Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 435–442
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 435–442
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-435-442, EDN: DRMGUT

Научная статья
УДК 514.76

Однородные пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей ненулевой кривизны

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, mozheynatalya@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-9237-7208, AuthorID: 386807

Аннотация. Важный подкласс среди однородных пространств формируют изотропно-точные однородные пространства, в частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Аффинная связность является эквиаффинной, если она допускает параллельную форму объема. Целью работы является локальное описание трехмерных однородных пространств, не допускающих инвариантных эквиаффинных связностей ненулевой кривизны, рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, инвариантная аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, тензор Риччи, эквиаффинная связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Для трехмерных однородных пространств неразрешимых групп Ли, допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны, определено, при каких условиях пространство не допускает эквиаффинных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них. Полученные результаты могут быть использованы в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах, а алгоритмы могут быть компьютеризированы и применены для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Ключевые слова: эквиаффинная связность, группа Ли, однородное пространство, тензор кривизны, тензор Риччи

Для цитирования: *Можей Н. П.* Однородные пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей ненулевой кривизны // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 435–442. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-435-442, EDN: DRMGUT

Article

Homogeneous spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections of nonzero curvature

N. P. Mozhey

Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Brovki St., Minsk 220013, Belarus

Natalya P. Mozhey, mozheynatalya@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-9237-7208, AuthorID: 386807

Abstract. An important subclass among homogeneous spaces is formed by isotropically-faithful homogeneous spaces, in particular, this subclass contains all homogeneous spaces admitting invariant affine connection. An affine connection is equiaffine if it admits a parallel volume form. The purpose of the work is the local description of the three-dimensional homogeneous spaces that do not admit invariant equiaffine connections of nonzero curvature. We have concerned the case of the unsolvable Lie group of transformations. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an invariant affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. A local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of a Lie algebra and its subalgebra. For three-dimensional homogeneous spaces of nonsolvable Lie groups that admit invariant connections of nonzero curvature only, it is determined under what conditions the space does not admit equiaffine connections. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. A feature of the methods presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of homogeneous spaces and connections on them. The results obtained in the work can be used in works on differential geometry, differential equations, topology, as well as in other areas of mathematics and physics, since many fundamental problems in these areas relate to the investigation of invariant objects on homogeneous spaces, the algorithms can be computerized and used for the solution of similar problems in large dimensions.
Keywords: equiaffine connection, Lie group, homogeneous space, curvature tensor, Ricci tensor
For citation: Mozhey N. P. Homogeneous spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections of nonzero curvature. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 435–442 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-435-442, EDN: DRMGUT

Введение

«Кривые и поверхности, служившие основными объектами изучения в классической дифференциальной геометрии, все больше вытесняются теперь n-мерными дифференцируемыми многообразиями с заданными на них различными геометрическими структурами» [1, с. 5]. Основная трудность построения инвариантного дифференциального исчисления на многообразии заключается в необходимости отождествлять касательные пространства к многообразию в различных его точках, следовательно, требуется определить параллельный перенос геометрических объектов из одной точки многообразия в другую. Эту трудность можно обойти, фиксируя на многообразии дополнительные структуры, например связности.

Еще Феликс Клейн [2] утверждал, что наиболее полезным способом изучения геометрических структур является изучение симметрий, т.е. групп преобразований, сохраняющих особенности структуры. Концепции и методы, основанные на группах преобразований, значительно изменили лицо современной математики и физики. Это обстоятельство связано в первую очередь с конструктивным подходом, который вносит в математику использование групп Ли. Одной из наиболее значительных идей Софуса Ли является выделение класса транзитивных групп преобразований как класса объектов, которые могут быть изучены конструктивно, так как любая проблема, относящаяся к однородным пространствам, может быть разрешена в явном виде и сведена к классификационной задаче. Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно-точные однородные пространства, в частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Этой связностью задается геометрия на многообразии, связность определяет ковариантное дифференцирование и параллельный перенос тензоров.

Аффинная связность является эквиаффинной, если она допускает параллельную форму объема (см. [3]). Однородные пространства неразрешимых групп Ли, допускающие аффинные связности только ненулевой кривизны, приведены в работе [4].

В данной работе изучается, при каких условиях указанные пространства не допускают эквиаффинных связностей.

1. Основные определения

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Проблема классификации однородных пространств $(M,\ \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G},\ G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (подробнее см. [5]); описание пар $(\bar{G},\ G)$, ассоциированных с данной парой $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$, дано Г. Д. Мостовым [6]. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не станет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}} \,/\, \mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ — изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M,\ \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [7]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [8, 9]. *Тензоры кривизны* R и *кручения* T инвариантной связности можно выразить в терминах связности Λ следующим образом (подробнее см. [8]): $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$, $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение (или является связностью без кручения), если $T = 0$. Определим *тензор Риччи* $\mathrm{Ric}(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (т. е. $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна [3].

Под *эквиаффинной связностью* будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

2. Описание однородных пространств, не допускающих эквиаффинных связностей

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ — базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар — запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [4], здесь d — размерность подалгебры, n — номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m — номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Теорема 1. *Все трехмерные однородные пространства, определяемые парами $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, но не допускающие эквиаффинных связностей, локально имеют следующий вид:*

– $\mathfrak{g}$ *разрешима:*

2.1.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	$-u_2$	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	$-u_1$	0	0	e_1	0
u_2	u_2	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

,

2.3.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

,

2.3.3.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	0	e_1	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

,

2.9.12.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

,

3.8.8.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	u_1	0	0
e_2	0	0	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	$-e_3$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_3	0
u_2	0	$-u_2$	0	$-e_3$	0	$2e_2-e_1$
u_3	0	u_3	$-u_1$	0	e_1-2e_2	0

,

4.13.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	e_2	0	$-e_4$
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_3	e_4	0

,

4.11.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	e_4	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_4	e_3
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_4$	0	e_2
u_3	0	u_3	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_2$	0

,

4.13.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	$-e_2$	0	e_4
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0

;

– $\mathfrak{g}$ *неразрешима:*

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	-$2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	-$2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

.

Действительно, в работе [4] найдены все трехмерные однородные пространства, определяемые парами $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны. Используя полученную классификацию, найдем, существуют ли эквиаффинные связности на пространствах указанного вида.

Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ — изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. При $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$ связность будем называть нулевой.

Аффинная связность является нулевой в случаях 2.9.12, 4.11.2, 4.13.2, 4.13.3, 3.8.8, 2.1.2, 2.3.2, 2.3.3, тензоры кручения в указанных случаях также нулевые. В случае 6.1.3 аффинная связность имеет вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{1,1}&0\\0&0&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

$r_{1,1}, p_{1,3} \in \mathbb{R}$, а тензор кручения —

$$T(u_1,u_2)=(0,0,0),\quad T(u_1,u_3)=(-p_{1,3}+r_{1,1},0,0)\,,\quad T(u_2,u_3)=(0,-p_{1,3}+r_{1,1},0)\,.$$

Соответственно, в случае 6.1.3 $T = 0$ при $r_{1,1} = p_{1,3}$.

Заметим, что во всех этих случаях, кроме 2.9.12 и 3.8.8, имеем $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$, т.е. указанная тривиальная связность является локально эквиаффинной, а в случае 6.1.3 локально эквиаффинная связность (без кручения) принимает вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}p_{1,3}&0&0\\0&p_{1,3}&0\\0&0&2p_{1,3}\end{pmatrix}.$$

В случае 2.9.12 имеем $[u_2, u_3] = -e_1$, но $\mathrm{tr}\Lambda(e_1) \neq 0$, т.е. связность не является локально эквиаффинной, в случае 3.8.8 аналогично $[u_2, u_3] = 2e_2 - e_1$, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda(2e_2 - e_1) \neq 0$, связность не является локально эквиаффинной.

Тензор кривизны в случае 2.9.12

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

тогда тензор Риччи $\mathrm{Ric}(y,z)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

и не является симметрическим. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Таким образом, получаем тензоры Риччи, приведенные в таблице.

Тензоры Риччи / Table. Ricci tensors

Пара	Тензор Риччи	Пара	Тензор Риччи
2.1.2	$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	2.3.2	$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
2.3.3	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	2.9.12, 3.8.8	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$
4.11.2	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$	4.13.2	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$
4.13.3	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$	6.1.3	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2p_{1,3}^2+2\end{pmatrix}$

Тензор Риччи является симметрическим тогда и только тогда, когда связность локально эквиаффинна, т. е. во всех приведенных случаях, кроме случаев 2.9.12 и 3.8.8, что соответствует полученному выше.

Для пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ выпишем изотропные представления. В случаях

$$2.1.\begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & -x & \\ & & y\\ \hline\end{array}\,;\ 2.3.\begin{array}{|ccc|}\hline & x & \\ -x & & \\ & & y\\ \hline\end{array}\,;\ 2.9.\begin{array}{|ccc|}\hline x & & y\\ & -2x & \\ & & 2x\\ \hline\end{array}\,;\ 3.8.\begin{array}{|ccc|}\hline x & & z\\ & y & \\ & & -y\\ \hline\end{array}\,;$$

$$4.11.\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & \\ & & -y\\ \hline\end{array}\,;\ 4.13.\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z\\ & & u\\ & -u & \\ \hline\end{array}\,;\ 6.1.\begin{array}{|ccc|}\hline x & z & w\\ u & y & v\\ & & \\ \hline\end{array}$$

$\Lambda(\mathfrak{g})$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$, поэтому соответствующие пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ не допускают эквиаффинных связностей, здесь для упрощения записи вместо стандартного обозначения для подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & -x & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}\ \middle|\ x,y\in\mathbb{R}\right\}\quad \text{использована запись}\quad \begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & -x & \\ & & y\\ \hline\end{array}\,,$$

причем переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, а базис подалгебры по умолчанию выбирается, придавая одной из переменных значение 1, а остальным — 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Прямыми вычислениями получаем, что остальные однородные пространства, найденные в работе [4], допускают эквиаффинные связности, т.е. других трехмерных однородных пространств неразрешимых групп Ли, допускающих аффинные связности только ненулевой кривизны, но не допускающих эквиаффинных связностей, кроме приведенных в теореме 1, не существует.

Заключение

Таким образом, найдено и приведено в явном виде полное локальное описание трехмерных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, но не допускающих эквиаффинных связностей. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. Полученные результаты могут быть использованы в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других областях математики и физики, а алгоритмы могут быть компьютеризированы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Список литературы

1. *Белько И. В., Бурдун А. А., Ведерников В. И., Феденко А. С.* Дифференциальная геометрия. Минск : Изд-во БГУ, 1982. 255 с.
2. *Klein F.* A comparative review of recent researches in geometry // Bulletin of the American Mathematical Society. 1893. Vol. 2. P. 215–249. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1893-00147-X
3. *Nomizu K., Sasaki T.* Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1994. 263 p.
4. *Mozhey N. P.* Connections of nonzero curvature on homogeneous spaces of unsolvable transformation groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. Vol. 15. P. 773–785. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.063
5. *Helgason S.* Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Academic Press, 1978. 628 p. https://doi.org/10.1090/gsm/034
6. *Mostow G. D.* The extensibility of local Lie groups of transformations and groups of surfaces // Annals of Mathematics. 1950. Vol. 52, iss. 3. P. 606–636. https://doi.org/10.2307/1969437
7. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // American Journal of Mathematics. 1954. Vol. 76, iss. 1. P. 33–65. https://doi.org/10.2307/2372398
8. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. New York : John Wiley and Sons, 1963. Vol. 1. 454 p.
9. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. New York : John Wiley and Sons, 1969. Vol. 2. 488 p.

References

1. Belko I. V., Burdun A. A., Vedernikov V. I., Fedenko A. S. *Differentsial'naya geometriya* [Differential Geometry]. Minsk, BSU Publ., 1982. 255 p. (in Russian).
2. Klein F. A comparative review of recent researches in geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1893, vol. 2, pp. 215–249. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1893-00147-X
3. Nomizu K., Sasaki T. *Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1994. 263 p.
4. Mozhey N. P. Connections of nonzero curvature on homogeneous spaces of unsolvable transformation groups. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 773–785. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.063

5. Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978. 628 p. https://doi.org/10.1090/gsm/034
6. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups of surfaces. *Annals of Mathematics*, 1950, vol. 52, iss. 3, pp. 606–636. https://doi.org/10.2307/1969437
7. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, iss. 1, pp. 33–65. https://doi.org/10.2307/2372398
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 1. New York, John Wiley and Sons, 1963. 454 p.
9. Kobayashi S., Nomizu K. . *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 2. New York, John Wiley and Sons, 1969. 488 p.

Поступила в редакцию / Received 23.08.2022
Принята к публикации / Accepted 22.03.2023
Опубликована / Published 30.11.2023