

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–13

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 4–13

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13>

EDN: OZQYOM

Научная статья

УДК 539.3

О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами

**В. А. Бабешко^{1,2✉}, С. Б. Уафа¹, О. В. Евдокимова²,
О. М. Бабешко¹, И. С. Телятников², В. С. Евдокимов¹**

¹Кубанский государственный университет, Россия, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149

²Южный научный центр РАН, Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Чехова, д. 41

Бабешко Владимир Андреевич, доктор физико-математических наук, академик, заведующий кафедрой математического моделирования, babeshko41@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6663-6357>, AuthorID: 8243

Уафа Самир Баширович, аспирант кафедры математического моделирования, samir_wafa@rambler.ru, <https://orcid.org/0009-0006-4276-000X>, AuthorID: 982504

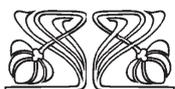
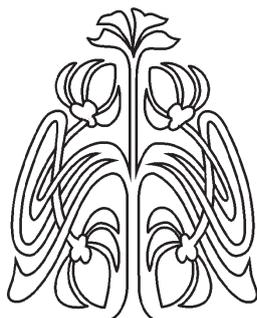
Евдокимова Ольга Владимировна, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, evdokimovaolga@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1283-3870>, AuthorID: 18036

Бабешко Ольга Мефодиевна, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, babeshko49@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1869-5413>, AuthorID: 17992

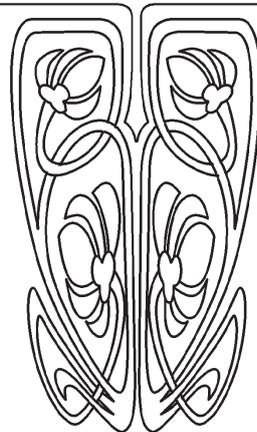
Телятников Илья Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ilux_t@list.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8500-2133>, AuthorID: 769230

Евдокимов Владимир Сергеевич, магистрант кафедры математического моделирования, evdok_vova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7824-6164>, AuthorID: 1225577

Аннотация. Рассматривается задача о гармоническом во времени поведении двух деформируемых полубесконечных штампов, лежащих на деформируемом основании. Предполагается, что штампы сближаются параллельными торцами таким образом, что формируют трещину, дефект или тектонический разлом в зоне сближения. Деформируемый материал штампов имеет простую реологию, описываемую уравнением Гельмгольца. Для рассмотрения случаев деформируемых штампов сложных реологий можно применять созданный новый универсальный метод моделирования. Он позволяет решения векторных граничных задач для систем дифференциальных уравнений



Научный
отдел





в частных производных, описывающих материалы сложных реологий, представлять разложенными по решениям отдельных скалярных граничных задач. Строится высокоточное решение граничной задачи, позволяющее получить дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты. Существование резонансных частот для деформируемых штампов было предсказано в работах И. И. Воровича. Результат остается в силе и для случая абсолютно твердых полубесконечных штампов. Ранее было показано, что резонансы возникают в контактной задаче о колебании двух абсолютно жестких штампов конечных размеров на деформируемом слое. Однако динамическая контактная задача для случая двух полубесконечных штампов, действующих на многослойную среду, ранее не изучалась. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющего строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме этого, применяются факторизационные методы и используются некоторые тонкие свойства уравнений Винера – Хопфа, в частности, принадлежащие известному математику М. Г. Крейну. Предлагаемые методы позволяют производить исследование для всего диапазона частот и произвольного расстояния между торцами полубесконечных плит. Результаты исследования могут быть использованы для оценки прочностных свойств конструкций, имеющих контактные соединения из разнотипных материалов в динамических режимах.

Ключевые слова: контактная задача, деформируемые штампы, блочные элементы, интегральные уравнения

Благодарности: Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2024 г. Минобрнауки (проект FZEN-2023-0006) и ЮНЦ РАН (тема 01201354241-0).

Для цитирования: Бабешко В. А., Уафа С. Б., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Телятников И. С., Евдокимов В. С. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–13. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13>, EDN: OZQYOM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the dynamic contact problem with two deformable stamps

V. A. Babeshko^{1,2✉}, S. B. Uafa¹, O. V. Evdokimova²,
O. M. Babeshko¹, I. S. Telyatnikov², V. S. Evdokimov¹

¹Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., Krasnodar 350040, Russia

²Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 41 Chekhov St., Rostov-on-Don 344006, Russia

Vladimir A. Babeshko, babeshko41@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6663-6357>, AuthorID: 8243

Samir B. Uafa, samir_wafa@rambler.ru, <https://orcid.org/0009-0006-4276-000X>, AuthorID: 982504

Olga V. Evdokimova, evdokimovaolga@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1283-3870>, AuthorID: 18036

Olga M. Babeshko, babeshko49@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1869-5413>, AuthorID: 17992

Ilya S. Telyatnikov, ilux_i@list.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8500-2133>, AuthorID: 769230

Vladimir S. Evdokimov, evdok_vova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7824-6164>, AuthorID: 1225577

Abstract. The problem of the time-harmonic behavior of two deformable semi-infinite stamps lying on a deformable base is considered. It is assumed that the stamps converge with parallel ends in such a way that they form a crack, defect, or tectonic fault in the convergence zone. The deformable die material has a simple rheology described by the Helmholtz equation. To consider the cases of deformable stamps of complex rheologies, a new universal modeling method can be used. It allows solutions of vector boundary value problems for systems of partial differential equations describing materials of complex rheologies to be represented as decomposed by solutions of individual scalar boundary value problems. A high-precision solution to the boundary value problem is constructed, which makes it possible to obtain a dispersion equation describing resonant frequencies. The existence of resonant frequencies for deformable stamps



was predicted in the works of I. I. Vorovich. The result remains valid for the case of absolutely solid semi-infinite stamps. Earlier, it was shown that resonances arise in the contact problem of the oscillation of two absolutely rigid stamps of finite dimensions on a deformable layer. However, the dynamic contact problem for the case of two semi-infinite stamps acting on a multilayer medium has not been studied before. The study is based on the block element method, which makes it possible to construct exact solutions to boundary value problems for partial differential equations. In addition, factorization methods are used and some subtle properties of the Wiener – Hopf equations are used, in particular, those belonging to the famous mathematician M. G. Crane. The proposed methods make it possible to conduct research for the entire frequency range and an arbitrary distance between the ends of semi-infinite plates. The results of the study can be used to evaluate the strength properties of structures with contact joints made of different types of materials in dynamic modes.

Keywords: contact problem, deformable stamps, block elements, integral equations

Acknowledgements: Some fragments of the work were carried out as part of the implementation of the 2024 State Task of the Ministry of Education and Science (project FZEN-2023-0006) and the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (topic 01201354241-0).

For citation: Babeshko V. A., Uafa S. B., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Telyatnikov I. S., Evdokimov V. S. On the dynamic contact problem with two deformable stamps. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 4–13 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13>, EDN: OZQYOM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Исследованию контактных задач в широком спектре постановок посвящено большое число работ (см. например: [1–13]). Это связано с важностью названного направления исследований в самых различных областях инженерной практики, теории прочности и разрушения, сейсмологии, геофизики, экологии. Нужно отметить и разнообразие подходов исследования, которые включают аналитические, полуаналитические, численные методы.

Каждый из подходов позволяет успешно решать контактные задачи в выбираемых постановках и выявлять ранее не исследованные стороны. Большинство исследований посвящено контактным задачам о воздействии на упругую среду абсолютно жестких штампов. Как правило, выполнялись они для одиночных штампов. Переход к деформируемым штампам и возникающим при этом особенностям, по-видимому, впервые был выполнен И. И. Воровичем [14, 15]. Им было установлено, что наличие деформируемого штампа приводит к возникновению дискретных резонансных частот в динамических контактных задачах, приводящих к резонансам. Впервые вопрос об одновременном динамическом воздействии двух полубесконечных деформируемых штампов со встречно расположенными параллельными торцами рассматривается в настоящей работе. Одна из целей исследования состоит в установлении существования резонансов подобной блочной структуры и возможности построения дисперсионного уравнения для определения резонансных частот.

1. Постановка задачи и определяющие уравнения

Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, содержащая штампы, находящаяся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Считаем, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются деформируемыми полубесконечными штампами с такой же временной функцией. Исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1 , ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty)$, $\Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ действуют деформируемые штампы, контактирующие без трения с многослойным основанием. Одной из важных составляющих рассматриваемой задачи



являются модели деформируемых штампов. Рассмотрим случай, когда материал описывается уравнениями Гельмгольца. Решив эту задачу, появляется возможность переходить к материалам иных реологий, что открывает новый универсальный метод моделирования [16].

Считаем, что в контактных областях Ω_{-A} и Ω_A материал штампов описывается дифференциальными уравнениями Гельмгольца

$$\begin{aligned} [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi_{-A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty), \quad p^2 &= c\omega^2, \quad c > 0, \\ [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi_{A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\varphi_{-A1}(x_1, x_2) = \varphi(-A, x_2), \quad x_1 \rightarrow -A; \quad \varphi_{A1}(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A.$$

Здесь $q_r(x_1, x_2)$, $r = A, -A$ — воздействие на штамп снизу, а $t_r(x_1, x_2)$ — сверху. Функции $\varphi_r(x_1, x_2)$, $r = A, -A$ описывают перемещения штампов в зоне контактов.

Применив к уравнениям (1) преобразование Фурье по координате x_2

$$\varphi(x_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2,$$

приходим к упрощенной одномерной граничной задаче с параметром α_2 :

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_{-A}(x_1, \alpha_2) &= g_{-A}(x_1, \alpha_2), \quad \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A), \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \\ (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_A(x_1, \alpha_2) &= g_A(x_1, \alpha_2), \quad \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty), \\ g_{-A}(x_1, \alpha_2) &= q_{-A}(x_1, \alpha_2) - t_{-A}(x_1, \alpha_2), \quad g_A(x_1, \alpha_2) = q_A(x_1, \alpha_2) - t_A(x_1, \alpha_2), \\ \varphi(x_1) &= \varphi(x_1, \alpha_2), \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(\pm A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow \pm A, \\ \varphi_{-A}(x_1, \alpha_2) &= \varphi(-A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \varphi_A(x_1, \alpha_2) = \varphi(A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметр α_2 в дальнейшем опускается, и возврат к нему произойдет по формулам (2) после решения следующей одномерной граничной задачи:

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_r(x_1) &= g_r(x_1), \quad \Omega_r, \quad r = A, -A, \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \quad g_r(x_1) = q_r(x_1) - t_r(x_1), \\ \varphi_{-A}(x_1) &= \varphi_{-A}(-A), \quad x_1 \rightarrow -A; \quad \varphi_A(x_1) = \varphi_A(A), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Метод исследования

Для исследования построим упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей (3). Для этого можно применить метод [16].

В результате его применения строятся внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_{-A}(\alpha_1) &= -i(\alpha_1 + k) \varphi_{-A}(-C) e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} - Q_{-A}(\alpha_1) - \\ &\quad - T_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} + T_{-A}(\alpha_1), \\ \omega_A(\alpha_1) &= i(\alpha_1 - k) \varphi_A(A) e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} - Q_A(\alpha_1) - T_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} + T_A(\alpha_1). \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения преобразований Фурье заглавными буквами:

$$\Phi(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$



С помощью построенных внешних форм поведения штампов можно представить упакованными блочными элементами в виде

$$\varphi_r(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_r(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad \Phi_r(\alpha_1) = \frac{\omega_r(\alpha_1)}{N(\alpha_1)}, \quad r = A, -A, \quad N(\alpha_1) = \alpha^2 - k^2. \quad (4)$$

3. Интегральное уравнение контактной задачи

Сформулированная контактная задача описывается системой интегральных уравнений вида [17]

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_{-A}} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{-A}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \iint_{\Omega_A} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_A(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = u_r(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad r = -A, A \end{aligned} \quad (5)$$

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad h(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} H(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty.$$

Здесь $u_r(x_1, x_2)$ — заданные смещения оснований штампов, $q_r(x_1, x_2)$ — контактные напряжения. Считаем, что функция $H(\alpha_1, \alpha_2)$ — четная по обоим переменным мероморфная функция двух комплексных переменных α_k , $k = 1, 2$, ее примеры приведены в многочисленных публикациях.

Применим к двумерному интегральному уравнению (5) преобразование Фурье по координате x_2 . В результате место координаты x_2 у каждой подвергнутой преобразованию Фурье функции займет свободный параметр преобразования Фурье α_2 . Чтобы упростить формулы, временно скроем параметр α_2 введением обозначений

$$h(x_1) = h(x_1, \alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1, \alpha_2), \quad h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,$$

$$H(\alpha_1) = H(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_r(x_1) = u_r(x_1, \alpha_2), \quad r = -A, A.$$

В результате принятых замен получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_{-A}(x_1), \quad -\infty < x_1 \leq -A, \\ & \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_A(x_1), \quad A \leq x_1 \leq \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае многослойной среды функция $H(\alpha_1)$, являясь мероморфной, имеет счетное число нулей z_{m0} и полюсов ξ_{s0} . Им свойственно асимптотическое поведение вида

$$\xi_{s0} = i\nu(s + 0.5)(1 + o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \quad z_{m0} = i\nu m(1 + o(1)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \nu = \text{const} > 0.$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей и полюсов. В этом случае представление ядра интегрального уравнения



описывается интегралом, берущимся по контуру и имеющему вид

$$h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Контур γ совпадает с вещественной осью всюду, кроме зон вещественных полюсов, которые обходятся им по полуокружностям малого радиуса [17].

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обоих контактных зон. Для этого продолжим систему интегральных уравнений (6) на всю ось, добавив справа на отрезке $[-A, A]$ новую неизвестную функцию $w_0(x_1)$, представляющую перемещение поверхности среды в промежутках между штампами.

4. Функциональное уравнение для реологической среды

Вновь обращаясь к интегральным уравнениям (6), составим балансы перемещений поверхности многослойной среды и мембран, взяв представления в форме

$$u_r(x_1) = \varphi_r(x_1), \quad x_1 \in \Omega_r, \quad r = -A, A.$$

Применим к интегральному уравнению (6) и уравнениям упакованных блочных элементов (4) преобразование Фурье. После этого потребуем в зонах контактов Ω_r , $r = A, -A$ равенств напряжений Q_r и перемещений u_r основания и штампов.

Тогда после несложных операций с преобразованиями Фурье построим функциональное уравнение вида

$$\begin{aligned} K_1(\alpha_1)Q_1^-(\alpha_1) + W_1(\alpha_1) + K_1(\alpha_1)Q_1^+(\alpha_1) &= (\alpha^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+), \\ K_1(\alpha_1) &= [K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} S_{-A} &= -i(\alpha_1 + k)\varphi_{-A}(-A)e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} - T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} + T_{-A}(\alpha_1), \\ S_A &= i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_A(\alpha_1). \end{aligned}$$

Выше $W_1(\alpha_1)$ — преобразование Фурье свободной от напряжений зоны между штампами.

С учетом аналитических свойств функций обозначим

$$Q_1^-(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1), \quad S_1^- \equiv S_{-A}(\alpha_1), \quad Q_1^+(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1), \quad S_1^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1).$$

Знак плюс означает регулярность аналитической функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, а минус — в нижней.

Соотношение (7) представляет обобщенные функциональные уравнения типа Винера – Хопфа относительно неизвестных $Q_1^-(\alpha_1)$, $Q_1^+(\alpha_1)$, $W_1(\alpha_1)$, а также функционалов $Q_1(-k)$, $Q_1(k)$, входящих в правые части уравнений. Для их получения строятся интегральные уравнения.

5. О решении интегральных уравнений контактной задачи

Применим для исследования функционального уравнения (7) аппарат факторизации функций, позволяющий свести его к отдельному интегральному уравнению на отрезке.

С этой целью для четной функции осуществим деление всех членов функционального уравнения (7) на $K(\alpha_1)$. В результате получим соотношение

$$Q_1^-(\alpha_1) + K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1) + Q_1^+(\alpha_1) = K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+).$$

Осуществим переход от функционального к интегральному уравнению, которое с учетом новых обозначений принимает вид

$$\int_{-A}^A k_{11}(x_1 - \xi_1)w_{11}(\xi_1)d\xi_1 = f_{11}(x_1), \quad |x_1| \leq A, \quad w_{11}(\xi_1) = w_{11}(\xi_1, \alpha_2),$$

$$k_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad K_1^{-1}(\alpha_1) = P_1^{-1}(\alpha_1)R_1(\alpha_1), \quad k_{11}(x_1) = k_{11}(x_1, \alpha_2).$$

Здесь $f_{11}(x_1)$ имеет представление

$$f_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+)e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A.$$

В связи со свойствами ядра интегрального уравнения функция $K_1^{-1}(\alpha_1)$ имеет на бесконечности асимптотическое поведение

$$K_1^{-1}(\alpha_1) = O(|\alpha_1|).$$

Это свидетельствует о том, что интегральное уравнение, представленное с помощью классических функций, является интегро-дифференциальным.

Последнее, взяв произвольное положительное число τ , можно записать в виде

$$(-\partial^2 + \tau^2) \int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1)w_{11}(\xi_1)d\xi_1 = f_{11}(x_1),$$

$$n_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1}K_1^{-1}(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad N_{11}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1}K_1^{-1}(\alpha_1).$$

Решив дифференциальное уравнение, получим его в виде

$$\int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1)w_{11}(\xi_1)d\xi_1 = f_{110}(x_1) + c_{11}e^{\tau x_1} + c_{12}e^{-\tau x_1},$$

$$f_{110}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1}(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+)e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A. \tag{8}$$

Здесь постоянные c_{1m} , $m = 1, 2$, нуждаются в определении после построения решения интегрального уравнения (8). Применим для решения интегрального уравнения метод, разработанный в [18]. Он позволяет построить высокоточное решение этого интегрального уравнения методом фиктивного поглощения.

Не останавливаясь на деталях построения высокоточного приближенного решения интегрального уравнения (8), выпишем окончательное решение в виде

$$w_{11}(x_1) = \frac{m_{11}(x_1) + c_{11}m_{12}(x_1) + c_{12}m_{13}(x_1)}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(chA)\sqrt{2chA - 2chx_1}}.$$

Здесь $m_{rs}(x_1)$ — некоторые непрерывные функции, появляющиеся в процессе решения интегрального уравнения, являются известными; $Q_{-\frac{1}{2}}(chA)$ — функция Лежандра. Функция



$w_{11}(x_1)$ описывает поведение поверхности в зоне между штампами и должна быть непрерывной. Для обеспечения ее непрерывности необходимо, чтобы она обращалась в нули в точках $x_1 = \pm A$, в которых нарушается требование непрерывности. Это приводит к уравнениям для определения неизвестных c_{11} , c_{12} :

$$\begin{aligned} c_{11}m_{12}(A) + c_{12}m_{13}(A) + m_{11}(A) &= 0, \\ c_{11}m_{12}(-A) + c_{12}m_{13}(-A) + m_{11}(-A) &= 0. \end{aligned}$$

Решив их, находим искомые постоянные:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \Delta^{-1}[m_{11}(-A)m_{13}(A) - m_{11}(A)m_{13}(-A)], \\ c_{12} &= \Delta^{-1}[m_{11}(A)m_{12}(-A) - m_{11}(-A)m_{12}(A)], \\ \Delta &= m_{12}(A)m_{13}(-A) - m_{12}(-A)m_{13}(A). \end{aligned}$$

Внеся найденные постоянные в функциональное уравнение (1), получим его в виде

$$Q_1^-(\alpha_1) + Q_1^+(\alpha_1) = K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1). \quad (9)$$

Осуществив факторизацию правой части (9) в виде суммы [17], получаем решения $Q_A(\alpha_1)$, $Q_{-A}(\alpha_1)$ интегрального уравнения, зависящие от функционалов $Q_A(k)$, $Q_{-A}(-k)$.

Из него находятся выполненные в преобразованиях Фурье значения контактных напряжений под берегами трещины в виде [17]

$$\begin{aligned} Q_A(\alpha_1) &\equiv Q_1^+(\alpha_1) = \{K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1)\}^+, \\ Q_{-A}(\alpha_1) &\equiv Q_1^-(\alpha_1) = \{K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1)\}^-. \end{aligned} \quad (10)$$

Выделив функционалы $Q_A(k)$, $Q_{-A}(-k)$ в результате разложения правых частей выражений (10), получим соотношения

$$\begin{aligned} Q_A(\alpha_1) &= Q_A(k)R_1^+(\alpha_1) + Q_{-A}(-k)R_2^+(\alpha_1) + R_3^+(\alpha_1), \\ Q_{-A}(\alpha_1) &= Q_A(k)R_1^-(\alpha_1) + Q_{-A}(-k)R_2^-(\alpha_1) + R_3^-(\alpha_1). \end{aligned}$$

Здесь $R_m^\pm(\alpha_1)$ — некоторые аналитические функции, коэффициенты при функционалах в разложении. Внеся в эти соотношения последовательно $\alpha_1 = k$ в первое, затем $\alpha_1 = -k$ во второе и вычислив функционалы из полученной алгебраической системы уравнений, получим их значения в виде

$$\begin{aligned} Q_A(k) &= \Delta_1^{-1}\langle R_3^+(k)[1 - R_2^-(-k)] + R_3^-(-k)R_2^+(k) \rangle, \\ Q_A(-k) &= \Delta_1^{-1}\langle R_3^+(k)R_1^-(-k) - R_3^-(-k)[1 - R_2^+(k)] \rangle, \\ \Delta_1(k) &= [1 - R_1^+(k)][1 - R_2^-(-k)] - R_2^+(k)R_1^-(-k). \end{aligned}$$

Внесем значения функционалов в правые части соотношений (10), получим в преобразованиях Фурье выражения для контактных напряжений под каждым штампом. Уравнение $\Delta_1(k) = 0$ является дисперсионным уравнением для определения резонансных частот, предсказанное в работах И. И. Воровича [14, 15].

Вывод

Построено высокоточное решение контактной задачи для двух деформируемых штампов и получено дисперсионное уравнение для вычисления дискретных резонансов, предсказанных в свое время И. И. Воровичем. Построение выполнено для деформируемых штампов простой реологии, описываемых уравнением Гельмгольца. Для случаев более сложных реологий в рассмотренной задаче применяется универсальный метод моделирования [16]. Результаты



исследования могут быть использованы в проблеме оценки сейсмичности и предвестников землетрясений в горных районах, имеющих ущелья и ложбины, моделируемых зонами между торцами деформируемых штампов.

Список литературы

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва : Наука, 1980. 303 с.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва : Гостехиздат, 1949. 272 с.
3. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи трибологии. Москва : Машиностроение, 1988. 256 с.
4. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proceedings of the Royal Society A (London). 2015. Vol. 471, iss. 2180. 20150271. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271>
5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I – Theory // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35, iss. 18. P. 2349–2362. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00154-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6)
6. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II – Examples // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35, iss. 18. P. 2363–2378. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00155-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8)
7. Zhou S., Gao X. L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2013. Vol. 64. P. 145–166. <https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0>
8. Guler M. A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // International Journal of Mechanical Sciences. 2007. Vol. 49, iss. 2. P. 161–182. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006>
9. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2007. Vol. 26, iss. 1. P. 171–188. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007>
10. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribology International. 2007. Vol. 40, iss. 4. P. 574–579. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008>
11. Almqvist A. An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem. 2013. 43216. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange> (дата обращения: 01.12.2023). <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3960.7200>
12. Andersson L. E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // Applied Mathematics and Optimization. 2000. Vol. 42. P. 169–202. <https://doi.org/10.1007/s002450010009>
13. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2015. Vol. 22. P. 508–519. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012>
14. Ворович И. И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 245, № 4. С. 817–820.
15. Ворович И. И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 245, № 5. С. 1076–1079.
16. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2021. Т. 499, № 1. С. 30–35. <https://doi.org/10.31857/S2686740021040039>, EDN: LXXMAT
17. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. Москва : Наука, 1979. 320 с.
18. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Евдокимов В. С. О механической концепции самосборки наноматериалов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 5. С. 111–119. <https://doi.org/10.31857/S057232992360007X>, EDN: GFZOYW

References

1. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkoupругosti* [Contact Problems of the Theory of Elasticity and Viscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1980. 303 p. (in Russian).
2. Shtaerman I. Ya. *Kontakt'naya zadacha teorii uprugosti* [Contact Problems of the Theory of Elasticity]. Moscow, Gostekhizdat, 1949. 272 p. (in Russian).



3. Goryacheva I. G., Dobychin M. N. *Kontaktnye zadachi tribologii* [Contact Problems of Tribology]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1988. 256 p. (in Russian).
4. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society A* (London), 2015, vol. 471, iss. 2180, 20150271. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271>
5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I – Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, iss. 18, pp. 2349–2362. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00154-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6)
6. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II – Examples. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, iss. 18, pp. 2363–2378. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00155-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8)
7. Zhou S., Gao X. L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, pp. 145–166. <https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0>
8. Guler M. A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, vol. 49, iss. 2, pp. 161–182. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006>
9. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2007, vol. 26, iss. 1, pp. 171–188. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007>
10. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*, 2007, vol. 40, iss. 4, pp. 574–579. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008>
11. Almqvist A. *An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem*. 2013. 43216. Available at: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange> (accessed December 1, 2023). <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3960.7200>
12. Andersson L. E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Applied Mathematics and Optimization*, 2000, vol. 42, pp. 169–202. <https://doi.org/10.1007/s002450010009>
13. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, vol. 22, pp. 508–519. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012>
14. Vorovich I. I. Spectral properties of a boundary value problem of elasticity theory for a nonuniform band. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1979, vol. 245, iss. 4, pp. 817–820 (in Russian).
15. Vorovich I. I. Resonant properties of an elastic inhomogeneous strip. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1979, vol. 245, iss. 5, pp. 1076–1079 (in Russian).
16. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, iss. 8, pp. 218–222. <https://doi.org/10.1134/S1028335821080012>, EDN: VTZIDS
17. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).
18. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Evdokimov V. S. On the mechanical concept of self-assembly of nanomaterials. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, pp. 1528–1535. <https://doi.org/10.3103/S002565442370022X>, EDN: GFZOYW

Поступила в редакцию / Received 07.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024