



Научная статья  
УДК 539.374

## Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле

Э. И. Старовойтов<sup>✉</sup>, Д. В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, д. 34

**Старовойтов Эдуард Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>, AuthorID: 152968

**Леоненко Денис Владимирович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики, геотехники и строительных конструкций, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>, AuthorID: 518257

**Аннотация.** Исследовано влияние теплового потока постоянной интенсивности на вынужденные колебания круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины, теплоизолированной по контуру и нижней плоскости. Использовано приближенное решение задачи теплопроводности, полученное с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пакета. Нестационарное температурное поле неоднородно по толщине пластины. Согласно гипотезе Неймана, свободные колебания пластины, вызванные мгновенным падением теплового потока, суммируются с вынужденными колебаниями от силовой нагрузки. Деформирование пакета пластины соответствует гипотезе ломаной линии. В относительно тонких внешних несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине, достаточно толстом заполнителе деформированная нормаль сохраняет прямолинейность и длину, но поворачивается на дополнительный угол. Постановка соответствующей начально-краевой задачи включает уравнения движения, полученные при помощи принципа Даламбера и вариационного метода Лагранжа. Начальные условия приняты однородными, контур пластины шарнирно оперт. Аналитическое решение неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных получено с помощью метода разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций. В результате выписаны аналитические выражения для трех искоемых функций — прогиба пластины, сдвига и радиального перемещения в заполнителе. Рассмотрен пример колебаний под действием мгновенно приложенной, равномерно распределенной нагрузки. Приведен числовой параметрический анализ частот собственных колебаний и полученного решения в зависимости от интенсивности теплового потока для пластины со слоями: титановый сплав, фторопласт-4, дюралюминий.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, вынужденные колебания, нестационарное температурное поле

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т22УЗБ-015).

**Для цитирования:** Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 123–137. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137>, EDN: TMUGDP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field

E. I. Starovoitov<sup>✉</sup>, D. V. Leonenko

Belarusian State University of Transport, 34 Kirova St., Gomel 246653, Belarus

**Eduard I. Starovoitov**, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>, AuthorID: 152968

**Denis V. Leonenko**, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>, AuthorID: 518257

**Abstract.** The effect of a constant intensity heat flux on forced oscillations of a circular three-layer plate with an asymmetric thickness is investigated. The plate is thermally insulated along the contour and the lower plane. An approximate solution of the thermal conductivity problem was used, obtained by averaging the thermophysical parameters of the materials of the layers over the thickness of the package. According to the Neumann hypothesis, free plate oscillations caused by an instantaneous drop in heat flow are summed up with forced oscillations from the power load. The deformation of the plate package corresponds to the polyline hypothesis. In relatively thin outer bearing layers, Kirchhoff's hypotheses are valid. In sufficiently thick incompressible filler, the deformed normal retains straightness and length, but rotates by an additional angle. The formulation of the corresponding initial boundary value problem includes the equations of motion obtained using the d'Alembert principle and the variational Lagrange method. The initial conditions are assumed to be homogeneous, the contour of the plate is pivotally supported. The analytical solution of an inhomogeneous system of partial differential equations is obtained using the method of expansion into a series according to a system of proper orthonormal functions. As a result, analytical expressions are written out for three desired functions – plate deflection, shear and radial displacement in the filler. An example of oscillations under the action of an instantaneously applied uniformly distributed load is considered. A numerical parametric analysis of the natural oscillation frequencies and the resulting solution depending on the intensity of the heat flux for a plate with layers of titanium alloy, fluoroplast-4, and duralumin is given.

**Keywords:** three-layer circular plate, forced oscillations, unstable temperature field

**Acknowledgements:** The was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project No. T22UZB-015).

**For citation:** Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 123–137 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137>, EDN: TMUGDP  
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Трехслойные конструкции, в частности пластины, находят широкое применение в различных областях современной техники: космической, авиационной, кораблестроительной; промышленном, гражданском и транспортном строительстве. Современные требования машиностроения к прочности конструкций, работающих в условиях воздействия физико-механических полей, обуславливают необходимость применения композиционных материалов и создания соответствующих расчетных моделей. Одним из основных внешних факторов является тепловое воздействие. Проблема исследования напряженно-деформированного состояния композитных элементов конструкций при комплексных квазистатических и динамических термосиловых нагрузках относится к числу наиболее актуальных в настоящее время. Созданию соответствующих механико-математических моделей деформирования посвящен ряд публикаций.

В монографиях [1–4] предлагаются подходы к разработке различных математических моделей как статического, так и динамического нагружения композитных элементов конструкций при комплексных термосиловых нагрузках. В них изложены постановки и методы



решения соответствующих краевых задач, анализируются возникающие температурные напряжения, приводятся результаты экспериментальных исследований зависимости упругих свойств материалов от температуры. Статьи [5–9] посвящены исследованию колебаний и волн в неоднородных цилиндрических оболочках. Нестационарное динамическое воздействие на сферические оболочки рассмотрено в работах [10, 11].

В публикациях [12–15] исследуется отклик пластин с нерегулярной структурой на действие быстропеременных по времени силовых и температурных нагрузений, на косоу удар, акустическое воздействие. Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами описаны в [16]. Резонансные колебания трехслойных пластин рассмотрены в работах [17–19]. Статьи [20–23] посвящены колебаниям трехслойных пластин, связанных с жидкостью. Воздействие нестационарной нагрузки на балку Тимошенко и влияние функционально-градиентных материалов на динамические и изгибные характеристики многослойных балок рассмотрено в [24–26]. Тепловой и радиационный удары по трехслойной пластине изучены в статье [27], флаттер — в [28].

Изгиб трехслойных физически нелинейных пластин в терморadiационном поле исследован в статьях [29, 30]. Теория многослойных оболочек, имеющих поперечно мягкую сердцевину и усиленных по их контуру, и трехслойных пластин при конечных прогибах разрабатывается в [31–33]. Отдельные задачи деформирования трехслойных стержней, пластин и панелей решены в работах [34–38].

Здесь рассмотрена задача о вынужденных упругих осесимметричных колебаниях шарнирно опертой трехслойной круговой пластины, возбужденных падающим тепловым потоком и мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузкой.

### 1. Температурное поле в трехслойной пластине

Начально-краевая задача решается в цилиндрической системе координат. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось  $z$  направлена перпендикулярно вверх, к первому слою (рис. 1). Толщины тонких несущих слоев  $h_1 \neq h_2$ , в заполнителе  $h_3 = 2c$ . Предполагается, что на наружную поверхность верхнего несущего слоя ( $z = c + h_1$ ) падает тепловой поток интенсивности  $q_t$ . Нижняя поверхность пластины и ее контур ( $z = -c - h_2, r = r_1$ ) принимаются теплоизолированными.

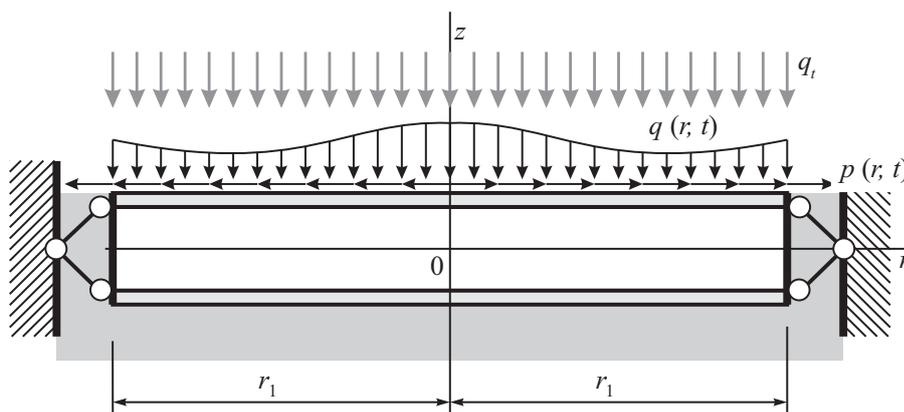


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной круговой пластины, шарнирно опертой по контуру

Fig. 1. Design scheme of a three-layer circular plate pivotally supported along the contour

При указанных условиях теплообмена нестационарное температурное поле  $T(z, t)$ , отсчитываемое от некоторого начального значения  $T_0$ , будет определяться следующим соотношением,



полученным с помощью усреднения теплофизических характеристик по толщине пластины [39]:

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где  $a = \lambda/C$ ,  $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$ ,  $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k / H$ ,  $H = \sum_{k=1}^3 h_k$ ,  $s = z/H$ ,  $\tau = ta/H^2$ ;  $a_k$  — усредненная температуропроводность;  $\lambda_k$ ,  $C_k$  — коэффициенты теплопроводности и теплоемкости материала  $k$ -го слоя;  $t$  — время.

## 2. Постановка начально-краевой задачи

Для пластины принимаются следующие гипотезы деформирования: в несущих слоях — Кирхгофа; в легком заполнителе — прямолинейность и несжимаемость деформированной нормали. Деформации связаны с напряжениями термоупругими соотношениями закона Гука:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k e_{\alpha}^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (k = 1, 2, 3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k e_{rz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $e_{\alpha}^{(k)}$  — девиаторные и  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  — шаровые части тензоров напряжений и деформаций в  $k$ -ом слое;  $G_k$ ,  $K_k$  — модули сдвигового и объемного деформирования;  $\alpha_{0k}$  — коэффициент линейного температурного расширения.

Рассматриваются вынужденные колебания в тепловом потоке трехслойной круговой пластины с легким заполнителем, шарнирно опертой по контуру. Общие уравнения движения пластины при изотермическом нагружении получены с помощью принципа Даламбера и вариационного метода Лагранжа и приведены в [18]. Поскольку температура не зависит от радиуса пластины, система дифференциальных уравнений в нестационарном температурном поле (1) имеет подобный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= q, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u(r, t)$  — радиальное перемещение координатной плоскости;  $w(r, t)$  — прогиб пластины;  $\psi(r, t)$  — относительный сдвиг в заполнителе;  $M_0 \ddot{w}$  — поперечные инерционные силы;  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2$ ;  $\rho_k$  — плотность материала;  $q(r, t)$  — внешняя осесимметричная поверхностная нагрузка; запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате, точкой вверху обозначена производная по времени;  $L_2$ ,  $L_3$  — линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+,$$

$$a_4 = c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right),$$

$$a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$



$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.$$

На шарнирно опертом контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев, следовательно, при  $r = r_1$  должны выполняться кинематические условия

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0, \quad (4)$$

где  $\sigma_r^{(k)}$  — радиальное напряжение,  $M_r$  — изгибающий момент

$$M_r = a_3 u_{,r} + a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r} - M_t, \quad M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_k K_k \int_{h_k} T z dz,$$

$$a_{60} = h_1 K_1^- \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + h_2 K_2^- \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^-,$$

$M_t$  — температурный момент, обусловленный объемной тепловой деформацией (2).

Начальные условия движения принимаются однородными

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0, \quad T(z, 0) = 0. \quad (5)$$

После некоторых очевидных преобразований и двукратного интегрирования первых двух уравнений система (3) приводится к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = q, \quad (6)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2}.$$

Перемещения ограничены в центре пластины, поэтому при отсутствии отверстий необходимо в (6) положить константы интегрирования  $C_2 = C_4 = 0$ . Выражение для температурного момента  $M_t$  в (4) получим с помощью (1):

$$M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} K_k \int_{h_k} T z dz, \quad (7)$$

где

$$M_{1t} = \frac{3q_t H \alpha_{01} K_1}{\lambda} \left[ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) \left( \tau - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2H^2} \left( \frac{(h_1 + c)^4 - c^4}{4} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2h_1(c + h_2)(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2) + h_1(c + \frac{1}{2}h_1)(c + h_2)^2 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2H}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^3} \left( \frac{H}{\pi n} \left( (-1)^n - \cos \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) - c \sin \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) \right];$$

$$M_{2t} = \frac{3q_t H \alpha_{02} K_2}{\lambda} \left[ -h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \left( \tau - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2H^2} \left( \frac{c^4 - (h_2 + c)^4}{4} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2h_2(c + h_2)(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2) - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)(c + h_2)^2 \right) - \right.$$

$$-\frac{2H}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^3} \left( \frac{H}{\pi n} \left( \cos \frac{\pi n h_2}{H} - 1 \right) - c \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \Bigg];$$

$$M_{3t} = \frac{3q_t H \alpha_{03} K_3}{\lambda} \left[ \frac{2c^3(c+h_2)}{3H^2} - \frac{2H}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^3} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{H}{\pi n} \left( \cos \frac{\pi n(2c+h_2)}{H} - \cos \frac{\pi n h_2}{H} \right) + c \left( \sin \frac{\pi n(2c+h_2)}{H} + \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right) \right].$$

Из граничных условий (4) для радиального перемещения и относительного сдвига следует

$$C_1 = -\frac{b_1}{r_1} w_{,r}(r_1, t), \quad C_3 = -\frac{b_2}{r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

Эти соотношения позволяют получить два граничных условия для прогиба при  $r = r_1$ :

$$w = 0, \quad a_7 w_{,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{,r} = -M_t, \tag{8}$$

где  $a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2$ ,  $a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2$ .

Таким образом, для определения динамического прогиба рассматриваемой пластины, вызванного распределенной нагрузкой  $q(r, t)$  и тепловым потоком  $q_t$ , имеем начально-краевую задачу, состоящую из неоднородного дифференциального уравнения в частных производных (6), однородных начальных условий (5) и неоднородных граничных условий на контуре (8). В силу принципа суперпозиции эту задачу можно разложить на две: вынужденные колебания под действием силовой нагрузки  $q(r, t)$  и свободные колебания в нестационарном температурном поле. Сумму решений этих задач дадут искомые перемещения.

### 3. Свободные колебания, вызванные тепловым потоком

В случае свободных колебаний нагрузка отсутствует и уравнения движения (6) принимают вид

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0, \tag{9}$$

где  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  – искомые перемещения при свободных колебаниях рассматриваемой пластины.

Для решения третьего уравнения в (9) искомый прогиб представляется суммой квазистатической  $w_s$  и динамической  $w_d$  частей составляющих:

$$w = w_s + w_d, \tag{10}$$

где квазистатический прогиб удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$L_3(w_{s,r}) \equiv w_{s,rrrr} + \frac{2w_{s,rrr}}{r} - \frac{w_{s,rr}}{r^2} + \frac{w_{s,r}}{r^3} = 0$$

при условиях на границе  $r = r_1$ :

$$w_s = 0, \quad a_7 w_{s,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{s,r} = -M_t.$$

Для сплошной рассматриваемой пластины квазистатический прогиб будет

$$w_s = \frac{r_1^2 M_t}{2(a_7 + a_8)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right]. \tag{11}$$



После подстановки решения (10) в третье уравнение системы (9), в начальные (5) и граничные (8) условия при учете выражения (11) получим замкнутую начально-краевую задачу для определения оставшейся части прогиба  $w_d$ . Соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных будет неоднородным:

$$L_3(w_{d,r}) + M^4 \ddot{w}_d = -\frac{r_1^2 M^4 \ddot{M}_t}{2(a_7 + a_8)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right], \quad (12)$$

где  $\ddot{M}_t$  — вторая производная по времени от температурного момента (7).

Начальные условия движения (5) становятся неоднородными, в них появляется ненулевая «исходная» скорость  $\dot{w}_d(t=0)$ :

$$w_d = 0, \quad \dot{w}_d = -\frac{r_1^2 \dot{M}_t(0)}{2(a_7 + a_8)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right], \quad (13)$$

где  $\dot{M}_t(0)$  — значение первой производной от температурного момента (7) в начальный момент времени.

Граничные условия для динамической части  $w_d$  становятся однородными, так как неоднородность забрала на себя квазистатическая часть прогиба  $w_s$ :

$$w_d = 0, \quad a_7 w_{d,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{d,r} = 0. \quad (14)$$

Решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (12), представим в виде

$$w_d^0 = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (15)$$

где  $v(r)$  — искомая координатная функция.

После подстановки (15) в однородное уравнение

$$L_3(w_{d,r}) + M^4 \ddot{w}_d = 0$$

получим для определения функции  $v(r)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_3(v,r) - \beta^4 v = 0, \quad (16)$$

где  $\beta = \omega^2 M^4$  — собственное число оператора  $L_3$ ,  $\omega$  — частота собственных колебаний.

Решение уравнения (16) известно [19]:

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r), \quad (17)$$

где  $J_0, Y_0$  — функции Бесселя;  $I_0, K_0$  — модифицированные функции Бесселя;  $C_5, \dots, C_8$  — константы интегрирования.

Функции  $Y_0(\beta r)$  и  $K_0(\beta r)$  имеют особенность типа логарифма в начале координат, поэтому необходимо в (17) положить  $C_7 = C_8 = 0$ . В результате получим

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) w(r, t). \quad (18)$$

Подставив выражения (15), (18) в граничные условия (14), получим однородную систему из двух алгебраических уравнений относительно неизвестных констант интегрирования  $C_5, C_6$ , из которой, потребовав ее нетривиальности решения, получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел  $\beta_n$ :

$$J_0(\beta r_1) \left[ a_7 \left( \beta I_0(\beta r_1) - \frac{I_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} I_1(\beta r_1) \right] + \\ + I_0(\beta r_1) \left[ a_7 \left( \beta J_0(\beta r_1) - \frac{J_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} J_1(\beta r_1) \right] = 0. \quad (19)$$

Первые 16 собственных чисел приведены в таблице. Термомеханические характеристики принятых материалов (титановый сплав, фторопласт-4, дюралюминий) заимствованы в [40].

Собственные числа для пластины VT-20–фторопласт-4–D16-T  
Table. Eigenvalues for the VT-20–fluoroplast-4–D16-T plate

$n$	Собственное число $\beta_n$	$n$	Собственное число $\beta_n$
0	3.192	8	28.244
1	6.298	9	31.382
2	9.428	10	34.519
3	12.561	11	37.657
4	15.697	12	40.795
5	18.833	13	43.932
6	21.970	14	47.070
7	25.107	15	50.208

При увеличении модуля упругости верхнего несущего слоя частоты возрастают, но незначительно. Если принять и верхний слой из дюралюминия, то изменения начинаются только с частоты  $\omega_2$  в четвертой значащей цифре.

После решения уравнения (19) частоты собственных колебаний будут

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \tag{20}$$

Таким образом, динамическая часть прогиба при свободных колебаниях описывается с помощью фундаментальной ортонормированной системы собственных функций

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right], \tag{21}$$

где  $d_n$  — нормировочный коэффициент.

Искомый прогиб  $w_d$  раскладывается в ряд по системе функций (21):

$$w_d = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \tag{22}$$

Подставив (22) в уравнение (12), начальные (13) и краевые условия (14), умножив члены уравнения на величину  $r v_n dr$  и интегрируя по радиусу пластины, в силу ортонормированности системы (21) получим для искомой функции времени  $T_n(t)$  дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \ddot{M}_t, \tag{23}$$

при начальных условиях

$$T_n(0) = 0, \quad \dot{T}_n(0) = - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \dot{M}_t(0),$$

где

$$I(\beta_n) = \int_0^{r_1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right] r v_n dr = \frac{2}{d_n \beta_n^2} \left( J_2(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_2(\beta_n r_1) \right).$$

Решением уравнения (23) будет

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \int_0^t \ddot{M}_t(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau. \tag{24}$$



Удовлетворяя начальным условиям в (23), имеем

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \dot{M}_t(0).$$

Для компактности суммарного решения квазистатический прогиб (11) также разложим в ряд по собственным функциям  $v_n$ :

$$w_s = \frac{r_1^2 M_t}{2(a_7 + a_8)} \sum_{n=0}^{\infty} I(\beta_n) v_n. \quad (25)$$

Полный динамический прогиб рассматриваемой пластины при свободных колебаниях получим, просуммировав составляющие (22) и (25). В результате из соотношений (9) получаем

$$\begin{aligned} u &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,r} \left( T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_1 r, \quad \psi = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,r} \left( T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_3 r, \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n \left( T_n + \frac{M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $C_1, C_3$  — константы интегрирования

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{b_1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{d_n} \left[ J_1(\beta_n r_1) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right] \left[ T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right], \\ C_3 &= \frac{b_2}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{d_n} \left[ J_1(\beta_n r_1) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right] \left[ T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, перемещения, описывающие собственные поперечные колебания трехслойной круговой шарнирно опертой пластины, вызванные нестационарным температурным полем, определены выражениями (26).

#### 4. Вынужденные колебания

Искомые перемещения  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  при вынужденных колебаниях пластины по-прежнему удовлетворяют системе уравнений в частных производных (6). Они представляются разложениями в ряды (26) по системе собственных функций (21).

Дифференциальное уравнение для определения искомой функции времени (23) в этом случае будет дополнительно учитывать коэффициенты  $q_n(t)$  разложения нагрузки в ряд по собственным функциям при тех же начальных условиях, учитывающих начальную скорость:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \ddot{M}_t. \quad (27)$$

Здесь

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr. \quad (28)$$

Решение уравнения (27) в общем виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \int_0^t \left( q_n(\tau) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \ddot{M}_t(\tau) \right) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau. \quad (29)$$

Следовательно, прогиб  $w(r, t)$ , относительный сдвиг  $\psi(r, t)$  и радиальное перемещение  $u(r, t)$  в круговой трехслойной пластине, находящейся под воздействием осесимметричной динамической нагрузки в нестационарном температурном поле, определяются соотношениями (26) с учетом собственных функций (21) и функций времени (29).

### 5. Колебания под действием внезапно приложенной нагрузки

Пусть на рассматриваемую круговую трехслойную пластину в начальный момент времени кроме теплового потока  $q_t$  воздействует мгновенно приложенная, равномерно распределенная по поверхности внешнего слоя динамическая нагрузка, изменяющаяся по времени как функция Хевисайда:

$$q(r, t) = q_0(t)H_0(t), \tag{30}$$

где  $H_0(t)$  — функция Хевисайда.

Подставив (30) в формулу (28), получим следующие коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)r_1}{M_0d_n\beta_n} \left( J_1(\beta_nr_1) - \frac{J_0(\beta_nr_1)}{I_0(\beta_nr_1)}I_1(\beta_nr_1) \right). \tag{31}$$

Функция времени  $T_n(t)$  вычисляется по формуле (29) с учетом коэффициентов (31). В результате

$$T_n(t) = -\frac{r_1^2I(\beta_n)}{2(a_7+a_8)\omega_n} \dot{M}_t(0) \sin(\omega_nt) + \frac{q_0r_1(1-\cos(\omega_nt))}{M_0d_n\beta_n\omega_n^2} \left( J_1(\beta_nr_1) - \frac{J_0(\beta_nr_1)}{I_0(\beta_nr_1)}I_1(\beta_nr_1) \right) - \int_0^t \left( \frac{r_1^2I(\beta_n)}{2(a_7+a_8)\omega_n} \ddot{M}_t(\tau) \right) \sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau. \tag{32}$$

Таким образом, вынужденные колебания при мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузке (30) в нестационарном температурном поле описываются перемещениями (26) с функцией времени (32).

Численные результаты представлены для круговых трехслойных пластин единичного радиуса, слои которых набраны из различных материалов. Для вычисления собственных частот  $\omega_n$  использовались формула (20) и собственные числа из таблицы. Толщины слоев  $h_1 = h_2 = 0,02$  м,  $h_3 = 0,05$  м, интенсивность распределенной нагрузки  $q_0 = 700$  Па.

На рис. 2, а показано изменение полного термосилового прогиба  $w$  во времени  $t$  пластины Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т: 1 —  $q_t = 0$ ; 2 —  $q_t = 2 \cdot 10^5$  Дж/(м<sup>2</sup>с). За счет квазистатической составляющей прогиба от теплового потока происходит отклонение осевой линии колебаний вверх. Аналогичный термосиловой процесс колебаний пластины ВТ-20-фторопласт-4-Д16-Т показан на рис. 2, б: 1 —  $q_t = 0$ ; 2 —  $q_t = 2 \cdot 10^5$  Дж/(м<sup>2</sup>с).

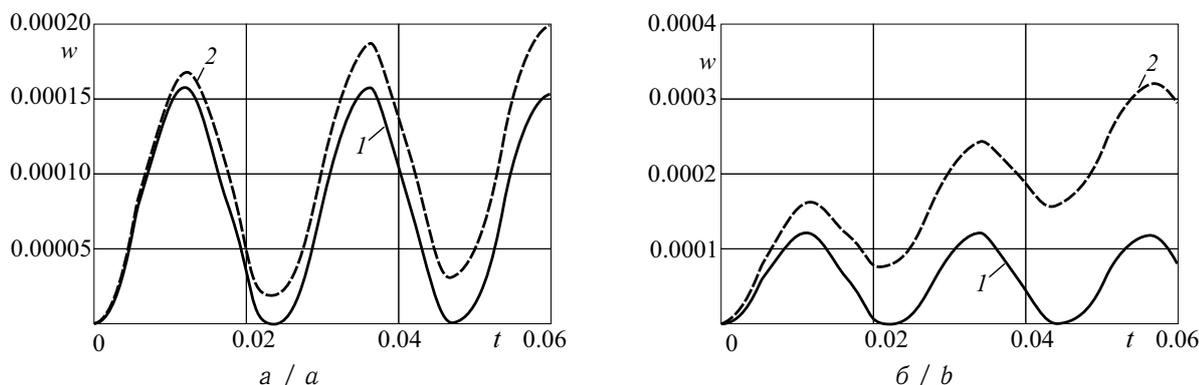


Рис. 2. Изменение полного прогиба  $w$ , м во времени  $t$ : а — Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т; б — ВТ-20-фторопласт-4-Д16-Т

Fig. 2. The change in the total deflection  $w$ , m in time  $t$ : a is D16-T-fluoroplast-4-D16-T; b is W-20-fluoroplast-4-D16-T



Замена верхнего дюралюминиевого несущего слоя на титановый сплав приводит к уменьшению силовой составляющей прогиба  $w$ . За счет большей теплоемкости титанового сплава увеличивается квазистатическая составляющая от теплового потока. Это вызывает значительное отклонение оси колебаний вверх по сравнению с предыдущим случаем.

Амплитуда колебаний в обоих случаях за счет воздействия теплового потока изменяется незначительно. Цикл колебаний без теплового воздействия является отнулевым.

## Заключение

Предложенная механико-математическая модель позволяет учитывать влияние нестационарного температурного поля на динамические характеристики вынужденных колебаний трехслойных упругих круговых пластин. Воздействие теплового потока в случае шарнирного опирания контура пластины приводит к возникновению свободных колебаний, которые накладываются на вынужденные колебания. Нестационарное температурное поле отклоняет ось, относительно которой происходят колебания, навстречу тепловому потоку. При увеличении жесткости материалов несущих слоев происходят увеличение собственных частот колебаний и уменьшение квазистатической части прогиба.

## Список литературы

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. Москва : Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Aghalovyan L., Prikazchikov D. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore : World Scientific Publishing Co., 2015. 360 p. <https://doi.org/10.1142/9789814579032>, EDN: YXUYTT
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells // Thin-walled Laminated Structures. Cham : Springer, 2019. P. 157–198. (Advanced Structured Materials, vol. 106). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4)
5. Bakulin V. N., Boitsova D. A., Nedbai A. Ya. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell // Mechanics of Composite Materials. 2021. Vol. 57, iss. 3. P. 623–634. <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>
6. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell // International Applied Mechanics. 2001. Vol. 37, iss. 7. P. 1196–1203. <https://doi.org/10.1023/A:1013290600951>
7. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 750–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
8. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 196–204. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>
9. Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
10. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. Т. 50, № 2. С. 118–128. EDN: TPPBRR
11. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2014. Vol. 43, iss. 2. P. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
12. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Известия



- Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
13. *Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S.* The oblique impact response of composite sandwich plates // *Composite Structures*. 2015. Vol. 133. P. 1127–1136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
  14. *Suvorov Ye. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76, iss. 5. P. 511–518. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015>
  15. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K.* Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. Vol. 53, iss. 6. P. 283–304. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>
  16. *Смирнов А. Л., Васильев Г. П.* Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 227–237. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>
  17. *Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M.* Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. Vol. 53, iss. 4. P. 609–630. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9673-9>
  18. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V.* Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads // *International Applied Mechanics*. 2003. Vol. 39, iss. 12. P. 1458–1463. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a>
  19. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovsky D. V.* Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51, iss. 5. P. 561–570. <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9527-2>
  20. *Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A.* Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation // *Journal of Physics: Conference Series* 2018. Vol. 944. Art. 012057. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
  21. *Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V.* Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation // *Journal of Physics: Conference Series* 2018. Vol. 944. Art. 012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
  22. *Быкова Т. В., Грушенкова Е. Д., Попов В. С., Попова А. А.* Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 351–366. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>
  23. *Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С.* Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2014. № 1. С. 3–11. EDN: [RXRDZJ](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-1-3-3-11)
  24. *Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A.* Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40, iss. 4. P. 439–447. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>
  25. *Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholly H.* The effect of functionally graded materials into the sandwich beam dynamic performance // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, iss. 11. P. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
  26. *Zenkour A. M., Alghamdi N. A.* Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2010. Vol. 17, iss. 6. P. 419–432. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>
  27. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, iss. 5. P. 580–589. <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0481-y>
  28. *Grover N., Singh B. N., Maiti D. K.* An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // *Aerospace Science and Technology*. 2016. Vol. 52. P. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
  29. *Yarovaya A. V.* Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation // *International Applied Mechanics*. 2006. Vol. 42, iss. 2. P. 206–213. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0078-z>



30. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины в нейтронном потоке локальной нагрузкой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 360–375. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375>
31. Paimushin V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. Vol. 53, iss. 1. P. 3–26. <https://dx.doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1>
32. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection // *Journal of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 143, iss. 9. Art. 04017057. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
33. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // *Acta Mechanica*. 2014. Vol. 225, iss. 2. P. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
34. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43, iss. 4. P. 451–459. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0042-6>
35. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient // *Meccanica*. 2016. Vol. 51, iss. 3. P. 725–739. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
36. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load // *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017. Vol. 6, iss. 1. <https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101>
37. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A. Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, iss. 8. P. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
38. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material // *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015. Vol. 3, iss. 08. P. 1487–1493. <https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02>
39. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>
40. Starovoitov É. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials // *Strength of Materials*. 1988. Vol. 20, iss. 4. P. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

## References

1. Bolotin V. V., Novichkov Iu. N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1980. 375 p. (in Russian).
2. Aghalovyan L., Prikazchikov D. *Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells*. Singapore, World Scientific Publishing Co., 2015. 360 p. <https://doi.org/10.1142/9789814579032>, EDN: YXUYTT
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled Laminated Structures*. Advanced Structured Materials, vol. 106. Cham, Springer, 2019, pp. 157–198. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4)
5. Bakulin V. N., Boitsova D. A., Nedbai A. Ya. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, vol. 57, iss. 3, pp. 623–634. <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>
6. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*, 2001, vol. 37, iss. 7, pp. 1196–1203. <https://doi.org/10.1023/A:1013290600951>
7. Belostochnyi G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular cylindrical shell in supersonic gas flow. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2018, vol. 22, iss. 4, pp. 750–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>



8. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 196–204. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>
9. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave occurrences mathematical modeling in two geometrically nonlinear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible liquid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
10. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, iss. 2, pp. 208–217. <https://doi.org/10.3103/S0025654415020107>
11. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 2, pp. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
12. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The geometrical irregular plates under the influence of the quick changed on the time coordinate forces and temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 442–451 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
13. Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, iss. 133, pp. 1127–1136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
14. Suvorov Ye. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 511–518. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015>
15. Paimushin V. N., Gazizullin R. K. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 6, pp. 283–304. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>
16. Smirnov A. L., Vasiliev G. P. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>
17. Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 4, pp. 609–630. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9673-9>
18. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*, 2003, vol. 39, iss. 12, pp. 1458–1463. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a>
19. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovsky D. V. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, iss. 5, pp. 561–570. <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9527-2>
20. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 944, art. 012057. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
21. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 944, art. 012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
22. Bykova T. V., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic response of a sandwich plate possessing a compressible core and interacting with a rigid die via a viscous fluid layer. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 351–366 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>
23. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S. Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 1, pp. 1–8. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010026>, EDN: WQYYKN
24. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 4, pp. 439–447. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>
25. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholly H. The effect of functionally graded materials into



- the sandwich beam dynamic performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, iss. 11, pp. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
26. Zenkour A. M., Alghamdi N. A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2010, vol. 17, iss. 6, pp. 419–432. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>
  27. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2011, vol. 47, iss. 5, pp. 580–589. <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0481-y>
  28. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, iss. 52, pp. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
  29. Yarovaya A. V. Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation. *International Applied Mechanics*, 2006, vol. 42, iss. 2, pp. 206–213. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0078-z>
  30. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of an elastic circular three-layer plate in a neutron flux by a local load. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 360–375 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375>
  31. Paimushin V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 1, pp. 3–26. <https://dx.doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1>
  32. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017, vol. 143, iss. 9, art. 04017057. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
  33. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, iss. 2, pp. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
  34. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, iss. 4, pp. 451–459. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0042-6>
  35. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 725–739. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
  36. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, 2017, vol. 6, iss. 1. <https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101>
  37. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A. Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, iss. 8, pp. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
  38. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*, 2015, vol. 3, iss. 08, pp. 1487–1493. <https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02>
  39. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Repeated alternating loading of an elastoplastic three-layer plate in a temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>
  40. Starovoitov É. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, iss. 4, pp. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

Поступила в редакцию / Received 28.11.2022

Принята к публикации / Accepted 16.01.2023

Опубликована / Published 01.03.2024