



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 14–27
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 14–27
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27>, EDN: DFKLFFV

Научная статья
УДК 539.3

Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением

В. Г. Баженов[✉], Е. Ю. Линник, Е. В. Нагорных, Д. А. Самсонова

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, г. Нижний Новгород, просп. Гагарина, д. 23

Баженов Валентин Георгиевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НИИ механики, bazhenov@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0077-7704>, AuthorID: 2734

Линник Елена Юрьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ механики, elenkalinnik@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5350-9738>, AuthorID: 666158

Нагорных Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики, ведущий научный сотрудник НИИ механики, pavlyonkova@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3330-5954>, AuthorID: 136430

Самсонова Дарья Анатольевна, младший научный сотрудник НИИ механики, ozornikova.dasha@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8413-875X>, AuthorID: 1203952

Аннотация. Разработаны двумерная постановка и метод численного решения задач деформирования и потери устойчивости многослойных упругопластических оболочек вращения при квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением. Определяющая система уравнений записывается в декартовой или цилиндрической системе координат. Моделирование процесса деформирования слоев оболочки осуществляется на основе гипотез механики сплошных сред или теории оболочек типа Тимошенко с учетом геометрических нелинейностей. Кинематические соотношения записываются в скоростях и формулируются в метрике актуального состояния. Упругопластические свойства оболочки описываются обобщенным законом Гука или теорией пластического течения с нелинейным изотропным упрочнением. Вариационные уравнения движения слоев оболочки выводятся из трехмерного уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред с учетом принятых гипотез теории оболочек либо плоского деформированного состояния или обобщенной осесимметричной деформации с кручением. Моделирование контактного взаимодействия слоев оболочки основано на условии жесткой склейки или условии непроникания по нормали и проскальзывания по касательной. Для решения определяющей системы уравнений применяются конечно-разностный метод и явная схема интегрирования по времени типа «крест». Методика апробирована на задаче потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с упругопластическими несущими слоями из алюминиевого сплава Д16Т и упругим наполнителем при квазистатическом и динамическом нагружении гидростатическим давлением, линейно возрастающим во времени. Задача решалась в двух вариантах: все три слоя моделировались конечными элементами сплошной среды или несущие слои моделировались оболочечными элементами, а наполнитель — элементами сплошной среды. Результаты расчетов по двум моделям хорошо согласуются друг с другом по предельным давлениям и по формам потери устойчивости.

Ключевые слова: многослойные оболочки вращения, упругопластические оболочки, упругий наполнитель, неосесимметричная потеря устойчивости, кручение, гипотезы Тимошенко, численное моделирование, контактное взаимодействие, осесимметричное нагружение

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00904, <https://rscf.ru/project/22-29-00904/>).



Для цитирования: Баженов В. Г., Линник Е. Ю., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А. Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 14–27. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27>, EDN: DFKLHV
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion

V. G. Bazhenov[✉], E. Yu. Linnik, E. V. Nagornykh, D. A. Samsonova

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue), Nizhny Novgorod 603950, Russia

Valentin G. Bazhenov, bazhenov@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0077-7704>, AuthorID: 2734

Elena Yu. Linnik, elenkalinnik@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5350-9738>, AuthorID: 666158

Elena V. Nagornykh, pavlyonkova@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3330-5954>, AuthorID: 136430

Daria A. Samsonova, ozornikova.dasha@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8413-875X>, AuthorID: 1203952

Abstract. A two-dimensional formulation and method for numerical solution of problems of deformation and loss of stability of multilayer elastoplastic shells of rotation under quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion have been developed. The defining system of equations is written in a Cartesian or cylindrical coordinate system. Modeling of the process of deformation of shell layers is carried out on the basis of hypotheses of solid mechanics or the theory of Timoshenko-type shells, taking into account geometric nonlinearities. Kinematic relations are written in speeds and formulated in the metric of the current state. The elastic-plastic properties of the shell are described by the generalized Hooke's law or the theory of plastic flow with nonlinear isotropic hardening. The variational equations of motion of the shell layers are derived from the three-dimensional balance equation of the virtual powers of the work of continuum mechanics, taking into account the accepted hypotheses of the theory of shells, either a plane deformed state or a generalized axisymmetric deformation with torsion. Modeling of the contact interaction of shell layers is based on the condition of rigid gluing or the condition of non-penetration along the normal and sliding along the tangential. To solve the governing system of equations, a finite-difference method and an explicit time integration scheme of the "cross" type are used. The method was tested on the problem of buckling of a three-layer cylindrical shell with elastoplastic load-bearing layers of aluminum alloy D16T and an elastic filler under quasi-static and dynamic loading by hydrostatic pressure, linearly increasing with time. The problem was solved in two versions: all three layers were modeled as a finite element of a continuous medium, or the load-bearing layers were modeled as shell elements, and the filler as elements of a continuous medium. The results of calculations using the two models are in good agreement with each other in terms of ultimate pressures and modes of buckling.

Keywords: multilayer shells of revolution, elastoplastic shells, elastic filler, non-axisymmetric loss of stability, torsion, Timoshenko's hypotheses, numerical modeling, contact interaction, axisymmetric loading

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-29-00904, <https://rscf.ru/project/22-29-00904/>).

For citation: Bazhenov V. G., Linnik E. Yu., Nagornykh E. V., Samsonova D. A. Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 14–27 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27>, EDN: DFKLHV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Многослойные оболочки вращения с упругим наполнителем широко применяются в современных конструкциях. К настоящему времени весьма тщательно проработаны аналитические и численные методы описания процесса выпучивания упругих тонкостенных оболочек вращения [1–7]. В работе [8] представлен анализ моделей упругого деформирования тонких оболочек. Анализ деформирования и потери устойчивости упругих многослойных (трехслойных) оболочек проведен в [9, 10]. Для описания поведения упругопластических оболочек, особенно при динамическом нагружении, целесообразно использовать компьютерное моделирование. При динамическом нагружении потеря устойчивости тонкостенных конструкций происходит по высшим формам [11–15].

В настоящей статье представлены постановка и методика численного решения нелинейных задач осесимметричного (или плоского) деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных осесимметричных нагружениях и кручении. Определяющая система уравнений записывается в декартовой или цилиндрической системе эйлеровых координат r, β, z (Oz — ось вращения) в текущей лагранжевой постановке. В силу осевой симметрии или плоской постановки все искомые функции зависят от радиальной и осевой координат и не зависят от окружной. Слои оболочек можно моделировать как элементами сплошной среды, так и оболочечными элементами. Материалы слоев полагаются изотропными, упругими или упругопластическими. Задачи формулируются в динамической постановке, что позволяет моделировать большие формоизменения упругопластических оболочек как в до-, так и за-критической фазе деформирования.

1. Нелинейные геометрические и физические соотношения для элементов сплошной среды

Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие формоизменения. Компоненты тензоров скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений \dot{u}_{ij}) \dot{e}_{ij} и скоростей вращения $\dot{\omega}_{ij}$ при учете равенства $\dot{u}_\beta = r(\dot{\theta})$ (θ — угол закручивания по окружной координате β) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{e}_{rr} &= \dot{u}_{r,r}, & \dot{e}_{\beta\beta} &= \dot{u}_r r^{-1}, & \dot{e}_{zz} &= \dot{u}_{z,z}, \\ \dot{e}_{zr} &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{z,r} + \dot{u}_{r,z}), & \dot{e}_{r\beta} &= \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,r}, & \dot{e}_{\beta z} &= \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,z}, \\ \dot{\omega}_{zr} &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{z,r} - \dot{u}_{r,z}), & \dot{\omega}_{r\beta} &= -\frac{1}{2}(r\dot{\theta}_{,r} + 2\dot{\theta}), & \dot{\omega}_{\beta z} &= -\frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Точка над переменной означает частную производную по времени, а символ после запятой — частную производную по соответствующей координате. Упругопластические свойства материалов описываются теорией течения с нелинейным изотропным упрочнением. Связь между компонентами девиатора скоростей напряжений $\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + P\delta_{ij}$ и упругими составляющими компонент девиатора скоростей деформаций $(\dot{e})^e_{ij} = \dot{e}_{ij} - \dot{e}\delta_{ij}/3 - \dot{e}^p_{ij}$ осуществляется на основе обобщенного закона Гука в метрике текущего состояния:

$$\begin{aligned} D_J \sigma'_{ij} &= 2G(\dot{e}^e_{ij})', & D_J \sigma'_{ij} &= \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\omega}_{ik} \sigma'_{kj} - \dot{\omega}_{jk} \sigma'_{ik}, \\ \dot{P} &= -K\dot{e}, & \dot{P} &= -\dot{\sigma}_{ii}/3, & \dot{e} &= \dot{e}^e_{ii}, & \dot{e}^p_{ii} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где D_J — производная Яуманна, описывающая поворот частицы среды как жесткого целого; K, G — модули объемного сжатия и сдвига; P — давление; δ_{ij} — символ Кронекера. Скорости пластических деформаций определяются ассоциированным законом течения:

$$\dot{e}^p_{ij} = \lambda \sigma'_{ij}, \quad \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_i^2(\varkappa), \quad \sigma_i = \sigma_i(\varkappa), \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{e}^p_{ij} \dot{e}^p_{ij}} dt, \quad (3)$$



где $\sigma_i = \sigma_i(\varkappa)$ — зависимость интенсивности напряжений от параметра Одвишта при монотонном нагружении (истинная диаграмма деформирования материала).

2. Нелинейные кинематические и физические соотношения для оболочечных элементов

Для каждого оболочечного элемента вводится местная лагранжева система координат $Os\xi$, связанная с общей соотношениями $ds = \psi_z dr - \psi_r dz$, $d\xi = \psi_r dr + \psi_z dz$, где s — длина дуги меридиана оболочечного элемента; ξ — координатная линия, нормальная к срединной поверхности; β — угловая координата; $\psi_z = r, s, \psi_r = -z, s$ — направляющие косинусы нормали к срединной поверхности. Оболочечные элементы полагаются тонкими, изменением метрики по толщине пренебрегаем, деформации поперечного сдвига и изгиба малы по сравнению с деформациями срединной поверхности, кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния. Распределение компонент скоростей перемещений по толщине оболочки записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_s(s, \xi, \beta, t) &= \dot{u}_s(s, \beta, t) + \xi \dot{\varphi}_s(s, \beta, t), & \tilde{u}_\xi(s, \xi, \beta, t) &= \dot{u}_\xi(s, \beta, t), \\ \tilde{u}_\beta(s, \xi, \beta, t) &= r \dot{u}_\beta(s, \beta, t) + \xi \dot{\varphi}_\beta(s, \beta, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\dot{u}_s(s, \beta, t)$ и $\dot{u}_\xi(s, \beta, t)$ — скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали, $\dot{u}_\beta(s, \beta, t)$ — скорость угла поворота по окружной координате β , $\dot{\varphi}_s(s, \beta, t)$ и $\dot{\varphi}_\beta(s, \beta, t)$ — угловые скорости поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения и в плоскости $0\xi\beta$.

Распределение компонент скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) \dot{e}_{ij} по толщине оболочки представляется в виде суммы скоростей деформаций срединной поверхности \dot{e}_{ij} и изгиба $\dot{\chi}_{ij}$. Компоненты скоростей деформаций \dot{e}_{ij} , $\dot{\chi}_{ij}$ и скорость вращения элемента $\dot{\omega}_{s\beta}$ записываются в местном базисе $s\xi\beta$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \dot{e}_{ij} + \xi \dot{\chi}_{ij}, & \dot{e}_{i\xi} &= \dot{e}_{i\xi} + \dot{\chi}_{i\xi} \quad (i, j = s, \beta), & \dot{e}_{\xi\xi} &= \dot{e}_{\xi\xi}, \\ \dot{e}_{ss} &= \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial s} + \frac{1}{R_s} \dot{u}_\xi, & \dot{e}_{\beta\beta} &= \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial \beta} + \frac{\dot{u}_s}{r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{R_\beta} \dot{u}_\xi, & \dot{e}_{s\beta} &= \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial \beta} - \dot{u}_\beta \frac{\partial r}{\partial s} \right), \\ \dot{e}_{s\xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_\xi}{\partial s} - \frac{1}{R_s} \dot{u}_s \right), & \dot{e}_{\beta\xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\xi}{\partial \beta} - \frac{1}{R_\beta} \dot{u}_\beta \right), \\ \dot{\chi}_{ss} &= \frac{\partial \dot{\varphi}_s}{\partial s}, & \dot{\chi}_{\beta\beta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_\beta}{\partial \beta} + \dot{\varphi}_s \frac{\partial r}{\partial s} \right), & \dot{\chi}_{s\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_\beta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\varphi}_s}{\partial \beta} - \frac{\dot{\varphi}_\beta}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \right), \\ \dot{\chi}_{s\xi} &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_s, & \dot{\chi}_{\beta\xi} &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_\beta, & \dot{\omega}_{s\beta} &= -\frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения для компонент скоростей деформаций через компоненты скоростей перемещений в общем базисе $rz\beta$ получаются из (5) путем подстановки выражений $\dot{u}_s = \dot{u}_r \psi_z - \dot{u}_z \psi_r$, $\dot{u}_\xi = \dot{u}_r \psi_r + \dot{u}_z \psi_z$, они приведены в [16]. Компоненты тензора скоростей деформаций \dot{e}_{ij} можно представить в виде суммы упругой \dot{e}_{ij}^e и пластической \dot{e}_{ij}^p составляющих. Предполагается, что упругие деформации малы, а пластические деформации могут быть большими. Компонента тензора напряжений Коши, нормальная к срединной поверхности оболочки, принимается равной нулю. Из условия плоского напряженного состояния и обобщенного закона Гука определяется компонента $\dot{e}_{\xi\xi}$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p, & \dot{e}_{ii}^p &= 0 \quad (i, j = s, \beta, \xi), \\ \dot{\sigma}_{\xi\xi} &= 0, & \dot{e}_{\xi\xi}^e &= \frac{\mu}{\mu - 1} (\dot{e}_{ss}^e + \dot{e}_{\beta\beta}^e). \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты тензоров скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и напряжений Коши σ_{ij} в местном базисе

$s\xi\beta$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ss} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{e}_{ss}^e + \mu\dot{e}_{\beta\beta}^e), \quad \dot{\sigma}_{\beta\beta} = \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{e}_{\beta\beta}^e + \mu\dot{e}_{ss}^e), \quad \dot{\sigma}_{s\beta} = \frac{E}{1+\mu}\dot{e}_{s\beta}^e, \\ \dot{\sigma}_{s\xi} &= \frac{E}{1+\mu}\dot{e}_{s\xi}^e, \quad \dot{\sigma}_{\xi\xi} = \dot{\sigma}_{\beta\xi} = 0, \\ D_J\sigma_{ij} &= \sigma_{jk}\dot{\omega}_{ki} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj} \quad (i, j, k = s, \beta), \\ \sigma_{ij} &= \int_0^t D_J\sigma_{ij}dt \quad (i, j = s, \beta), \quad \sigma_{s\xi} = \int_0^t \dot{\sigma}_{s\xi}dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь D_J — производная Яуманна, которая учитывает поворот элемента оболочки за счет сдвиговой деформации как квазижесткого целого относительно нормали к ее срединной поверхности при кручении. Местная сопутствующая система координат $Os\xi$ определяется формоизменениями оболочки без учета сдвиговых деформаций кручения, т. е. она является лагранжевой только для осесимметричной деформации. Заметим, что деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены из соображений устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Поэтому введение производной Яуманна для учета квазижесткого вращения при кручении вполне обосновано при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени [16]. В итоге существенно упрощается запись основных уравнений обобщенной осесимметричной задачи с кручением, так как за базовую берется лагранжева система координат осесимметричной задачи.

Учет упругопластических свойств материала оболочки осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ij}^p &= \lambda n_{ij}, \quad n_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}}, \quad \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \sigma_T^2(\varkappa), \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \\ \sigma &= (\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta})/3, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{e}_{ij}^p\dot{e}_{ij}^p}dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\sigma_T(\varkappa)$ — радиус поверхности текучести; \varkappa — параметр Оджквиста, δ_{ij} — символ Кронекера; параметр λ определяется из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

Усилия N_{ij} , моменты M_{ij} , масса N_ρ и момент инерции M_ρ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} N_{ij}(\beta) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\beta)d\xi, \quad M_{ij}(\beta) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\beta)\xi d\xi \quad (i, j = s, \beta, \xi), \\ N_\rho(\beta) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho d\xi, \quad M_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\xi^2 d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Уравнения движения многослойной оболочки вращения с учетом контактного взаимодействия между слоями

Вариационные уравнения движения записываются для каждого слоя оболочки на основе трехмерного уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред

$$\sum_{k=1}^K \left(\iiint_{V_k} \sigma_{ij}\delta\dot{e}_{ij}dV + \iiint_{V_k} \rho\ddot{u}_i\delta\dot{u}_i dV - \iint_{S_{pk}} p_i\delta\dot{u}_i dS - \iint_{S_{qk}} q_i\delta\dot{u}_i dS \right) = 0. \quad (10)$$



Здесь V_k — объем, занимаемый k -ым слоем оболочки; K — количество слоев оболочки; S_{pk} — зона действия внешнего давления; S_{qk} — поверхность контакта; \dot{u}_i, \ddot{u}_i — компоненты векторов скорости перемещения и ускорения в общей системе координат; σ_{ij} и \dot{e}_{ij} — компоненты тензоров напряжений Коши и скорости деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений); ρ — плотность; q_i — контактное давление; p_i — распределенная нагрузка; $\delta\dot{e}_{ij}, \delta\dot{u}_i$ — вариации \dot{e}_{ij}, \dot{u}_i (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями $\delta\dot{u}_i = 0$); $i, j = r, \beta, z$, точка над символом означает частную производную по времени t ; по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Для тонкого слоя вариационные уравнения движения выводятся из общего уравнения динамики (10) с учетом принятых гипотез теории оболочек (4)–(9)

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ (N_{s\xi}\xi\psi_r + N_{ss}\psi_z)\delta\dot{u}_{r,s} + (N_{s\xi}\psi_z - N_{ss}\psi_r)\delta\dot{u}_{z,s} + \nu r N_{s\beta}\delta\dot{u}_{\beta,s} + M_{ss}\delta\dot{u}_{\varphi,s} + \right. \\ & + [\nu r^{-1}N_{\beta\beta} + N_\rho(\ddot{u}_r - \nu r\dot{u}_\beta^2) - p_r - q_r]\delta\dot{u}_r + (N_\rho\ddot{u}_z - p_z - q_z)\delta\dot{u}_z + \\ & + \nu(r^2N_\rho\ddot{u}_\beta - p_\beta - q_\beta)\delta\dot{u}_\beta + (N_{s\xi} + \nu r^{-1}M_{\beta\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\varphi)\delta\dot{u}_\varphi + \\ & \left. + \nu(N_{\beta\xi} - M_{s\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\beta)\delta\dot{u}_\beta \right\} r ds - \\ & - [r(P_r\delta\dot{u}_r + P_z\delta\dot{u}_z) + \nu P_\beta\delta\dot{u}_\beta + T_s\delta\dot{u}_\varphi]_{s=0,L} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ν — параметр симметрии ($\nu = 0$ — плоская деформация, $\nu = 1$ — обобщенная осесимметричная деформация с кручением).

Для массивного слоя вариационные уравнения движения выводятся из общего уравнения динамики (10) с учетом соотношений Коши и условий плоского деформированного состояния или обобщенной осесимметричной деформации с кручением (1)–(3):

$$\begin{aligned} & \iint_\Omega \left\{ \sigma_{rr} \frac{\partial\delta\dot{v}_r}{\partial r} + \sigma_{rz} \left(\frac{\partial\delta\dot{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial\delta\dot{v}_z}{\partial r} \right) - \nu \left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} \delta\dot{v}_r + \frac{\sigma_{rz}}{r} \delta\dot{v}_z \right) \sigma_{zz} \frac{\partial\delta\dot{v}_z}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \nu \left(\sigma_{r\beta} \frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial r} + \sigma_{\beta z} \frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial z} \right) + \rho(w_r\delta\dot{v}_r + \nu w_\beta r^2\delta\dot{\theta} + w_z\delta\dot{v}_z) \right\} d\Omega - \\ & - \int_{S_p} (p_r\delta\dot{v}_r + \nu p_\beta r^2\delta\dot{\theta} + p_z\delta\dot{v}_z) dS - \int_{S_q} (q_r\delta\dot{v}_r + \nu q_\beta r^2\delta\dot{\theta} + q_z\delta\dot{v}_z) dS = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь Ω — площадь, занимаемая меридиональным сечением слоя; S_p — зона действия внешнего давления; S_q — зона контактного взаимодействия; функции $\dot{v}_\alpha = r^\nu \dot{u}_\alpha$ ($\alpha = r, z$), и $\dot{\theta} = \nu r^{-1} \dot{u}_\beta$ введены в задаче с осевой симметрией для устранения особенности численного решения на оси вращения.

Определяющая система уравнений (1)–(12) дополняется начальными и кинематическими граничными условиями. Для ее решения применяются конечно-разностный метод и явная схема интегрирования по времени типа «крест».

Скорости перемещений и перемещения узлов разностной сетки массивного тела и срединной поверхности оболочки определяются по рекуррентным соотношениям

$$\dot{u}_\alpha^{k+1/2} = \dot{u}_\alpha^{k-1/2} + (\Phi_\alpha^k + q_\alpha^k + p_\alpha^k) \frac{\Delta t^{k+1/2}}{\Phi_\zeta^k}, \quad u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k + \dot{u}_\alpha^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \quad (13)$$

где для оболочки $\alpha = r, z, \varphi, \beta$, для массивного тела $\alpha = r, z, \varphi, \beta$, Φ_α, Φ_ζ — обобщенные узловые силы и масса или момент инерции.

Взаимодействие слоев оболочки обеспечивается дополнительными условиями на контактных поверхностях. У массивных слоев контактными поверхностями являются части контура,

у тонких оболочек — части внешних поверхностей, т.е. учитывается актуальная толщина оболочки. Зоны контакта и компоненты контактного давления $q_\alpha(\alpha = r, z, \beta)$ определяются в ходе решения задачи на основе условий жесткой склейки или условий непроникания по нормали и проскальзывания по касательной [17]. На участке контакта вводится местный базис (s, ξ, β) , где s — направление касательной, ξ — нормали к поверхности, β — окружная координата (совпадает с окружной координатой общего базиса в цилиндрической системе координат). Усилие по нормали определяется из условия непроникания

$$\begin{cases} \dot{u}'_\xi = u''_\xi, \\ q'_\xi = -q''_\xi; \end{cases} \quad q_\xi = q'_\xi = \begin{cases} 0, & q_\xi \geq 0, \\ q_\xi, & q_\xi < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Условие жесткой склейки предполагает равенство касательных скоростей

$$\dot{u}'_\alpha = \dot{u}''_\alpha, \quad \alpha = s, \beta, \quad (15)$$

а условие свободного проскальзывания — равенство нулю касательных усилий

$$\dot{u}'_\alpha \neq \dot{u}''_\alpha, \quad q'_\alpha = q''_\alpha = 0, \quad \alpha = s, \beta. \quad (16)$$

Функции с одним и двумя штрихами относятся к первой либо второй контактирующей поверхности соответственно. Для контакта с отрывом условия непроникания (14) выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия. При нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности.

Для вычисления контактных давлений вариационное уравнение движения контактных границ записывается в местном базисе (s, ξ, β) . Сначала по известному на момент времени $t = t^k$ распределению параметров напряженно-деформированного состояния для узлов разностной сетки обеих контактных границ находятся скорости перемещений $\dot{u}'_\xi^{k+1/2}$ и перемещения u'_ξ^{k+1} по нормали по рекуррентным соотношениям (13) ($\alpha = \xi$) без учета контактного взаимодействия ($q_\xi = 0$). Для контакта типа жесткой склейки (15) контактные давления вычисляются по формуле

$$q'_\xi^{k+1} = \frac{(\dot{u}'_\xi)^{k+1/2} - (\dot{u}'_\xi)^{k+1/2} + \frac{(\Phi'_\xi)^k}{(\Phi'_M)^k} - \frac{(\Phi'_\xi)^k}{(\Phi'_M)^k}}{\left[\frac{1}{\Phi'_M} + \frac{1}{\Phi'_M} \right]^k}. \quad (17)$$

В случае контакта с отрывом сначала по перехлесту сеток определяется зона контакта. Если перехлест сеток для узлов отсутствует, то контактное давление равно нулю, в противном случае оно определяется по формуле (17). Нормальные контактные давления, вычисленные в местном базисе по формуле (17), перепроецируются из местного базиса в общий. Затем осуществляется расчет скоростей перемещений $\dot{u}'_\alpha^{k+1/2}$ и перемещений u'_α^{k+1} оболочки ($\alpha = r, z, \varphi, \beta$) и заполнителя ($\alpha = r, z, \beta$) по стандартной вычислительной схеме (13) с учетом контактных давлений. Разработанный подход позволяет моделировать нелинейное докритическое деформирование многослойных оболочек вращения, определять предельные нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы, исследовать процессы потери устойчивости по осесимметричным и неосесимметричным формам при динамических и квазистатических комбинированных нагружениях в условиях плоской и осесимметричной деформации.

4. Результаты численного моделирования

Исследована задача деформирования и потери устойчивости трехслойных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при гидростатическом давлении. Несущие слои оболочки выполнены из алюминиевого сплава Д16Т, заполнитель — из пенопласта. Начальная толщина несущих слоев оболочки $h_0 = 1$ мм, радиусы $R_{01} = 19.5$ мм и $R_{02} = 15.5$ мм. Модуль упругости алюминиевого сплава Д16Т $E = 7.29 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, плотность



$\rho = 2.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, предел текучести $\sigma_T = 290 \text{ МПа}$, истинная диаграмма деформирования материала получена на основе данных, представленных в [18], и приведена в табл. 1 и на рис. 1.

Таблица 1 / Table 1

Истинная диаграмма деформирования материала D16T
True strain diagram of material D16T

ε	σ_i	ε	σ_i	ε	σ_i
0	2.900	$3.510E - 03$	3.539	$1.500E - 02$	3.898
$1.550E - 04$	3.054	$4.010E - 03$	3.567	$1.750E - 02$	3.952
$3.110E - 04$	3.144	$5.010E - 03$	3.614	$2.010E - 02$	4.003
$5.910E - 04$	3.226	$6.000E - 03$	3.652	$2.250E - 02$	4.050
$1.030E - 03$	3.309	$7.030E - 03$	3.693	$2.510E - 02$	4.098
$1.520E - 03$	3.386	$8.020E - 03$	3.726	$2.750E - 02$	4.137
$2.044E - 03$	3.431	$9.020E - 03$	3.756	$3.000E - 02$	4.169
$2.488E - 03$	3.474	$1.000E - 02$	3.783	$1.000E - 01$	4.625
$3.020E - 03$	3.509	$1.250E - 02$	3.840	$3.500E - 01$	4.800

Начальная толщина заполнителя $H_0 = 3 \text{ мм}$. В расчетах варьировались механические характеристики заполнителя с целью исследования влияния его жесткости на предельную нагрузку и формы потери устойчивости. Механические свойства заполнителя приведены в табл. 2. В качестве самого «мягкого» заполнителя рассматривался пенополистирол Пеноплэкс [19] (строка $m = 1$ в табл. 2), самого «жесткого» — пенопласт ПХВ-1 [20] (строка $m = 5$ в табл. 2). Параметры для материалов $m = 2...4$ вычислялись линейной интерполяцией между значениями для $m = 1$ и $m = 5$.

Коэффициент постели заполнителя вычислялся по формуле $\gamma = \frac{E}{H_0(1-2\nu^2)}$ МПа/м [21],

цилиндрическая жесткость оболочек [1] — $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

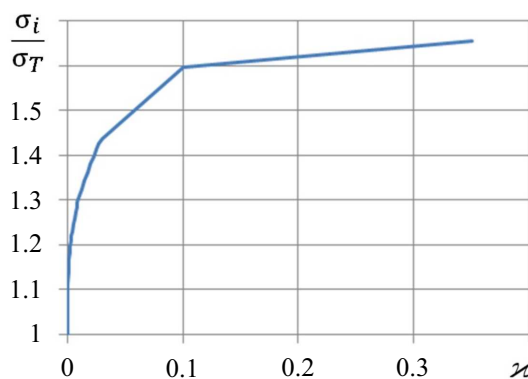


Рис. 1. Истинная диаграмма деформирования материала D16T

Fig. 1. True strain diagram of material D16T

Таблица 2 / Table 2

Упругие свойства заполнителя
Elastic properties of the filler

m	Плотность ρ , кг/м ³	Модуль Юнга E , МПа	Коэффициент Пуассона μ	Коэффициент постели γ , МПа/м	Цилиндрическая жесткость оболочек $D \cdot 10^8$, МПа·м ³
1	25	15.0	0.10	5 102	3.41
2	100	18.6	0.16	6 537	4.30
3	200	23.4	0.24	8 822	5.59
4	300	28.2	0.32	11 831	7.08
5	400	33.0	0.40	16 190	8.85

Полагалось, что оболочка является весьма длинной, так что она находится в условиях плоского деформированного состояния. Имеется плоскость симметрии, проходящая через ось вращения. В связи с этим расчетная область представляет собой половину поперечного сечения трехслойной оболочки. Внешнее давление монотонно возрастает по линейному закону от времени: $p = p_0 t$. В расчетах задавалось четыре варианта параметра скорости нагружения p_0 : 10, 200, 10^3 и 10^5 МПа/с. Внутренняя поверхность трехслойной оболочки свободна

от нагрузки. Численное исследование выполнялось с применением двух расчетных моделей трехслойной оболочки. Модель 1: все слои оболочки моделировались на основе уравнений (1)–(3), (12) конечными элементами сплошной среды [22]. Модель 2: несущие алюминиевые слои моделировались согласно теории оболочек (4)–(9), (11) оболочечными конечными элементами, а пенопластовый наполнитель — конечными элементами сплошной среды (1)–(3), (12).

По результатам расчетов строились зависимости относительного среднего прогиба \hat{w} и безразмерного окружного усилия \hat{N} от внешнего давления p для внешнего слоя оболочки. Относительный средний прогиб внешнего слоя оболочки определялся по формуле

$$w = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L (u_{\xi})_i, \hat{w} = -\frac{w}{h_0},$$

где w — средний прогиб, L — количество узлов разностной сетки в окружном направлении, $(u_{\xi})_i$ — прогиб (перемещение по нормали) i -го узла расчетной сетки, покрывающей срединную линию внешнего слоя оболочки. Безразмерное окружное усилие вычислялось по формуле

$$N_s = \int_0^h \sigma_{ss} d\xi, \hat{N} = -\frac{N_s}{\sigma_T h_0},$$

где σ_T — предел текучести.

Начальный этап деформирования цилиндрической оболочки характеризуется ее равномерным обжатием и линейным ростом среднего прогиба и окружного усилия в зависимости от давления. Накопление вычислительных ошибок в некоторый момент времени приводит к отклонению геометрии оболочки от круговой формы, резкому росту среднего прогиба и резкому падению окружного усилия. Этот процесс соответствует физической потере устойчивости в эксперименте. В качестве критерия потери устойчивости оболочки примем резкий рост относительного среднего прогиба \hat{w} . Величину внешнего давления p^* , при котором происходит потеря устойчивости, будем называть предельным давлением. Критическое давление, которое определяется как собственное значение, и предельное давление p^* могут различаться при динамическом нагружении.

Для контроля этого процесса в численное решение вводится малая погрешность — отклонение поперечного сечения слоев оболочки от круглой формы с малой амплитудой, т. е. начальное несовершенство геометрии. Начальный прогиб срединной поверхности либо поверхности массивного слоя вычисляется по формуле $\Delta R_0 = Ah_0 \cos n\beta$, $n = 2, 3, \dots$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, где $A = 1 \cdot 10^{-3}$ — относительная амплитуда, n — предполагаемый номер формы потери устойчивости. Поскольку номер формы заранее неизвестен, то проводится серия расчетов с $n = 2, 3, 4, \dots$. Выбирается расчет, в котором потеря устойчивости происходит при меньшей величине внешнего давления.

При квазистатическом нагружении пустотелой цилиндрической оболочки потеря устойчивости происходит по второй форме ($n = 2$). При большой жесткости наполнителя и/или большой скорости нагружения реализуются более высокие номера форм потери устойчивости [11–15].

На рис. 2, а приведены зависимости безразмерного окружного усилия \hat{N} от внешнего давления p пустотелой цилиндрической оболочки при скорости нагружения $p_0 = 10^5$ МПа/с, рассчитанные по модели 1. В расчетах задавалась начальная погибь с $n = (2, \overline{13})$. Номера форм, задаваемых в расчете, подписаны рядом с соответствующей кривой. Наименьшее предельное давление соответствует $n = 11$ (см. пунктирную линию на нижней врезке). В верхней врезке приведена форма потери устойчивости при $n = 11$. Величина относительной амплитуды ввиду ее малости не влияет на докритическое деформирование [23]. На рис. 2, б приведены аналогичные результаты для трехслойной оболочки, материал наполнителя $m = 5$. Потеря устойчивости произошла при $n = 10$.

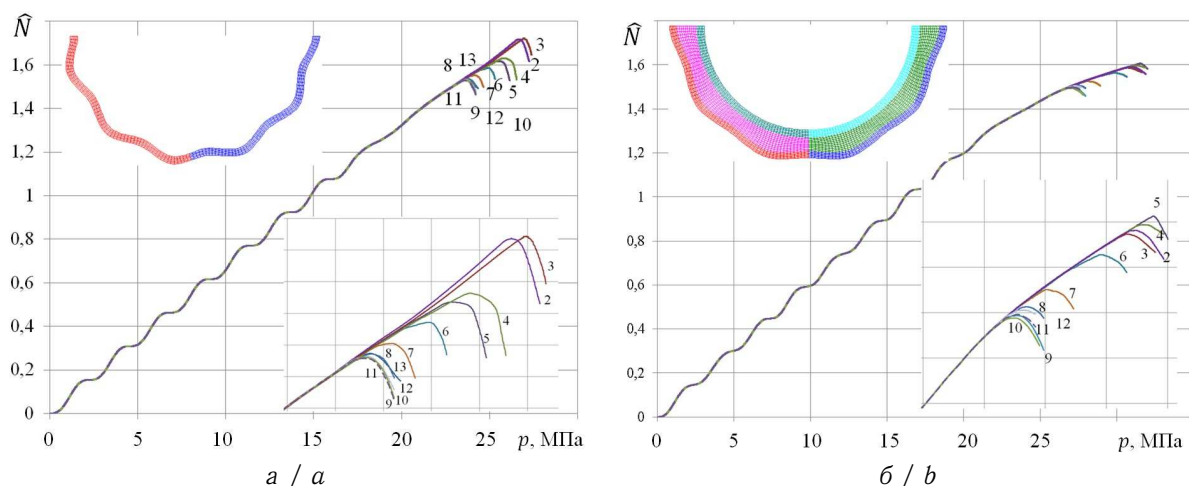


Рис. 2. Зависимости безразмерного окружного усилия \hat{N} от внешнего давления: *a* — пустотелой цилиндрической оболочки, форма потери устойчивости при $n = 11$; *b* — трехслойной цилиндрической оболочки, форма потери устойчивости при $n = 10$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of the dimensionless circumferential force \hat{N} on external pressure: *a* — of a hollow cylindrical shell, buckling shape at $n = 11$; *b* — of a three-layer cylindrical shell, buckling shape at $n = 10$ (color online)

На рис. 3 приведены расчетные зависимости безразмерного окружного усилия \hat{N} и относительного среднего прогиба \hat{w} от внешнего давления p для внешнего слоя оболочки соответственно, рассчитанные по модели 1.

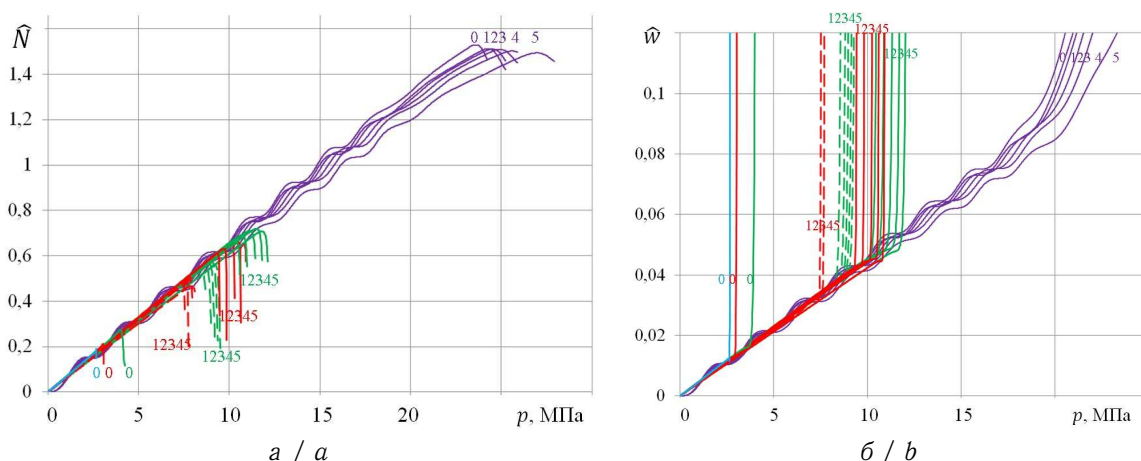


Рис. 3. Зависимости безразмерного окружного усилия (*a*) и относительного среднего прогиба (*b*) от давления: контакт жесткой склейки — сплошные кривые; контакт с отрывом и свободным проскальзыванием вдоль касательной — пунктирные кривые; параметр скорости нагружения p_0 , МПа/с: 10 (синяя кривая); 200 (красные кривые), 10^3 (зеленые кривые) и 10^5 (фиолетовые кривые) (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependences of the dimensionless circumferential force (*a*) and the relative average deflection (*b*) on pressure: rigid bonding contact — solid curves, contact with separation and free sliding along the tangent — dotted curves; loading speed parameter p_0 , МПа/с: 10 (blue curve); 200 (red curves), 10^3 (green curves) and 10^5 (purple curves) (color online)

Синими линиями обозначены результаты расчетов при квазистатическом нагружении $p_0 = 10$ МПа/с, красными, зелеными и фиолетовыми — $p_0 = 200, 10^3, 10^5$ МПа/с соответственно. Представлены результаты расчетов с контактным взаимодействием, моделируемым условиями жесткой склейки (сплошные линии) и условиями контакта с отрывом по нормали и проскальзыванием по касательной (пунктирные линии). В расчетах с максимальной скоростью нагружения $p_0 = 10^5$ МПа/с не отмечалось значительного расхождения результатов в



зависимости от алгоритма контакта, поэтому приведены данные только для контакта типа жесткой склейки. Рядом с кривыми приведены цифры, соответствующие номеру материала заполнителя m в табл. 2.

На рис. 4 приведено сравнение результатов расчетов по моделям 1 и 2 для оболочек с $m = 0$ и 5. Наблюдается хорошее соответствие кривых. Расхождение по предельным давлениям не превосходит 10%. В проведенных расчетах номера форм потери устойчивости по обоим методикам совпадают. На рис. 5 приведены зависимости предельного давления от жесткости заполнителя при различных скоростях нагружения, рассчитанные с применением модели 1.

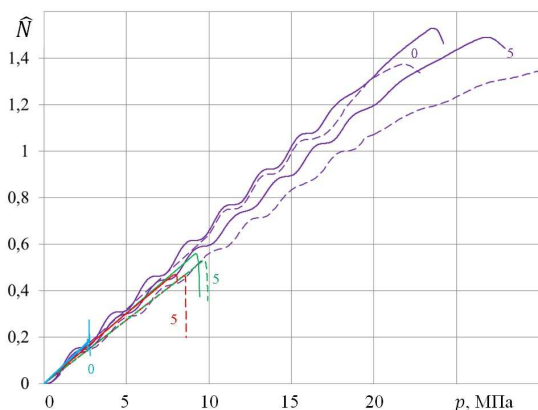


Рис. 4. Зависимости безразмерного окружного усилия от давления: модель 1 — сплошные кривые; модель 2 — пунктирные кривые; параметр скорости нагружения p_0 , МПа/с: 10 (синяя кривая); 200 (красные кривые), 10^3 (зеленые кривые) и 10^5 (фиолетовые кривые) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of dimensionless circumferential force on pressure: model 1 is solid curves; model 2 is dotted curves; loading speed parameter p_0 , МПа/с: 10 (blue curve); 200 (red curves), 10^3 (green curves) and 10^5 (purple curves) (color online)

Сплошными линиями обозначены зависимости, построенные в расчетах с контактом типа жесткой склейки, пунктирными — контакта с отрывом. Звездочками обозначены результаты расчетов по модели 2 с алгоритмом контакта с отрывом. Обозначения такие же, как на рис. 3. Наблюдается хорошее соответствие по моделям 1 и 2 во всех вариантах расчетов, кроме скорости нагружения $p_0 = 10^5$ МПа/с и $m = 5$. С увеличением жесткости заполнителя и скорости нагружения наблюдается увеличение предельного давления.

Потеря устойчивости в расчетах по обоим моделям со скоростью нагружения $10 \leq p_0 \leq 10^3$ МПа/с происходила по второй форме ($n = 2$). При квазистатическом нагружении ($p_0 = 10$ МПа/с) пустотелой оболочки в расчетах предельное давление $p^* = 2.66$ МПа, что практически совпадает с верхним критическим давлением для весьма длинной цилиндрической упругой оболочки, вычисленным по формуле $q_n = (n^2 - 1)D/R^3 = 2.25$ МПа при $n = 2$ [11].

На рис. 6 приведены формы потери устойчивости оболочки, полученные в расчетах по модели 1, материал $m = 3$.

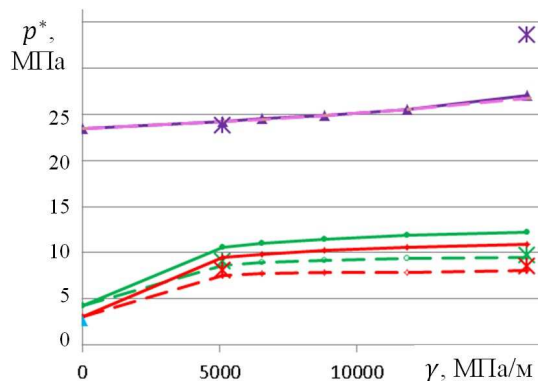


Рис. 5. Зависимости предельного давления от коэффициента постели: контакт типа жесткой склейки — пунктирные линии, контакт с отрывом и свободным проскальзыванием вдоль касательной — точки; параметр скорости нагружения p_0 , МПа/с: 10 (синяя кривая); 200 (красные кривые), 10^3 (зеленые кривые) и 10^5 (фиолетовые кривые) (цвет онлайн)

Fig. 5. Dependence of the limiting pressure on the bed coefficient: contact with rigid gluing — dotted lines, contact with separation and free sliding along the tangent — points; loading speed parameter p_0 , МПа/с: 10 (blue curve); 200 (red curves), 10^3 (green curves) and 10^5 (purple curves) (color online)

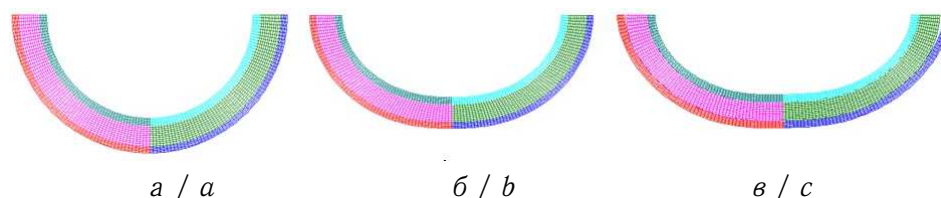


Рис. 6. Формы потери устойчивости оболочек с наполнителем (материал 3):
 a – начальная геометрия; b – контакт жесткой склейки; c – контакт с отрывом;
 параметр скорости нагружения $p_0 = 10^3$ МПа/с (цвет онлайн)
 Fig. 6. Forms of buckling of shells with filler (material 3):
 a – initial geometry; b – contact rigid gluing; c – contact with separation; loading rate parameter
 $p_0 = 10^3$ МПа/s (color online)

Заключение

Рассмотрены две модели, описывающие контактное взаимодействие слоев многослойных оболочек вращения с упругими и упругопластическими слоями при статических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением. Апробация моделей проведена на задаче о нагружении внешним гидростатическим давлением упругопластических трехслойных оболочек с упругим наполнителем. Результаты расчетов хорошо согласуются друг с другом. Увеличение жесткости наполнителя, так же как и увеличение скорости нагружения, приводят к увеличению предельного давления, поскольку и наполнитель, и силы инерции оказывают поддерживающий эффект. При этом наблюдается рост номеров преобладающих форм потери устойчивости, имеющих наибольшую скорость роста. Применение оболочечного элемента целесообразно для сокращения времени расчета.

Список литературы

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва : Наука, 1967. 984 с.
2. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Судпромгиз, 1962. 432 с.
3. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 391 с. EDN: QJPXPV
4. Паймушин В. Н. О формах потери устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем боковом давлении // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80, № 1. С. 91–102. EDN: VXVUCH
5. Паймушин В. Н. Соотношения теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 5 (327). С. 135–149. EDN: SUKBTV
6. Dash A. P., Velmurugan R., Prasad M. S. R., Sikarwar R. S. Stability improvement of thin isotropic cylindrical shells with partially filled soft elastic core subjected to external pressure // Thin-Walled Structures, V. 2016. Vol. 98. P. 301–311. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.09.028>
7. Karam G. N., Gibson L. J. Elastic buckling of cylindrical shells with elastic cores—I. Analysis // International Journal of Solids and Structures. 1995. Vol. 32, iss. 8–9. P. 1259–1263. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00147-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00147-0)
8. Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410>
9. Бакулин В. Н. Послойный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с вырезами // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 2. С. 111–125. <https://doi.org/10.1134/S0572329919020028>, EDN: JTXHAI
10. Иванов В. А., Паймушин В. Н., Полякова Т. В. Исследование форм потери устойчивости ортотропной трехслойной цилиндрической оболочки при кручении // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Механика. 2000. № 2 (2). С. 136–146. EDN: HYICZX
11. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады Академии наук. 1949. Т. 64, № 6. С. 776–782.
12. Farhat C., Wang K. G., Main A., Kyriakides S., Lee L.-H., Ravi-Chandar K., Belytschko T. Dynamic implosion of underwater cylindrical shells: Experiments and Computations // International



- Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50, iss. 19. P. 2943–2961. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.006>
13. Giezen J. J., Babcock C. D., Singer J. Plastic buckling of cylindrical shells under biaxial loading // *Experimental Mechanics*. 1990. Vol. 33. P. 337–343. <https://doi.org/10.1007/BF02325990>
 14. Carvelli V., Panzeri N., Poggi C. Buckling strength of GFRP under-water vehicles // *Composites: Part B*. 2001. Vol. 32. P. 89–101. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(00\)00063-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(00)00063-9)
 15. Ghazijahani T. G., Showkati H. Experiments on conical shell reducers under uniform external pressure // *Journal of Constructional Steel Research*. 2011. Vol. 67. P. 1506–1515. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.03.024>
 16. Артемьева А. А., Баженов В. Г., Казаков Д. А., Кибец А. И., Нагорных Е. В. О больших деформациях и предельных состояниях упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // *Прикладная математика и механика*. 2015. Т. 79, вып. 4. С. 558–570. EDN: UXGMOT
 17. Баженов В. Г., Зефилов С. В., Цветкова И. Н. Численное моделирование задач нестационарного контактного взаимодействия деформируемых конструкций // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов : межвуз. сб. Вып. 52. Москва : Товарищество научных изданий КМК, 1995. С. 154–160.*
 18. Ломунов В. К. Упруго-пластическое выпучивание гладких, составных и подкрепленных оболочек вращения при осевом ударе : дис. . . . канд. техн. наук. Горький, 1979.
 19. Ярцев В. П., Андрианов К. А., Иванов Д. В. Физико-механические и технологические основы применения пенополистирола при дополнительном утеплении зданий и сооружений. Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. 120 с. EDN: QNPCOT
 20. Плескачевский Ю. М., Леоненко Д. В. Анализ собственных частот трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде // *Актуальные вопросы машиноведения*. 2012. Т. 1. С. 244–246. EDN: YMDHKK
 21. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Москва : Госстройиздат, 1954. 56 с.
 22. Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Павленкова Е. В. Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2011. № 2. С. 57–66. EDN: NHLAKX
 23. Баженов В. Г., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А. Исследование применимости модели основания Винклера для описания контактного взаимодействия упругопластических оболочек с заполнителем при внешнем давлении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2020. № 4. С. 36–48. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.04>

References

1. Vol'mir A. S. *Ustoychivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of Deformable Systems]. Moscow, Nauka, 1967. 984 p. (in Russian).
2. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Leningrad, Sudpromgiz, 1962. 432 p. (in Russian).
3. Golovanov A. I., Tyuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 391 p. (in Russian). EDN: QJXPV
4. Paimushin V. N. On the forms of loss of stability of a cylindrical shell under an external side pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 80, iss. 1, pp. 65–72. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.05.010>, EDN: YUZRSF
5. Paimushin V. N. Relationships of the Timoshenko-type theory of thin shells with arbitrary displacements and strains. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, iss. 5, pp. 843–856. <https://doi.org/10.1134/S0021894414050149>, EDN: SEVBYD
6. Dash A. P., Velmurugan R., Prasad M. S. R., Sikarwar R. S. Stability improvement of thin isotropic cylindrical shells with partially filled soft elastic core subjected to external pressure. *Thin-Walled Structures*, B, 2016, vol. 98, pp. 301–311. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.09.028>
7. Karam G. N., Gibson L. J. Elastic buckling of cylindrical shells with elastic cores—I. Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, vol. 32, iss. 8–9, pp. 1259–1263. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00147-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00147-0)
8. Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A. Simulation models and research



- algorithms of thin shell structures deformation Part I. Shell deformation models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 370–410 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410>
9. Bakulin V. N. Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with cutouts. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 3, pp. 448–460. <https://doi.org/10.3103/S002565441906013X>, EDN: [GJAUZR](#)
 10. Ivanov V. A., Paymushin V. N., Polyakova T. V. Investigation of stability loss forms of orthotropic three-layered cylindrical shell under torsion. *Bulletin of Nizhny Novgorod University named after N. I. Lobachevsky. Mechanics*, 2000, iss. 2 (2), pp. 136–146 (in Russian). EDN: [HYICZX](#)
 11. Lavrent'yev M. A., Ishlinskiy A. Yu. Dynamic forms of loss of stability of elastic systems. *Doklady Akademii nauk*, 1949, vol. 64, iss. 6, pp. 779–782 (in Russian).
 12. Farhat C., Wang K. G., Main A., Kyriakides S., Lee L.-H., Ravi-Chandar K., Belytschko T. Dynamic implosion of underwater cylindrical shells: Experiments and Computations. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, iss. 19, pp. 2943–2961. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.006>
 13. Giezen J. J., Babcock C. D., Singer J. Plastic buckling of cylindrical shells under biaxial loading. *Experimental Mechanics*, 1990, vol. 33, pp. 337–343. <https://doi.org/10.1007/BF02325990>
 14. Carvelli V., Panzeri N., Poggi C. Buckling strength of GFRP under-water vehicles. *Composites: Part B*, 2001, vol. 32, pp. 89–101. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(00\)00063-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(00)00063-9)
 15. Ghazijahani T. G., Showkati H. Experiments on conical shell reducers under uniform external pressure. *Journal of Constructional Steel Research*, 2011, vol. 67, pp. 1506–1515. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.03.024>
 16. Artem'eva A. A., Bazhenov V. G., Kazakov D. A., Kibets A. I., Nagornyykh E. V. Large deformations and limiting states of elastoplastic shells of revolution under combined complex loadings. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, iss. 4, pp. 394–402. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.01.010>, EDN: [XXBCDJ](#)
 17. Bazhenov V. G., Zefirov S. V., Tsvetkova I. N. Numerical modeling of problems of non-stationary contact interaction of deformable structures. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti. Chislennoye modelirovaniye fiziko-mekhanicheskikh protsessov* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Numerical Modeling of Physical and Mechanical Processes. Interuniversity Collection]. Vol. 52. Moscow, Tovarishestvo nauchnykh izdaniy KMK, 1995, pp. 154–160 (in Russian).
 18. Lomunov V. K. *Elastic-plastic Buckling of Smooth, Composite and Reinforced Shells of Rotation Under Axial Impact*. Diss. Cand. Sci. (Tech.). Gor'kiy, 1979 (in Russian).
 19. Yartsev V. P., Andrianov K. A., Ivanov D. V. *Fiziko-mekhanicheskiye i tekhnologicheskkiye osnovy primeneniya penopolistirola pri dopolnitel'nom uteplenii zdaniy i sooruzheniy* [Physico-mechanical and Technological Basis for the Use of Polystyrene Foam for Additional Insulation of Buildings and Structures]. Tambov, Tambov State Technical University Publ., 2010. 120 p. (in Russian). EDN: [QNPCOT](#)
 20. Pleskachevskiy Yu. M., Leonenko D. V. Analysis of threeply round cylindrical shells natural frequency in elastic medium (environment). *Topical Issues of Mechanical Engineering*, 2012, vol. 1, pp. 244–246 (in Russian). EDN: [YMDHKK](#)
 21. Pasternak P. L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsiyentov posteli* [Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two bed coefficients]. Moscow, Gosstroyizdat, 1954. 56 p. (in Russian).
 22. Bazhenov V. G., Zhegalov D. V., Pavlenkova Ye. V. Numerical and experimental study of elastoplastic tension-torsion processes in axisymmetric bodies under large deformations. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 204–212. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020087>, EDN: [OHUGKR](#)
 23. Bazhenov V. G., Nagornyykh E. V., Samsonova D. A. Investigation of the Winkler foundation model applicability for describing the contact interaction of elastoplastic shells with a core under external pressure. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, iss. 4, pp. 36–48 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.04>

Поступила в редакцию / Received 01.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024