



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 109–122  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 109–122  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>, EDN: FKFRHA

Научная статья  
УДК 539.3

## Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел

Е. В. Мурашкин✉, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Россия, 119526, г. Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru), <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>, AuthorID: 129570

**Радаев Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru), <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

**Аннотация.** В работе рассматривается круг вопросов, связанных с построением двумерных фигур Ная для микрополярных континуумов. Метод двумерного матричного представления тензоров четвертого ранга хорошо известен из монографий по кристаллографии. Такие представления используются для упрощения тензорной записи уравнений анизотропных тел. Указанный метод позволяет представить определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого, третьего и второго рангов в виде своеобразных двумерных фигур. В настоящей работе выполнено построение фигур Ная для определяющих гемитропных тензоров четвертого и второго рангов. Получена матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного тела в атермическом случае. С помощью свойств псевдоскалярных единиц и их целых степеней выполнена процедура преобразования псевдотензорных основных уравнений микрополярной теории к формулировке в терминах абсолютных тензоров. Основное изложение статьи проводится в терминах абсолютных тензоров в декартовой прямоугольной системе координат.

**Ключевые слова:** упругий потенциал, определяющий тензор, псевдотензорная единица, гемитропный микрополярный континуум, фигура Ная, матричное представление

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 «Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред»).

**Для цитирования:** Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 109–122. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>, EDN: FKFRHA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids

E. V. Murashkin✉, Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1 Prospekt Vernadskogo, Moscow 119526 Russia

**Evgenii V. Murashkin**, [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru), <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>, AuthorID: 129570

**Yuri N. Radayev**, [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru), <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

**Abstract.** The paper is devoted to a wide range of problems related to the two-dimensional Nye figures for micropolar continua. The method of two-dimensional matrix representation of fourth-rank tensors is well



known from monographs on crystallography. Such representations are used to simplify tensor notation of the equations of anisotropic solids. This method allows us to represent the asymmetric constitutive tensors and pseudotensors of the fourth, third and second ranks in the form of specific two-dimensional figures. The Nye figures for the constitutive hemitropic tensors of the fourth and second ranks are given. The matrix form of the constitutive equations of a hemitropic micropolar solid in the athermal case is obtained. The transformation of the pseudotensor governing equations of the micropolar theory to a formulation in terms of absolute tensors is carried out via the pseudoscalar units and their integer powers. The study is carried out in terms of absolute tensors in a Cartesian rectangular coordinate system.

**Keywords:** elastic energy potential, constitutive tensor, pseudotensor unit, hemitropic micropolar continuum, Nye figure, matrix notation

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).

**For citation:** Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 109–122 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>, EDN: FKFRHA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Основные уравнения механики упругого поведения гемитропных (полуизотропных) микрополярных упругих тел основываются на квадратичных формах микрополярных упругих энергетических потенциалов силовых и моментных напряжений [1–10]. Представление таких потенциалов в общем случае требует привлечения формализма псевдотензорной алгебры и анализа [11–20]. Особенно актуально использование такого аппарата при моделировании процессов деформирования материалов, проявляющих полуизотропные (изотропные нецентрально-симметричные (ацентричные), гемитропные, демитропные, хиральные) свойства. Компоненты определяющих тензоров и псевдотензоров гемитропных потенциалов силовых и моментных напряжений проявляют чувствительность к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Предполагается, что сам упругий потенциал является абсолютным инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям пространства, в том числе к его зеркальным отражениям. В общем анизотропном случае упругий потенциал задается суммой произведений, которые являются абсолютными скалярами, а псевдотензорные веса сомножителей сбалансированы и в сумме равны нулю.

Аккуратное применение специальных представлений определяющих тензоров и псевдотензоров [6, 7, 21] позволяет редуцировать линейное анизотропное микрополярное тело (171 определяющая постоянная) к гемитропному, характеризующемуся девятью определяющими псевдоскалярами. В конвенциональном случае такими псевдоскалярами будут: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина и 6 псевдоскаляров, не имеющих физической размерности. Характерная микродлина оказывается псевдоскаляром отрицательного веса  $-1$  и проявляет чувствительность к отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

Существуют различные варианты представлений энергетических форм потенциалов асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных микрополярных сред [9, 10]. Существуют способы упрощения тензорной записи уравнений гемитропного континуума, например, известный из кристаллографии метод матричного представления определяющих уравнений [22–26], подробно изложенный в классической монографии Дж. Ф. Ная [22]. Указанный метод позволяет представить определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого, третьего и второго рангов в виде своеобразных фигур (симметричных матриц).

В настоящей работе метод матричного представления Ная модифицируется и применяется к упрощению записи энергетической квадратичной формы упругого потенциала напряжений. В отличие от метода Ная, симметричные по построению матрицы компонент определяющих



тензоров представляются их верхнетреугольными аналогами. Построены фигуры Ная для полуизотропного микрополярного тела. Получена матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного тела в атермическом случае.

### 1. Основные понятия ориентируемых трехмерных пространств

Рассмотрим основные понятия ориентируемого евклидова трехмерного пространства [27]. Ориентировать пространство можно различными способами, разделив их на право- и левоориентированные. В частности, задание ориентации плоского пространства может быть выполнено путем ренумерации трех линейно независимых направлений координатного репера.

Одним из фундаментальных объектов геометрии являются символы перестановок (альтернирующие символы):

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{в случае } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{в случае } i, j, k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Как известно, символы перестановок являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга веса  $-1$  и контравариантным псевдотензором третьего ранга веса  $+1$ , т.е. на основании их определения справедливо следующее равенство:

$$\epsilon^{[-1]}_{ljk} = \epsilon^{[+1]}_{ljk},$$

которое нарушает принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и равенстве весов равных друг другу псевдотензоров. Приведенное равенство является проявлением особого статуса символов перестановок.

Координатные направления в плоском трехмерном пространстве зададим с помощью трех базисных ковариантных векторов  $\mathbf{i}_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ). Локальный контравариантный базис  $\mathbf{i}^s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) однозначно определяется следующими соотношениями:

$$\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}^k = \delta_s^k \quad (k = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3),$$

где  $\delta_s^k$  — символы Кронекера.

Предполагая далее заданными скалярное и векторное произведение двух векторов, введем фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр (веса  $+1$ )

$$e = \mathbf{i}_1 \cdot (\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3)$$

и две псевдоскалярные единицы [28]

$$\overset{[+1]}{1} = e, \quad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}. \tag{1}$$

В силу (1) ориентации координатных реперов определяются знаком псевдоскалярной единицы положительного веса, т.е. для правоориентированных реперов  $\overset{[+1]}{1} > 0$ , для левоориентированных  $\overset{[+1]}{1} < 0$ .

Введем также целые степени  $g$  псевдоскалярных единиц, полагая

$$\overset{[g]}{1} = \left( \overset{[+1]}{1} \right)^g, \quad \overset{[-g]}{1} = \left( \overset{[-1]}{1} \right)^g.$$

Заметим, что целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т.е.

$$\nabla_k \overset{[\pm g]}{1} = \overset{[\pm g]}{0},$$

где  $\nabla_k$  — оператор ковариантного дифференцирования в метрике  $g_{js}$ .

Пользуясь псевдоскалярными единицами, определим абсолютные  $e$ -тензоры (тензоры перестановок, дискриминантные тензоры) следующими равенствами:

$$e_{ijk} = \overset{[+1]}{1} \epsilon_{ijk}, \quad e^{ijk} = \overset{[-1]}{1} \epsilon^{ijk}.$$

## 2. Деформации и напряжения в микрополярном континууме

Введем в трехмерном пространстве криволинейную систему координат  $x^k$ . Псевдотензорные формулировки уравнений микрополярного континуума существенным образом зависят от способа определения псевдовектора микроповорота  $\overset{[g]}{\phi}^s$  (спинорного перемещения) и его веса  $g$  [29]. Наиболее распространены формулировки с использованием спинорного перемещения веса  $g = +1$ , либо  $g = -1$ . Например, в работе [28] рассматривалась формулировка микрополярного упругого континуума с контравариантным вектором трансляционных перемещений  $u^k$  и контравариантным псевдовектором спинорных перемещений  $\overset{[+1]}{\phi}^s$  положительного веса  $g = +1$ . В настоящей работе рассмотрим псевдотензорную формулировку основных уравнений микрополярной теории упругости [18].

В качестве вектора трансляционных перемещений примем ковариантный абсолютный вектор  $u_k$ , а спинорные перемещения свяжем с контравариантным псевдовектором  $\overset{[+1]}{\phi}^s$  веса  $g = +1$ .

Ковариантное поле трансляционных перемещений порождает псевдовектор вихря, вычисляемый согласно

$$\overset{[+1]}{\omega}^s = \frac{1}{2} \epsilon^{skl} \nabla_k u_l. \tag{2}$$

Вслед за полным микроповоротом и вихрем поля трансляционных перемещений можно вести речь об относительном псевдовекторе микроповорота

$$\overset{[+1]}{\varphi}^s = \overset{[+1]}{\phi}^s - \overset{[+1]}{\omega}^s = \overset{[+1]}{\phi}^s - \frac{1}{2} \epsilon^{skl} \nabla_k u_l. \tag{3}$$

Этот псевдовектор, наряду с вектором трансляционного перемещения, считается в линейных микрополярных теориях малым и используется при конструировании асимметричного тензора деформации.

Асимметричный тензор деформации геометрически линейных микрополярных теорий

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{(kl)} + \epsilon_{[kl]} \tag{4}$$

складывается из симметричной (определяемой полностью полем перемещений)

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2} (\nabla_k u_l + \nabla_l u_k)$$

и антисимметричной части (определяемой полностью полем относительных микроповоротов (3))

$$\epsilon_{[kl]} = -\epsilon_{kls} \overset{[+1]}{\varphi}^s.$$

Его можно также определить через полный псевдовектор микроповорота (спина) согласно

$$\epsilon_{kl} = \nabla_k u_l - \epsilon_{kls} \overset{[-1]}{\phi}^s. \tag{5}$$



Помимо асимметричного тензора деформации, необходим еще тензор изгиба-кручения

$${}^{[+1]}_{\kappa_{k \cdot} s} = \nabla_k {}^{[+1]} \phi^s, \quad (6)$$

который представляет собой пространственный градиент полного псевдовектора микроповорота.

Определим наконец следующие ассоциированные с тензором  $\epsilon_{is}$  и псевдотензором  ${}^{[+1]}_{\kappa_{k \cdot} s}$  псевдовектор и вектор соответственно:

$${}^{[+1]} \varphi^s = -\frac{1}{2} \epsilon^{skl} \epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_s = \frac{1}{2} \epsilon_{skl} {}^{[+1]} \kappa_{[kl]}. \quad (7)$$

Псевдотензорная формулировка уравнений статического равновесия может быть получена из принципа виртуальных перемещений псевдотензоров [18] при использовании обобщенной на случай псевдотензоров теоремы Стокса [30–32]:

$$\begin{aligned} \nabla_k t^{kl} &= -X^l, \\ \nabla_k {}^{[-1]} \mu_{\cdot l}^k - 2 {}^{[-1]} \tau_l &= -Y_l, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $t^{kl}$  — асимметричный тензор силовых напряжений;  ${}^{[-1]} \mu_{\cdot l}^k$  — псевдотензор моментных напряжений;  $X^l$  — вектор объемных сил;  $Y_l$  — псевдовектор объемных моментов;  ${}^{[-1]} \tau_j$  — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2 {}^{[-1]} \tau_j = -\epsilon_{jik} t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} {}^{[-1]} \tau_j. \quad (9)$$

Ассоциированный (сопутствующий) абсолютный вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (9)

$$2\mu^i = \epsilon^{iks} {}^{[-1]} \mu_{[ks]}, \quad {}^{[-1]} \mu_{[is]} = e_{isj} \mu^j. \quad (10)$$

Псевдотензорная формулировка микрополярной теории (2)–(10) может быть преобразована к ковариантной, представленной в работе [8], согласно правилу балансировки весов [33, 34]:

$$\begin{aligned} \phi^s &= 1 \phi^s, & \tau_s &= 1 \tau_s, & \mu_{\cdot l}^k &= 1 \mu_{\cdot l}^k, \\ \varphi^s &= 1 \varphi^s, & \omega^s &= 1 \omega^s, & \kappa_{k \cdot}^s &= 1 \kappa_{k \cdot}^s. \end{aligned}$$

Для замыкания системы (2)–(10) необходимо задать упругий потенциал силовых и моментных напряжений. В дальнейшем изложении для упрощения тензорных представлений ограничимся формулировками в абсолютных тензорах в декартовой прямоугольной системе координат.

### 3. Первая основная форма потенциала силовых и моментных напряжений

Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т. е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного евклидова пространства. Введем микрополярный упругий потенциал  $\mathcal{U}$  [8, 35], рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i).$$

Упругий потенциал  $\mathcal{U}$  напряжений по физическому смыслу является объективной величиной и, значит, абсолютным инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям



пространства, в том числе к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Поэтому он (так же как и его первая вариация  $\delta\mathcal{U}$ ) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется суммой абсолютных скаляров

$$\delta\mathcal{U} = t_{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \mu_{(ij)}\delta\kappa_{(ij)} + 2\tau_i\delta\varphi_i + 2\mu_i\delta\kappa_i.$$

В итоге определяющие уравнения примут вид

$$t_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, \quad \mu_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_{(ij)}}, \quad 2\tau_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\varphi_i}, \quad 2\mu_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_i}. \quad (11)$$

Первую основную энергетическую форму анизотропного микрополярного континуума в декартовой системе координат в терминах абсолютных тензоров можно принять в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \mathcal{H}_1^{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \mathcal{H}_2^{(is)(lm)}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + \mathcal{H}_3^{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + \\ & + \mathcal{H}_4^{(is)}\varphi_i\varphi_s + \mathcal{H}_5^{(is)}\kappa_i\kappa_s + \mathcal{H}_6^{is}\varphi_i\kappa_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что определяющие тензоры, участвующие в представлении  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{H}_1^{(is)(lm)}$  и  $\mathcal{H}_2^{(is)(lm)}$ , — симметричны по парам индексов  $is, lm$  и по индексам внутри этих пар;  $\mathcal{H}_3^{(is)(lm)}$  — не симметричен по парам индексов  $is, lm$ , но симметричен по индексам внутри этих пар;  $\mathcal{H}_4^{is}$  и  $\mathcal{H}_5^{is}$  — симметричны;  $\mathcal{H}_6^{is}$  — асимметричен.

В случае гемитропного тела первая основная энергетическая форма записывается в декартовой системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & A_1\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + A_2\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + A_3\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\ & + A_4\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(sm)} + A_5\delta_{is}\varphi_i\varphi_s + A_6\delta_{is}\kappa_i\kappa_s + A_7\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + A_8\epsilon_{(is)}\kappa_{(is)} + A_9\kappa_i\varphi_i, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\delta_{is}$  — дельта Кронекера,  $A_a$  ( $a = 1, \dots, 9$ ) — определяющие постоянные (коэффициенты жесткости). Определяющие постоянные легко преобразуются к псевдоинвариантам  $A_a^{[g]}$  ( $a = 1, \dots, 9$ ;  $g = 0, \pm 1, \pm 2$ ) согласно правилу

$$A_a^{[g]} = 1 A_a^{[g]}.$$

Только три из них, а именно  $A_7^{[-1]}$ ,  $A_8^{[-1]}$ ,  $A_9^{[-1]}$ , оказываются чувствительными к зеркальным отражениям трехмерного пространства, что определяет гемитропность микрополярного тела, задаваемого потенциалом силовых и моментных напряжений (13).

В декартовой системе координат определяющие постоянные в выражении (13) связаны с определяющими тензорами анизотропного потенциала (12) следующими соотношениями [21, р. 66–70]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{islm} &= A_1\delta_{is}\delta_{lm} + A_3\delta_{il}\delta_{sm}, & \mathcal{H}_4^{is} &= A_5\delta_{is}, \\ \mathcal{H}_2^{islm} &= A_2\delta_{is}\delta_{lm} + A_4\delta_{il}\delta_{sm}, & \mathcal{H}_5^{is} &= A_6\delta_{is}, \\ \mathcal{H}_3^{islm} &= A_7\delta_{is}\delta_{lm} + A_8\delta_{il}\delta_{sm}, & \mathcal{H}_6^{is} &= A_9\delta_{is}. \end{aligned} \quad (14)$$

Определяющие уравнения (11) для гемитропного микрополярного континуума, определяемого потенциалом (13), получаются в виде

$$t_{(is)} = 2A_1\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(lm)} + 2A_3\delta_{il}\delta_{sm}\epsilon_{(lm)} + A_7\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(lm)} + A_8\kappa_{(is)},$$



$$\begin{aligned}\mu_{(is)} &= 2A_2\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(lm)} + 2A_4\delta_{il}\delta_{sm}\kappa_{(lm)} + A_7\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(lm)} + A_8\epsilon_{(is)}, \\ 2\tau_i &= 2A_5\varphi_i + A_9\kappa_i, \quad 2\mu^i = 2A_6\kappa_i + A_9\varphi_i.\end{aligned}$$

Вместо девяти коэффициентов жесткости  $A$  удобнее ввести другие определяющие постоянные:

$$\begin{aligned}A_1 &= G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, \quad A_2 = GL^2c_3, \quad A_3 = G, \\ A_4 &= GL^2, \quad A_5 = 2Gc_1, \quad A_6 = GL^2c_2, \\ A_7 &= GLc_4, \quad A_8 = GLc_5, \quad A_9 = GLc_6,\end{aligned}$$

с тем чтобы в итоге пришлось иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными постоянными:  $G$  — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);  $\nu$  — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности);  $L$  — характерная длина микрополярной теории;  $c_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) — физически безразмерные микрополярные упругие модули.

#### 4. Матричные обозначения определяющих соотношений гемитропного континуума

Для компактности записи тензорных уравнений иногда выгодно использовать матричные обозначения [22, р. 113–115], которые позволяют представить компоненты тензора четвертого ранга элементами матрицы, уменьшив количество индексов с 4 до 2, а тензоры второго ранга — векторами. Однако необходимо помнить, что двухиндексные экстенсивы, соответствующие тензорам четвертого ранга, не преобразуются по тензорным правилам.

Заменим компоненты симметричной части асимметричного тензора деформаций согласно следующей схеме:

$$\epsilon_{(is)} \rightarrow \epsilon_K = \begin{bmatrix} \epsilon_{(11)} & \epsilon_{(12)} & \epsilon_{(13)} \\ \epsilon_{(21)} & \epsilon_{(22)} & \epsilon_{(23)} \\ \epsilon_{(31)} & \epsilon_{(32)} & \epsilon_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\epsilon_6 & \frac{1}{2}\epsilon_5 \\ \frac{1}{2}\epsilon_6 & \epsilon_2 & \frac{1}{2}\epsilon_4 \\ \frac{1}{2}\epsilon_5 & \frac{1}{2}\epsilon_4 & \epsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом заменим симметричную часть тензора изгиба-кручения

$$\kappa_{(is)} \rightarrow \kappa_K = \begin{bmatrix} \kappa_{(11)} & \kappa_{(12)} & \kappa_{(13)} \\ \kappa_{(21)} & \kappa_{(22)} & \kappa_{(23)} \\ \kappa_{(31)} & \kappa_{(32)} & \kappa_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_1 & \frac{1}{2}\kappa_6 & \frac{1}{2}\kappa_5 \\ \frac{1}{2}\kappa_6 & \kappa_2 & \frac{1}{2}\kappa_4 \\ \frac{1}{2}\kappa_5 & \frac{1}{2}\kappa_4 & \kappa_3 \end{bmatrix}.$$

Для симметричных частей тензоров силовых и моментных напряжений введем следующую замену:

$$\begin{aligned}t_{(is)} \rightarrow t_K &= \begin{bmatrix} t_{(11)} & t_{(12)} & t_{(13)} \\ t_{(21)} & t_{(22)} & t_{(23)} \\ t_{(31)} & t_{(32)} & t_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_1 & t_6 & t_5 \\ t_6 & t_2 & t_4 \\ t_5 & t_4 & t_3 \end{bmatrix}, \\ \mu_{(is)} \rightarrow \mu_K &= \begin{bmatrix} \mu_{(11)} & \mu_{(12)} & \mu_{(13)} \\ \mu_{(21)} & \mu_{(22)} & \mu_{(23)} \\ \mu_{(31)} & \mu_{(32)} & \mu_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_6 & \mu_5 \\ \mu_6 & \mu_2 & \mu_4 \\ \mu_5 & \mu_4 & \mu_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного упругого тела принимает вид

$$\begin{cases} t_K = 2\mathcal{H}_1 \kappa_N \epsilon_N + \mathcal{H}_3 \kappa_N \kappa_N, \\ \mu_K = 2\mathcal{H}_2 \kappa_N \kappa_N + \mathcal{H}_3 \kappa_N \epsilon_N, \\ 2\tau_i = 2\mathcal{H}_4 \epsilon_s \varphi_s + \mathcal{H}_6 \epsilon_s \kappa_s, \\ 2\mu_i = 2\mathcal{H}_5 \epsilon_s \kappa_s + \mathcal{H}_6 \epsilon_s \varphi_s. \end{cases} \quad (15)$$

Преобразование определяющих тензоров  $\mathcal{H}_a^{islm}$  и  $\mathcal{H}_c^{is}$  ( $a = 1, 2, 3; c = 4, 5, 6$ ) в (15) к виду двумерных матриц произведено при помощи соответствующей замены индексов из таблицы. Метаиндексы  $a$  и  $c$  не являются тензорными индексами и нумеруют определяющие тензоры.

Соответствие пар тензорных и матричных индексов  
 Table. Correspondence of pairs of tensor and matrix indices

|                                      |    |    |    |        |        |        |
|--------------------------------------|----|----|----|--------|--------|--------|
| Пары тензорных индексов ( $is, lm$ ) | 11 | 22 | 33 | 23, 32 | 31, 13 | 12, 21 |
| Матричные индексы ( $K, N$ )         | 1  | 2  | 3  | 4      | 5      | 6      |

Рассмотрим матрицу  $\mathcal{H}_1^{KN}$  из первого слагаемого в квадратичной форме упругого потенциала напряжений (12). Компоненты определяющей матрицы  $\mathcal{H}_1^{KN}$  связаны с определяющими постоянными  $A$  при учете (14) следующим образом:

$$\mathcal{H}_1^{KN} = \begin{bmatrix} A + \frac{A}{3} & \frac{A}{1} & \frac{A}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{1} & A + \frac{A}{3} & \frac{A}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{1} & \frac{A}{1} & A + \frac{A}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{3} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Заметим, что матрица  $\mathcal{H}_1^{KN}$  симметрична относительно главной диагонали, поэтому при построении двумерной фигуры Ная можно опустить ее нижнюю треугольную часть (рис. 1, а).

Аналогичные рассуждения проведем для оставшихся слагаемых упругого потенциала напряжений (12). Компоненты матрицы  $\mathcal{H}_2^{KN}$  из второго слагаемого в форме упругого потенциала напряжений (12) определяются следующим образом:

$$\mathcal{H}_2^{KN} = \begin{bmatrix} A + \frac{A}{4} & \frac{A}{2} & \frac{A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{2} & A + \frac{A}{4} & \frac{A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{2} & \frac{A}{2} & A + \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Двумерная фигура Ная матрицы  $\mathcal{H}_2^{KN}$  при отбрасывании ее треугольной части ниже главной диагонали принимает вид, представленный на рис. 1, б.

В записи третьего слагаемого квадратичной формы потенциала напряжений (12) участвует определяющий тензор  $\mathcal{H}_3^{KN}$ . Компоненты его определяющей матрицы  $\mathcal{H}_3^{KN}$  выписываются следующим образом:

$$\mathcal{H}_3^{KN} = \begin{bmatrix} A + \frac{A}{8} & \frac{A}{7} & \frac{A}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{7} & A + \frac{A}{8} & \frac{A}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{7} & \frac{A}{7} & A + \frac{A}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{8} \end{bmatrix}. \quad (18)$$



Двумерная фигура Ная матрицы  $\mathcal{H}_{KN}^3$ , если учесть свойства симметрии и отбросить ее нижнюю треугольную часть, принимает вид, представленный на рис. 1, в.

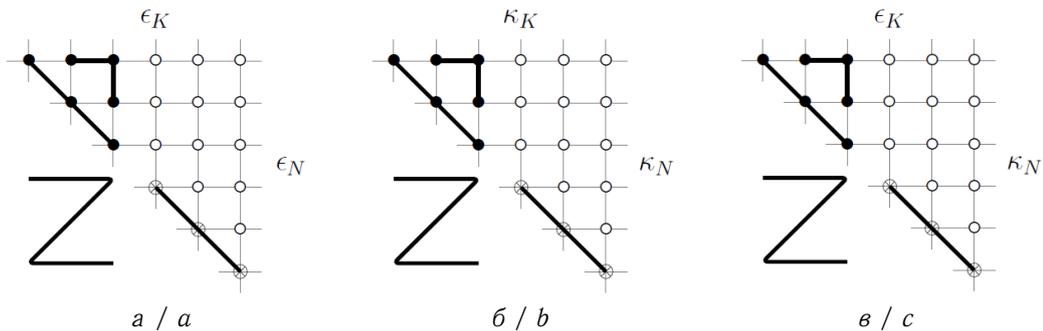


Рис. 1. Двумерные фигуры Ная гемитропных определяющих тензоров: а —  $\mathcal{H}_1^{islm}$ ; б —  $\mathcal{H}_2^{islm}$ ; в —  $\mathcal{H}_3^{islm}$ .  $\circ$  — нулевые компоненты,  $\bullet$  — компоненты, отличные от нуля,  $\otimes = (\mathcal{H}_a^{11} - \mathcal{H}_a^{12})$ , жирными отрезками соединены равные компоненты, Z означает, что ниже главной диагонали симметрично расположены идентичные (в плане числового равенства) элементы

Fig. 1. Two-dimensional Nye figures of hemitropic constitutive tensors: a is  $\mathcal{H}_1^{islm}$ ; b is  $\mathcal{H}_2^{islm}$ ; c is  $\mathcal{H}_3^{islm}$ .  $\circ$  denotes zero component,  $\bullet$  denotes nonzero component,  $\otimes = (\mathcal{H}_a^{11} - \mathcal{H}_a^{12})$ , equal components are connected by bold segments, Z means identical (in terms of numerical equality) elements symmetrically located below the main diagonal

Последние три слагаемых в записи квадратичной формы упругого потенциала напряжений (12) являются аналогами скалярного произведения векторов. В случае гемитропного тела определяющие тензоры  $\mathcal{H}_c^{is}$  ( $c = 4, 5, 6$ ) — шаровые (14). Фигуры Ная определяющих матриц  $\mathcal{H}_c^{is}$  ( $c = 4, 5, 6$ ) представлены на рис. 2.

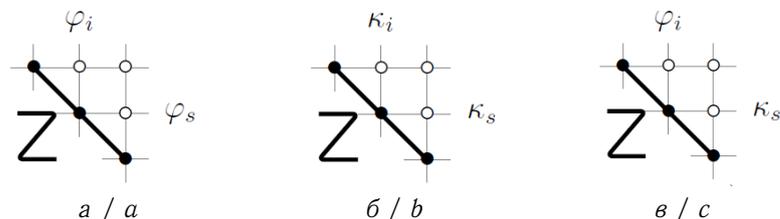


Рис. 2. Двумерные фигуры Ная гемитропных определяющих тензоров: а —  $\mathcal{H}_4^{is}$ ; б —  $\mathcal{H}_5^{is}$ ; в —  $\mathcal{H}_6^{is}$ .  $\circ$  — нулевые компоненты,  $\bullet$  — компоненты, отличные от нуля, жирными отрезками соединены равные компоненты, Z означает, что ниже главной диагонали симметрично расположены идентичные (в плане числового равенства) элементы

Fig. 2. Two-dimensional Nye figures of hemitropic constitutive tensors: a is  $\mathcal{H}_4^{is}$ ; b is  $\mathcal{H}_5^{is}$ ; c is  $\mathcal{H}_6^{is}$ .  $\circ$  denotes zero component,  $\bullet$  denotes nonzero component, equal components are connected by bold segments, Z means identical (in terms of numerical equality) elements symmetrically located below the main diagonal.

Двумерная фигура Ная для гемитропного микрополярного упругого тела может быть получена путем объединения элементарных фигур для определяющих матриц, изображенных на рис. 1, 2. В результате несложных геометрических преобразований получим фигуру Ная (рис. 3, а).

На рис. 3, б представлена фигура Ная для определяющих уравнений гемитропного микрополярного упругого тела. Пересечение жирных линий на рис. 3, б не говорит о связи соответствующих компонент определяющих матриц.

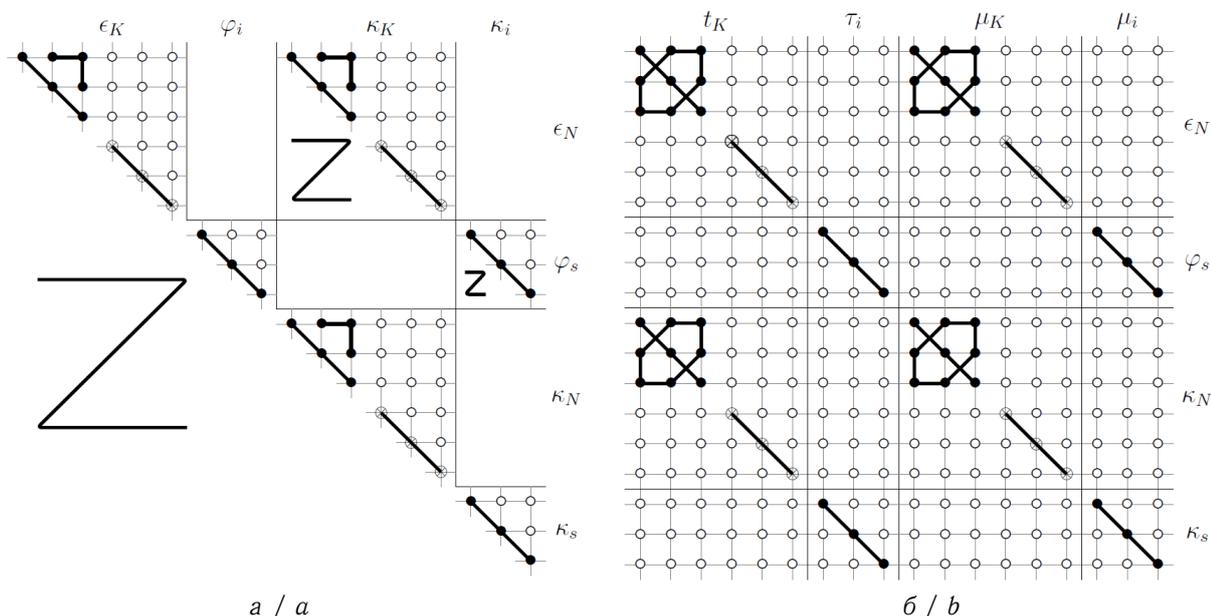


Рис. 3. Двумерные фигуры Ная гемитропного микрополярного упругого тела (а) и его определяющих уравнений (б).  $\circ$  — нулевые компоненты,  $\bullet$  — компоненты, отличные от нуля,  $\otimes = (\mathcal{H}_a^{11} - \mathcal{H}_a^{12})$ , жирными отрезками соединены равные компоненты, Z означает, что ниже главной диагонали расположены идентичные (в плане числового равенства) элементы

Fig. 3. Two-dimensional Nye figures of hemitropic micropolar elastic solid (a) and its constitutive equations (b).  $\circ$  denotes zero component,  $\bullet$  denotes nonzero component,  $\otimes = (\mathcal{H}_a^{11} - \mathcal{H}_a^{12})$ , equal components are connected by bold segments, Z means identical (in terms of numerical equality) elements symmetrically located below the main diagonal

### Заключение

В работе рассмотрены вопросы, связанные с построением двумерных фигур Ная для гемитропных микрополярных упругих континуумов.

1. Выполнена процедура преобразования псевдотензорной формулировки основных уравнений микрополярной теории к формулировке в терминах абсолютных тензоров.
2. Общая анизотропная форма микрополярного упругого потенциала напряжений редуцирована к гемитропной форме.
3. Получена матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного тела.
4. Построены двумерные фигуры Ная для определяющих тензоров гемитропного упругого микрополярного тела. В отличие от метода Ная симметричные по построению матрицы компонент определяющих тензоров представляются их верхнетреугольными аналогами.
5. Произведена сборка блоков Ная в фигуру, графически представляющую тензорные определяющие уравнения гемитропного тела.

### Список литературы

1. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat – Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
2. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics / ed. by H. Görtler. Berlin, Heidelberg : Springer, 1966. P. 153–158. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16)



3. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>
4. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford : Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg : Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>
6. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 106–117. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>, EDN: FQVGRK
7. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 118–127. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>, EDN: ESTJSA
8. *Радаев Ю. Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>, EDN: YOYJQD
9. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 86–100. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>, EDN: YOENQV
10. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 108–115. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>, EDN: DTZTJY
11. *Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. Москва : Наука, 1965. 456 с.
12. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. Москва : Наука, 1971. 376 с.
13. *Synge J. L., Schild A.* Tensor Calculus. New York : Dover Publication Inc., 1978. 324 p.
14. *Das A. J.* Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics. New York : Springer, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>
15. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. Москва ; Ленинград : ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с.
16. *Veblen O., Thomas T. Y.* Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, iss. 3. P. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>
17. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1948. 140 с.
18. *Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>, EDN: TODIFV
19. *Murashkin E. V., Radayev Yu. N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 3. С. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>, EDN: TYGBER
20. *Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 4. С. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>, EDN: IVEASC
21. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge : Cambridge University Press. 1931. 101 p.
22. *Nye J. F.* Physical Properties of Crystals, Their Representation by Tensors and Matrices. Oxford : Clarendon Press, 1957. 322 p.
23. *Wooster W. A.* Experimental Crystal Physics. Oxford : Clarendon Press, 1957. 116 p.
24. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden : Springer, 1966. 979 p.



25. Standards on Piezoelectric Crystals. Proceedings of the I.R.E. New York : IRE, 1949. 18 p.
26. Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // International Journal of Engineering Science. 1993. Vol. 31, iss. 4. P. 617–435. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)
27. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. Москва : Наука, 1966. 648 с.
28. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 5. С. 98–110. EDN: PHNOCG <https://doi.org/10.31857/S057232992370006X>, EDN: PHNOCG
29. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, iss. 6. P. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>, EDN: PINYDI
30. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 205–215. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>, EDN: VURXND
31. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>, EDN: ZKIAAJ
32. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 3–13. <https://doi.org/10.31857/S0572329922020155>, EDN: KRUCOL
33. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 17–26. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>, EDN: ZJWFGT
34. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An algebraic algorithm of pseudotensors weights eliminating and recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, iss. 6. P. 1416–1423. <https://doi.org/10.3103/s0025654422060085>, EDN: CSZGEL
35. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>, EDN: XYERLC

### References

1. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat – Körper. *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, pp. 48–69. <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
2. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. In: Görtler H. (ed.) *Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16)
3. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Berlin, Springer, 1972. 285 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>
4. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>
6. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Elements of the theory. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 2 (52), pp. 106–117 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>, EDN: FQVGRK
7. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Applications to continuum mechanics. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 2 (52), pp. 118–127 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>, EDN: ESTJSA



8. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2018, vol. 22, iss. 3, pp. 504–517 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>, EDN: YOYJQD
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 3 (53), pp. 86–100 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>, EDN: YOEHQV
10. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 4 (54), pp. 108–115. (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>, EDN: DTZTJY
11. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951. 434 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1965. 456 p.).
12. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1964. 361 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1971. 376 p.).
13. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publication Inc., 1978. 324 p.
14. Das A. J. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. New York, Springer, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>
15. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Leningrad, OGIZ, GITTL, 1948. 408 p.).
16. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1924, vol. 26, iss. 3, pp. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>
17. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge, Cambridge University Press, 1927. 114 p. (Russ. ed.: Moscow, IIL, 1948. 140 p.).
18. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media. *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, iss. 4, pp. 399–412 (in Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>, EDN: TODIFV
19. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, iss. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>, EDN: TYGBER
20. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, iss. 4, pp. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>, EDN: IVEASC
21. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge, Cambridge University Press, 1931. 101 p.
22. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford, Clarendon Press, 1957. 322 p.
23. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford, Clarendon Press, 1957. 116 p.
24. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden, Springer, 1966. 979 p.
25. *Standards on Piezoelectric Crystals. Proceedings of the I.R.E.* New York, IRE, 1949. 18 p.
26. Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems. *International Journal of Engineering Science*, 1993, vol. 31, iss. 4, pp. 617–435. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)
27. Rosenfeld B. A. *Mnogomernye prostranstva [Multidimensional Spaces]*. Moscow, Nauka, 1966. 648 p. (in Russian).
28. Radayev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, iss. 5, pp. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
29. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, iss. 6, pp. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>, EDN: PINYDI
30. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral



- theorem. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 205–215. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>, EDN: VURXND
31. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, iss. 4, pp. 776–786 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>, EDN: ZKIAAJ
  32. Murashkin E. V., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>, EDN: SNKUNC
  33. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 1 (51), pp. 17–26 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>, EDN: ZJWFGT
  34. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An algebraic algorithm of pseudotensors weights eliminating and recovering. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 6, pp. 1416–1423. <https://doi.org/10.3103/s0025654422060085>, EDN: CSZGEL
  35. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, iss. 3, pp. 457–474 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>, EDN: XYERLC

Поступила в редакцию / Received 18.08.2023

Принята к публикации / Accepted 11.09.2023

Опубликована / Published 01.03.2024