными параметрами $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, кроме того, $a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x)$,

$$
\varphi_0(x),\ \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(D),\ \ f(k) = f(x;\, k) \in L_2(D)\ \ (k = \overline{1, K-1}).
\tag{9}
$$

Определение 2. *Совокупность функций $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$, $k = 1, 2, ..., K-1$, называется слабым решением системы (6), (7), если для каждого $y(k+1)$ удовлетворяются тождества*

$$
\begin{gathered}
\int\limits_D y_t^{(\sigma)}\,\eta(x)dx + \ell(y^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \eta) = \int\limits_D f(k)\eta(x)dx,\ \ k = \overline{1, K-1},\\
y(0) = \varphi_0(x),\ \ y(1) = \varphi_1(x),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

при произвольной функции $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(D)$; здесь $\ell(y^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \eta)$ *определяется соотношением*

$$\ell(y^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \eta) = \int\limits_D \left(\sum_{\kappa,\iota=1}^{n} a_{\kappa\,\iota}(x) \frac{\partial y^{(\sigma_1,\sigma_2)}}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x) y^{(\sigma_1,\sigma_2)} \eta(x) \right) dx.$$

Замечание 1. Для схемы (6) помимо $\varphi_0(x)$ следует задать $\varphi_1(x)$. Это можно осуществить, например, используя двухслойную схему 2-го порядка точности $\frac{1}{\tau}[y(1) - y(0)] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial[y(1)+y(0)]}{\partial x_\iota}\right) + \frac{1}{2}b(x)[y(1) + y(0)] = f(1)$. Слабая разрешимость такого уравнения относительно $y(1) = \varphi_1(x)$ устанавливается рассуждениями, аналогичными при доказательстве теоремы 1.

Замечание 2. При каждом фиксированном k ($k = 1, 2, ..., K - 1$) соотношение (6) в пространстве $\widetilde{W}_0^1(D)$ описывает эллиптическую краевую задачу относительно $y(k + 1) = \hat{y}$.

Теорема 1. *При выполнении условий* (8), (9) *система* (6), (7) *при достаточно малых* τ *однозначно слабо разрешима в пространстве* $\widetilde{W}_0^1(D)$.

Доказательство. Аналогично рассуждениям, приведенным в работе [2], устанавливается свойство полноты и базисности в пространствах $\widetilde{W}_0^1(D)$ и $L_2(D)$ системы обобщенных собственных функций оператора $\mathbf{A}y = -\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\,\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y$, $\mathbf{A} : \widetilde{W}_0^1(D) \to L_2(D)$. Оператор $\mathbf{A}$ имеет вещественные собственные значения конечной кратности с предельной точкой на $+\infty$. Сказанное означает, что для краевой задачи $\mathbf{A}\phi = \lambda\phi + g$ (λ — постоянная, $g \in L_2(\Gamma)$) в слабой постановке справедливы утверждения альтернативы Фредгольма в пространстве $\widetilde{W}_0^1(D)$.

Положив в (6) $k = 1$, получаем в $\widetilde{W}_0^1(D)$ относительно $y(2)$ краевую задачу $\sigma_1\mathbf{A}y(2) + \frac{1}{\tau}\sigma y(2) = F(\varphi_0, \varphi_1)$ в слабой постановке (здесь $F(\varphi_0, \varphi_1) = \mathbf{A}\big((\sigma_1 + \sigma_2 - 1) \times \times \varphi_1(x) - \sigma_2\varphi_0(x)\big) + \frac{1}{\tau}(2\sigma - 1)\varphi_1(x) - \frac{1}{\tau}(\sigma - 1)\varphi_0(x) + f(1)$), которая при $\sigma\sigma_1 > 0$ и достаточно малом τ слабо разрешима. Это же утверждение верно, если в (6) положить $k = 2, 3, ..., K - 1$. Теорема доказана. □

Для дифференциально-разностной схемы (6) получим достаточные условия устойчивости и априорные оценки для различных норм функций $y(k)$, $k = 0, 1, ..., K$, пространства $\widetilde{W}_0^1(D)$.

Предварительно приведем схему (6) к каноническому виду. Вводя операторные обозначения в $\widetilde{W}_0^1(D)$ $\mathbf{B}y = \mathbf{I}y + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)\mathbf{A}y$, $\mathbf{C}y = \frac{1}{2}(2\sigma - 1)\mathbf{I}y$, $\mathbf{R}y = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{A}y$ (здесь $\mathbf{I}$ — единичный оператор) и учитывая соотношения (4), (5), получим

$$\begin{gathered} \mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}} + \tau\mathbf{C}y_{\bar{t}t} + \tau^2\mathbf{R}y_{\bar{t}t} + \mathbf{A}y = f(k), \quad k = 1, 2, ..., K - 1, \\ y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x). \end{gathered} \tag{11}$$

Замечание 3. При $\sigma = \frac{1}{2}$ и $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ трехслойная дифференциально-разностная схема (6) определяется симметричной канонической схемой (11): $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, $\mathbf{C} = 0$, $\mathbf{R} = \mathbf{A}$, анализ которой аналогичен анализу классической схемы [4, p. 351] с той лишь разницей, что все рассмотрения осуществляются для операторов $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ в соболевском пространстве $\widetilde{W}_0^1(D)$.

Определение 3. *Совокупность функций* $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$, $k = 1, 2, ..., K-1$, *называется слабым решением системы* (7), (11), *если для каждого* $y(k+1)$ *удовлетворяются тождества*

$$\int\limits_D (\mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}} + \mathbf{C}y_{\bar{t}t} + \mathbf{R}y_{\bar{t}t})\eta(x)dx + \ell(y,\eta) = \int\limits_D f(k)\eta(x)dx, \;\; k = \overline{1, K-1},$$
$$y(0) = \varphi_0(x), \;\; y(1) = \varphi_1(x),$$

при произвольной функции $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(D)$.

Энергетическое тождество. Учитывая равенство $y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}t}$ (второе соотношение (5)), преобразуем схему (11) к виду

$$\begin{gathered}\mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}} + \tau\mathbf{C}y_{\bar{t}t} + \tau^2\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)y_{\bar{t}t} + \frac{1}{2}\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}) = f(k), \;\; k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) = \varphi_0(x), \;\; y(1) = \varphi_1(x).\end{gathered} \tag{12}$$

Умножим скалярно обе части (12) на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}} = \tau(y_t + y_{\bar{t}}) = \hat{y} - \check{y}$ и, учитывая равенство $\tau y_{\bar{t}t} = y_t - y_{\bar{t}}$ (см. (4)), получим

$$\begin{gathered}2\tau(\mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}}, \, y_{\overset{\circ}{t}})_D + \tau(\mathbf{C}(y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}}) + \\ +\tau^2\left(\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)(y_t - y_{\bar{t}}), \, y_t + y_{\bar{t}}\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \, \hat{y} - \check{y}) = 2\tau(f(k), \, y_{\overset{\circ}{t}}).\end{gathered} \tag{13}$$

Так как $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ — самосопряженные по Лагранжу операторы, имеют место соотношения

$$\begin{gathered}\left(\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)(y_t - y_{\bar{t}}), (y_t + y_{\bar{t}})\right) = \left(\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)y_t, \, y_t\right) - \left(\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)y_{\bar{t}}, \, y_{\bar{t}}\right), \\ (\mathbf{C}(y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}}) = (\mathbf{C}y_t, \, y_t) - (\mathbf{C}y_{\bar{t}}, \, y_{\bar{t}}), \\ (\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \, \hat{y} - \check{y}) = (\mathbf{A}\hat{y}, \, \hat{y}) - (\mathbf{A}\check{y}, \, \check{y}), \\ (\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \, \hat{y} - \check{y}) = [\mathbf{A}\hat{y}, \, \hat{y}) + \mathbf{A}y, \, y)] - [\mathbf{A}y, \, y) + \mathbf{A}\check{y}, \, \check{y})].\end{gathered} \tag{14}$$

Кроме того, при любых $w, z \in \widetilde{W}_0^1(D)$

$$(\mathbf{A}w, \, w) + (\mathbf{A}z, \, z) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(w + z), \, w + z) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}(w - z), \, w - z).$$

Полагая в полученном соотношении $w = \hat{y}$, $z = y$, а затем $w = y$, $z = \check{y}$, преобразуем выражение $(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \, \hat{y} - \check{y})$, используя последнее соотношение в (14):

$$\begin{gathered}(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \, \hat{y} - \check{y}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{A}(\hat{y} + y), \, \hat{y} + y) + (\mathbf{A}(\hat{y} - y), \, \hat{y} - y)] - \\ -\frac{1}{2}[(\mathbf{A}(y + \check{y}), \, y + \check{y}) + (\mathbf{A}(y - \check{y}), \, y - \check{y})].\end{gathered}$$

Подставляя это соотношение вместе с первыми двумя соотношениями из (14) в равенство (13), учитывая при этом $(\mathbf{A}(\hat{y} - y), \, \hat{y} - y) = \tau^2(\mathbf{A}y_t, \, y_t)$ и $(\mathbf{A}(y - \check{y}), \, y - \check{y}) = \tau^2(\mathbf{A}y_{\bar{t}}, \, y_{\bar{t}})$, приходим к основному энергетическому тождеству для трехслойной схемы (11):

$$2\tau(\mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}}, \, y_{\overset{\circ}{t}}) + \left[\frac{1}{4}(\mathbf{A}(\hat{y} + y), \, \hat{y} + y) + \left(\left(\tau^2\left(\mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{A}\right) + \tau\mathbf{C}\right)y_t, \, y_t\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{4}(\mathbf{A}(y+\check{y}),\, y+\check{y}) + \left(\left(\tau^2(\mathbf{R}-\frac{1}{4}\mathbf{A}\right)+\tau\mathbf{C})y_{\bar{t}},\, y_{\bar{t}}\right)\right] + 2\tau(f(k),\, y_{\overset{\circ}{t}}), \qquad (15)$$

которое является аналогом уравнения энергетического баланса для эволюционной дифференциальной системы в области $D \times (0,T)$ изменения переменных x и t, соответствующей системе (6), (7).

3. Устойчивость дифференциально-разностной схемы

Все последующие утверждения представлены для схемы (11), очевидно, они имеют место и для (6). При $2\sigma-1 \geqslant 0$, $\sigma_1-\sigma_2 \geqslant 0$, $\sigma_1+\sigma_2 > \frac{1}{2}$ имеем в соотношении (15) $\mathbf{B} = \mathbf{I}+\tau(\sigma_1-\sigma_2)\mathbf{A} > 0$, $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(2\sigma-1)\mathbf{I} \geqslant 0$, $\mathbf{R}-\frac{1}{4}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2-\frac{1}{2})\mathbf{A} > 0$.

Определим понятие устойчивости трехслойной дифференциально-разностной схемы (11), при этом будем использовать специальную норму (составную норму [5, с. 383]) вида

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1)+y(k)\|^2_{(1)} + \|y(k+1)-y(k)\|^2_{(2)} + \|y_t\|^2_{(3)} \qquad (16)$$

для элементов $Y(k+1)$ пространства $\widetilde{W}^1_0(D) \oplus \widetilde{W}^1_0(D)$, где $y(k+1)$, $y(k)$ являются элементами пространства $\widetilde{W}^1_0(D)$, а $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ и $\|\cdot\|_{(3)}$ — некоторые нормы $\widetilde{W}^1_0(D)$ и $L_2(D)$. Учитывая представления (16), тождество (15) примет вид

$$2\tau(\mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}},\, y_{\overset{\circ}{t}}) + \|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k),\, y_{\overset{\circ}{t}}), \qquad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4}\|y(k+1)+y(k)\|^2_{\mathbf{A}} + \tau^2\|y_t\|^2_{\mathbf{R}-\frac{1}{4}\mathbf{A}} + \tau\|y_t\|^2_{\mathbf{C}}, \\ \|Y(k)\|^2 &= \frac{1}{4}\|y(k)+y(k-1)\|^2_{\mathbf{A}} + \tau^2\|y_{\bar{t}}\|^2_{\mathbf{R}-\frac{1}{4}\mathbf{A}} + \tau\|y_{\bar{t}}\|^2_{\mathbf{C}}, \end{aligned} \qquad (18)$$

при этом $\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(1)+y(0)\|^2_{\mathbf{A}} + \tau^2\|y_{\bar{t}}(0)\|^2_{\mathbf{R}-\frac{1}{4}\mathbf{A}} + \tau\|y_{\bar{t}}(0)\|^2_{\mathbf{C}}$ и (см. (4)) $y_{\bar{t}}(0) = \frac{1}{\tau}(y(1)-y(0))$, через $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}}$ обозначена операторная норма $\mathbf{Q}$.

В силу линейности дифференциально-разностной системы (7), (11) слабое решение ее представимо в виде $y(k+1) = y_o(k+1)+y_f(k+1)$ для фиксированного k ($k = 1, 2, ..., K-1$), где $y_o(k+1) \in \widetilde{W}^1_0(D)$ — решение однородной задачи

$$\mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}} + \tau\mathbf{C}y_{\bar{t}t} + \tau^2\mathbf{R}y_{\bar{t}t} = 0, \;\; y(0) = \varphi_0(x), \;\; y(1) = \varphi_1(x), \qquad (19)$$

а $y_f(k+1) \in \widetilde{W}^1_0(D)$ — решение неоднородной задачи

$$\mathbf{B}y_{\overset{\circ}{t}} + \tau\mathbf{C}y_{\bar{t}t} + \tau^2\mathbf{R}y_{\bar{t}t} + \mathbf{A}y = f(k), \;\; y(0) = y(1) = 0. \qquad (20)$$

Определение 4. *Дифференциально-разностная схема* (11) *называется устойчивой*:

1) *по начальным данным* $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$, *если для задачи* (19) *справедлива априорная оценка*

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leqslant C_1\|\varphi_1\|^{(1)} + C_2\|\varphi_0\|^{(1)} + C_3\|y_{\bar{t}}(0)\|, \;\; k = \overline{1, K-1},$$

при любых $\varphi_0(x)$ *и* $\varphi_1(x)$ *из* $\widetilde{W}^1_0(D)$;

2) *по правой части, если для задачи* (20) *справедлива априорная оценка*

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leqslant C_4\|f(k)\|_{2,1}, \quad k=\overline{1,K-1},$$

при любых $f(k)$ $(k=\overline{1,K-1})$ *из* $L_2(D)$. *Постоянные* C_1, C_2, C_3, C_4 — *положительные, не зависящие от* τ *и* $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $f(k)$. *Дифференциально-разностная схема* (11) *устойчива, если она устойчива по начальным данным и по правой части.*

Теорема 2. *Если выполнены условия* $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, $\sigma_1+\sigma_2 > \frac{1}{2}$ *и условия* (8), (9), *то дифференциально-разностная схема* (11) *является устойчивой.*

Доказательство. При доказательстве теоремы используется тождество (17) и очевидное соотношение

$$2\tau(f(k),\, y_{\overset{\circ}{t}}) \leqslant \alpha\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}\|^2 + \frac{\tau}{\alpha}\|f(k)\|^2 \tag{21}$$

с произвольной не зависящей от τ постоянной $\alpha>0$.

Устойчивость по начальным данным. Из (17) при $f(k)=0$ вытекает неравенство $\|Y(k+1)\|^2 \leqslant \|Y(k)\|^2$, которое после суммирования по k' от 1 до k приводит к оценке

$$\|Y(k+1)\| \leqslant \|Y(1)\|. \tag{22}$$

Исходя из представления нормы $\|Y(k+1)\|^2$ в соотношениях (18), получаем неравенство $\|Y(k+1)\|^2 \geqslant D_*\|y(k+1)\|^2_{\mathbf{A}}$, где $D_* = \min\{\frac{1}{2},\, \sigma_1+\sigma_2-\frac{1}{2}\}$, при этом $D_*>0$. Таким образом, приходим к оценке

$$\sqrt{D_*}\,\|y(k+1)\|_{\mathbf{A}} \leqslant \|Y(k+1)\|. \tag{23}$$

Далее, исходя из представления $\|Y(1)\|^2$, получаем оценку нормы $\|Y(1)\|$:

$$\|Y(1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|y(1)+y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\frac{1}{4}}\,\|y(1)-y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{2\sigma-1}{2}\tau}\,\|y_{\bar t}(0)\|. \tag{24}$$

Подставляя в (22) оценки (23) и (24) (при $y(0)=\varphi_0(x)$, $y(1)=\varphi_1(x)$), приходим к оценке

$$\|y(k+1)\|_{\mathbf{A}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{D_*}}\|\varphi_1+\varphi_0\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{1}{2D_*}(\sigma_1+\sigma_2-\frac{1}{2})}\,\|\varphi_1-\varphi_0\|_{\mathbf{A}} +$$
$$+\sqrt{\frac{2\sigma-1}{D_*}\tau}\,\|y_{\bar t}(0)\|, \quad k=\overline{1,K-1}, \quad y_{\bar t}(0)=\frac{1}{\tau}(\varphi_1(x)-\varphi_0(x)).$$

Для анализа задач прикладного характера полученное неравенство можно несколько изменить, оценив $\|Y(1)\|^2$ с помощью энергетических норм $\|y(0)\|^2_{\mathbf{A}}$ и $\|y(1)\|^2_{\mathbf{A}}$: $\|Y(1)\|^2 \leqslant D^*\left[\|y(1)\|^2_{\mathbf{A}} + \|y(0)\|^2_{\mathbf{A}} + \frac{1}{2}T\|y_{\bar t}(0)\|^2\right]$, здесь $D^* = \max\{\frac{1}{2},\, \sigma_1+\sigma_2-\frac{1}{2}, 2\sigma-1\}$. Тогда из полученного неравенства следует

$$|Y(1)\| \leqslant \sqrt{D^*}\left[\|y(1)\|_{\mathbf{A}} + \|y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{T}{2}}\|y_{\bar t}(0)\|\right],$$

и, учитывая (23), оценка (22) представляется в виде

$$\|y(k+1)\|_{\mathbf{A}} \leqslant \sqrt{\frac{D^*}{D_*}}\left[\|y(1)\|_{\mathbf{A}} + \|y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{T}{2}}\|y_{\bar t}(0)\|\right], \quad k=\overline{1,K-1},$$

что и доказывает устойчивость схемы (19) по начальным данным.

Устойчивость по правой части. Обратимся к анализу задачи (20), учитывая при этом $Y(1) = 0$. Исходя из тождества (17), используя соотношение (21) ($\alpha = \alpha^*$, $0 < \alpha^* < 2$) и $\mathbf{B} > \mathbf{I}$, приходим к неравенству

$$(2-\alpha^*)\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}\|^2 + \|Y(k+1)\|^2 \leqslant \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{\alpha^*}\|(f(k)\|^2.$$

После суммирования этого неравенства по k' от 1 до k получаем

$$\sum_{k'=1}^{k}\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}(k')\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha^*(2-\alpha^*)}\sum_{k'=1}^{k}\tau\|(f(k')\|^2. \tag{25}$$

Оценим сумму $\sum\limits_{k'=1}^{k}\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}(k')\|^2$. Так как $y(k+1)+y(k) = 2\tau\sum\limits_{k'=1}^{k} y_{\overset{\circ}{t}}(k')$, то

$$\|y(k+1)+y(k)\|^2 \leqslant 4\tau^2\left(\sum_{k'=1}^{k} y_{\overset{\circ}{t}}(k'\right)^2 \leqslant 4k\tau\sum_{k'=1}^{k}\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}(k')\|^2. \tag{26}$$

Для $\zeta(k'+1) = y(k'+1) - y(k')$ справедливо $\zeta(k'+1) = 2\tau y_{\overset{\circ}{t}}(k') - \zeta(k')$ и $\|\zeta(k'+1)\| \leqslant 2\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}(k')\| + \|\zeta(k')\|$, $k' = 1, 2, \ldots, k$. Суммируя последнее неравенство по k' от 1 до k, получаем $\|\zeta(k+1)\| \leqslant 2\sum\limits_{k'=1}^{k}\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}(k')\|$ или

$$\|y(k+1)-y(k)\|^2 \leqslant 4\left(\sum_{k'=1}^{k}\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}(k')\|\right)^2 \leqslant 4k\tau\sum_{k'=1}^{k}\tau\|y_{\overset{\circ}{t}}(k')\|^2. \tag{27}$$

Складывая (26), (27) и учитывая соотношение (25), приходим к неравенству

$$\|y(k+1)\|^2 \leqslant 4\frac{T}{\alpha^*(2-\alpha^*)}\|(f(k)\|^2_{2,1}. \tag{28}$$

Если в тождестве (17) использовать соотношение (21) при $\alpha = 2$, то приходим к неравенству $\|Y(k+1)\|^2 \leqslant \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{\alpha^*}\|(f(k)\|^2$, после суммирования которого по k' от 1 до k получаем

$$\|Y(k+1)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k'=1}^{k}\tau\|(f(k')\|^2 = \frac{1}{2}\|(f(k)\|^2_{2,1}. \tag{29}$$

Из (23) следует неравенство $D_*^2\|\frac{\partial y(k+1)}{\partial x}\|^2 \leqslant D_*\|y(k+1)\|^2_{\mathbf{A}} \leqslant \|Y(k+1)\|^2$,

$$a_*D_*\left\|\frac{\partial y(k+1)}{\partial x}\right\|^2 \leqslant D_*\|y(k+1)\|^2_{\mathbf{A}} \leqslant \|Y(k+1)\|^2,$$

подставляя которое в (29), приходим к неравенству

$$\left\|\frac{\partial y(k+1)}{\partial x}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2a_*D_*}\|(f(k)\|^2_{2,1}. \tag{30}$$

Суммируя (28) и (30), получаем $\|y(k+1)\|^{(1)^2} \leqslant \left(\frac{4T}{\alpha^*(2-\alpha^*)} + \frac{1}{2D_*^2}\right) \|(f(k)\|_{2,1}^2$, что дает оценку в норме (2) пространства $W_2^1(D)$:

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leqslant C\|(f(k)\|_{2,1}, \quad k = \overline{1, K-1}, \tag{31}$$

с положительной постоянной C, зависящей только от α^* и D_*. Устойчивость схемы (11) доказана. □

Априорные оценки (28), (30) и (31) можно использовать для доказательства слабой разрешимости дифференциальной системы, соответствующей системе (6), (7), аналогично тому, как это сделано в работе [3].

Заключение

В работе получены условия устойчивости совокупности дифференциально-разностных схем (9) (или (13)) в терминах весовых параметров σ, σ_1 и σ_2 — условия теоремы 2. При этом представлены априорные оценки норм слабых решений этих схем, которые представляют эффективный инструмент не только для отыскания условий разрешимости схемы, но и непрерывности ее по исходным данным. Кроме того, получено обоснование метода полудискретизации по временной переменной эволюционной дифференциальной системы: 1) редукция этой системы с пространственной переменной, изменяющейся на сетеподобной области к дифференциально-разностной системе (9), (10); 2) достаточные условия, при выполнении которых свойства дифференциально-разностной системы переносятся на дифференциальную систему. Использование дифференциально-разностной системы для анализа эволюционной дифференциальной указывают путь алгоритмизации полученных результатов, необходимый при решении прикладных задач. Следует отметить, что представленные в работе результаты можно использовать при изучении различного рода сетеподобных процессов прикладного характера [11–13].

Список литературы

1. *Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N.* Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, вып. 3. С. 277–286. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305
2. *Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I.* Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, вып. 4. С. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411
3. *Хоанг В. Н., Провоторов В. В.* Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, вып. 137. С. 80–94. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94
4. *Rothe E.* Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle // Mathematische Annalen. 1931. Vol. 104. P. 355–362. https://doi.org/10.1007/BF01457943
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. Москва : Наука, 1977. 655 с.
6. *Doubova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M.* Controllability results for linear viscoelastic fluids of the Maxwell and Jeffreys kinds // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences – Series I – Mathematics. 2000. Vol. 331, iss. 7. P. 537–542. https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)01662-1

7. *Boldrini J. L., Doubova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M.* Some controllability results for linear viscoelastic fluids // SIAM Journal on Control and Optimization. 2012. Vol. 50, iss. 2. P. 900–924. https://doi.org/10.1137/100813592
8. *Renardy M.* On control of shear flow of an upper convected Maxwell fluid // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2007. Vol. 87. P. 213–218. https://doi.org/10.1002/zamm.200610313
9. *Wachsmuth D., Roubicek T.* Optimal control of planar flow of incompressible non-Newtonian fluids // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendung. 2010. Vol. 29. P. 351–376. https://doi.org/10.4171/ZAA/1412
10. *Debbouche A., Nieto J. J.* Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 245. P. 74–85. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.073
11. *Baranovskii E. S.* Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // Communications on Pure and Applied Analysis. 2019. Vol. 18, iss. 2. P. 735–750. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036
12. *Baranovskii E. S., Artemov M. A.* Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions // Mathematics. 2019. Vol. 7, iss. 7. Art. 611. https://doi.org/10.3390/math7070611
13. *Artemov M. A., Baranovskii E. S.* Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip // Acta Applicandae Mathematicae. 2017. Vol. 147, iss. 1. P. 197–210. https://doi.org/10.1007/s10440-016-0076-z

References

1. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 3, pp. 277–286. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305
2. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411
3. Hoang V. N., Provotorov V. V. Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, iss. 137, pp. 80–94 (in Russian). https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94
4. Rothe E. Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle. *Mathematische Annalen*, 1931, vol. 104, pp. 340–362 (in German). https://doi.org/10.1007/BF01457943
5. Samarsky A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977. 655 c. (in Russian).
6. Doubova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M. Controllability results for linear viscoelastic fluids of the Maxwell and Jeffreys kinds. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences – Series I – Mathematics*, 2000, vol. 331, iss. 7, pp. 537–542. https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)01662-1
7. Boldrini J. L., Doubova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M. Some controllability results for linear viscoelastic fluids. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, vol. 50, iss. 2, pp. 900–924. https://doi.org/10.1137/100813592
8. Renardy M. On control of shear flow of an upper convected Maxwell fluid. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2007, vol. 87, pp. 213–218. https://doi.org/10.1002/zamm.200610313
9. Wachsmuth D., Roubicek T. Optimal control of planar flow of incompressible non-Newtonian

fluids. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendung*, 2010, vol. 29, pp. 351–376. https://doi.org/10.4171/ZAA/1412
10. Debbouche A., Nieto J. J. Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 245, pp. 74–85. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.073
11. Baranovskii E. S. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2019, vol. 18, iss. 2, pp. 735–750. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036
12. Baranovskii E. S., Artemov M. A. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics*, 2019, vol. 7, iss. 7, Art. 611. https://doi.org/10.3390/math7070611
13. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2017, vol. 147, iss. 1, pp. 197–210. https://doi.org/10.1007/s10440-016-0076-z

Поступила в редакцию / Received 15.09.2022
Принята к публикации / Accepted 24.10.2022
Опубликована / Published 31.08.2023