



Научная статья
УДК 534.1:539.3

Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек

Г. Т. Дзедбисашвили[✉], А. Л. Смирнов, С. Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Дзедбисашвили Георгий Тамазович, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, d-g-t@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8342-3065>, AuthorID: 1030504

Смирнов Андрей Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, a.l.smirnov@spbu.ru, <http://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, AuthorID: 7703

Филиппов Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, s_b_filippov@mail.ru <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Аннотация. В статье рассмотрены собственные частоты призматических тонких оболочек, поперечное сечение которых представляет собой правильный многоугольник. Проанализированы спектры частот свободных колебаний таких оболочек при увеличении числа сторон сечения при условии сохранения периметра. Сопоставляются фундаментальные частоты призматической оболочки правильного многоугольного сечения и круглой цилиндрической оболочки. Для малого и большого числа сторон многоугольника аналитические и асимптотические решения сравниваются с численными решениями с помощью метода конечных элементов (COMSOL). Сходимость численного метода исследована для призматической оболочки с большим числом граней.

Ключевые слова: свободные колебания тонких оболочек, призматические оболочки, метод конечных элементов

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

Для цитирования: Дзедбисашвили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 49–56. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56>, EDN: BFHZFQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Free vibration frequencies of prismatic thin shells

G. T. Dzebisashvili[✉], A. L. Smirnov, S. B. Filippov

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Georgii T. Dzebisashvili, d-g-t@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8342-3065>, AuthorID: 1030504

Andrei L. Smirnov, a.l.smirnov@spbu.ru, <http://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, AuthorID: 7703

Sergei B. Filippov, s_b_filippov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Abstract. The paper examines the natural frequencies of prismatic thin shells, the cross-section of which is the regular polygon. Spectra of free vibration frequencies of such shells are analyzed as the number of



cross-section sides increases, provided that the perimeter is preserved. The relation between fundamental frequencies of the prismatic shells with the regular polygonal cross-section and a circular cylindrical shell is discussed. For a small and large number of polygon sides analytical and asymptotic solutions are compared with numerical solutions obtained by the finite element method (COMSOL). The convergence of the numerical method is studied for the prismatic shell with a large number of facets.

Keywords: free vibrations of thin shells, prismatic shells, finite element method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

For citation: Dzebisashvili G. T., Smirnov A. L., Filippov S. B. Free vibration frequencies of prismatic thin shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 49–56 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56>, EDN: BFHZFQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Рассматриваются колебания призматической тонкой оболочки с сечением в виде правильного многоугольника.

В предшествующих исследованиях методы решения различались в зависимости от вида сечения и граничных условий. Так, для шарнирно опертой квадратной оболочки в [1] получено аналитическое решение, в то время как для других граничных условий [2] частоты и формы колебаний ищутся из приближенного решения трансцендентных уравнений. Частоты прямоугольной оболочки, если она мало отличается от квадратной, могут быть найдены в виде асимптотических разложений [3], в других же случаях может быть целесообразно использование метода Рэлея – Ритца [4, 5]. Полученные аналитические и численные результаты сравниваются с численными, полученными, как правило, с помощью метода конечных элементов.

В работе [6] для изучения колебаний оболочек многоугольного сечения использовались решения на основе обобщенной теории балок, преимущественное внимание было уделено изучению форм колебаний, а также влиянию относительной длины оболочки на частоты и формы колебаний. Для длинной оболочки с сечением в виде шестиугольника в [7] было получено приближенное решение, основанное на уравнениях полубезмоментной теории. В [8] описан метод конечных полос для нелинейного статического анализа призматических оболочек.

В данном исследовании будут проанализированы закономерности поведения фундаментальных частот малых изгибных колебаний при изменении числа сторон многоугольного сечения для оболочек разной толщины.

1. Постановка задачи

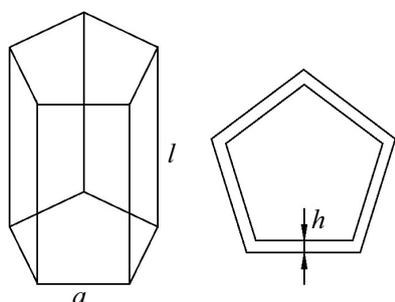


Рис. 1. Призматическая оболочка с сечением в виде правильного n -угольника

Fig. 1. A prismatic shell with cross-section in the form of a regular n -sided polygon

Рассматриваются собственные поперечные колебания призматической изотропной тонкой оболочки длиной l и толщиной h с поперечным сечением в виде правильного n -угольника с длиной стороны a (рис. 1). Материал оболочки имеет модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и плотность ρ .

Грани призматической оболочки состоят из тонких пластин. В плоскости i -й пластины введем локальные прямоугольные координаты (x, y) (рис. 2).

Используем линейные уравнения Лагранжа – Жермен для описания малого поперечного прогиба $w^{(i)}(x, y)$ i -й пластины

$$D\Delta\Delta w^{(i)} - \rho h w^{(i)} \omega^2 = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$



где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, ω — угловая частота собственных колебаний пластины. Далее используется безразмерный параметр собственной частоты $\lambda = \omega^2 R^2 \frac{\rho}{E}$ и длины $L = \frac{l}{R}$, где R — характерный размер оболочки.

Пусть α — угол между смежными стенками оболочки, β — смежный с ним угол (рис. 3).

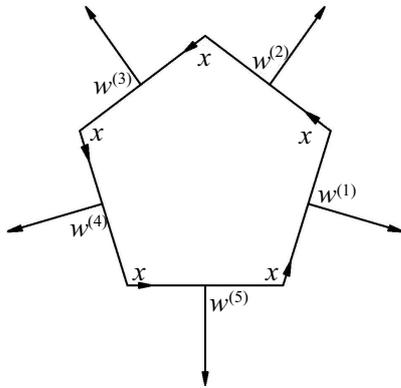


Рис. 2. Локальные координаты в сечении оболочки
Fig. 2. Local coordinates in the shell cross-section

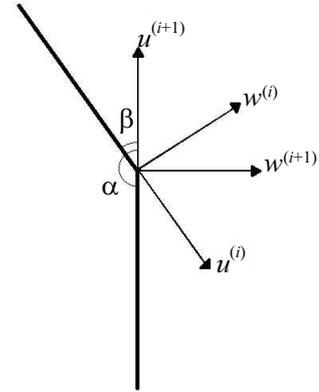


Рис. 3. Сопряжение двух смежных стенок оболочки
Fig. 3. Conjugation of two adjacent shell walls

Будем предполагать, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, перемещения и изгибающие моменты в местах сопряжения пластин равны, а углы между смежными пластинами остаются равными $\frac{2\pi}{n}$ при изгибах. Тогда на линиях сопряжения пластин

$$\begin{aligned} u^{(i+1)}(0, y) &= w^{(i)}(a, y) \sin \beta - u^{(i)}(a, y) \cos \beta, \\ w^{(i+1)}(0, y) &= w^{(i)}(a, y) \cos \beta + u^{(i)}(a, y) \sin \beta, \\ w_x^{(i)}(a, y) &= w_x^{(i+1)}(0, y), \quad w_{xx}^{(i)}(a, y) = w_{xx}^{(i+1)}(0, y), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u^{(i)}$, $u^{(i+1)}$ — перемещения в плоскости i и $i + 1$ пластины соответственно. Здесь и далее подразумевается циклическое индексирование, т. е. $(n + 1) = (1)$.

Если β не является малой величиной, т. е. n не слишком большое, то в (2) можно отбросить перемещения $u^{(i)}$, $u^{(i+1)}$ в плоскости пластины, которые значительно меньше нормальных перемещений $w^{(i)}$, $w^{(i+1)}$.

Наконец, следует задать условия на торцах оболочки. В частности, для условий шарнирного опирания они имеют вид

$$w^{(i)}(x, 0) = w^{(i)}(x, l) = 0, \quad w_{yy}^{(i)}(x, 0) = w_{yy}^{(i)}(x, l) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Здесь и далее будем предполагать, что оболочка имеет среднюю длину. Предельные варианты оболочки (короткая и длинная) были рассмотрены в [9].

2. Призматические оболочки с квадратным поперечным сечением

Вначале рассмотрим тонкую призматическую оболочку с квадратным поперечным сечением. В этом случае условия на линии сопряжения пластин (2) с учетом малости перемещений $u^{(i)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} w^{(i)}(a, y) &= w^{(i+1)}(0, y) = 0, \\ w_x^{(i)}(a, y) &= w_x^{(i+1)}(0, y), \quad w_{xx}^{(i)}(a, y) = w_{xx}^{(i+1)}(0, y), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ограничимся рассмотрением граничных условий шарнирного опирания на торцах оболочки (3). Задачи о собственных колебаниях призматических оболочек с квадратным поперечным сечением для других граничных условий на торцах рассмотрены в [1] и [2].

Решение в виде $w^{(i)}(x, y) = (-1)^i \sin \frac{m_1 \pi x}{a} \sin \frac{m_2 \pi y}{l}$, где $m_1 = 1, 2, \dots$ и $m_2 = 1, 2, \dots$ — волновые числа волн по ширине и длине пластины соответственно, удовлетворяет граничным условиям (4) и (3). Подставив решение в исходное уравнение (1), получим известную формулу для собственной частоты шарнирно опертой пластины [10]

$$\omega^2 = \pi^4 \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{l^2} \right)^2 \frac{D}{\rho h}.$$

В качестве характерного размера используем ширину пластины a , тогда параметр собственной частоты λ находится по формуле

$$\lambda = \pi^4 \left(m_1^2 + \frac{m_2^2}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)},$$

где $H = h/a$ — безразмерная толщина пластин, а $L = l/a$ — безразмерная длина пластин. В частности, для фундаментальной частоты ($m_1 = m_2 = 1$)

$$\lambda_0^p = \pi^4 \left(1 + \frac{1}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)}. \tag{5}$$

Численный анализ призматической оболочки при $L = 3$ проводился в конечно-элементном пакете COMSOL для оболочки, выполненной из стали ($\nu = 0.3$). Формы, соответствующие двум нижшим частотам колебаний, приведены на рис. 4.

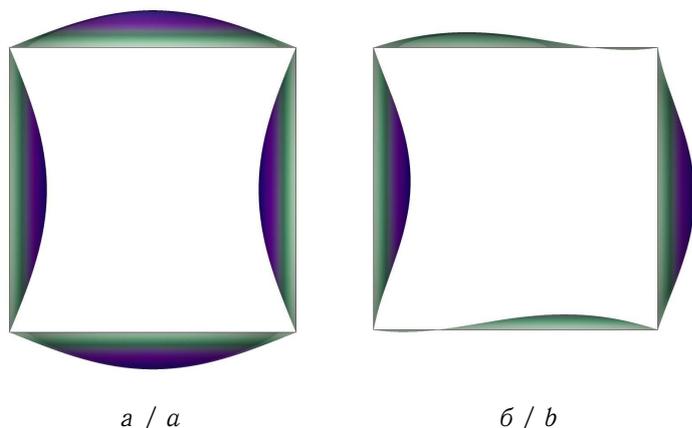


Рис. 4. Первая (а) и вторая (б) собственные формы колебаний призматической оболочки с квадратным поперечным сечением (цвет онлайн)

Fig. 4. First (a) and second (b) natural vibration modes of a prismatic shell with a square cross-section (color online)

В силу симметрии конструкции некоторые собственные частоты являются кратными. Заметим, что предположение о сохранении угла между смежными пластинами в процессе деформации выполняется с высокой точностью как для первой, так и для второй формы колебаний.

Частотный параметр имеет порядок $O(H^2)$ и быстро убывает с уменьшением толщины. В таблице приведены значения частотного параметра для фундаментальной частоты колебаний оболочки при разных значениях безразмерной толщины, полученные по формуле (5) и в пакете COMSOL, и относительная погрешность аналитической формулы, убывающая с уменьшением толщины пластин.

Значения частотного параметра для фундаментальной частоты колебаний оболочки
Table. Frequency parameter values of the fundamental frequency of shell vibrations

H	(5)	COMSOL	Отн. погрешность, %
0.01	$1.10053 \cdot 10^{-3}$	$1.09912 \cdot 10^{-3}$	0.1947
0.005	$2.75134 \cdot 10^{-4}$	$2.75044 \cdot 10^{-4}$	0.0987
0.002	$4.40214 \cdot 10^{-5}$	$4.40202 \cdot 10^{-5}$	0.0691
0.001	$1.10053 \cdot 10^{-5}$	$1.10050 \cdot 10^{-5}$	0.0687



3. Призматические оболочки с поперечным сечением в виде правильного многоугольника

Рассмотрим теперь призматическую оболочку, поперечным сечением которой является правильный n -угольник (рис. 5).

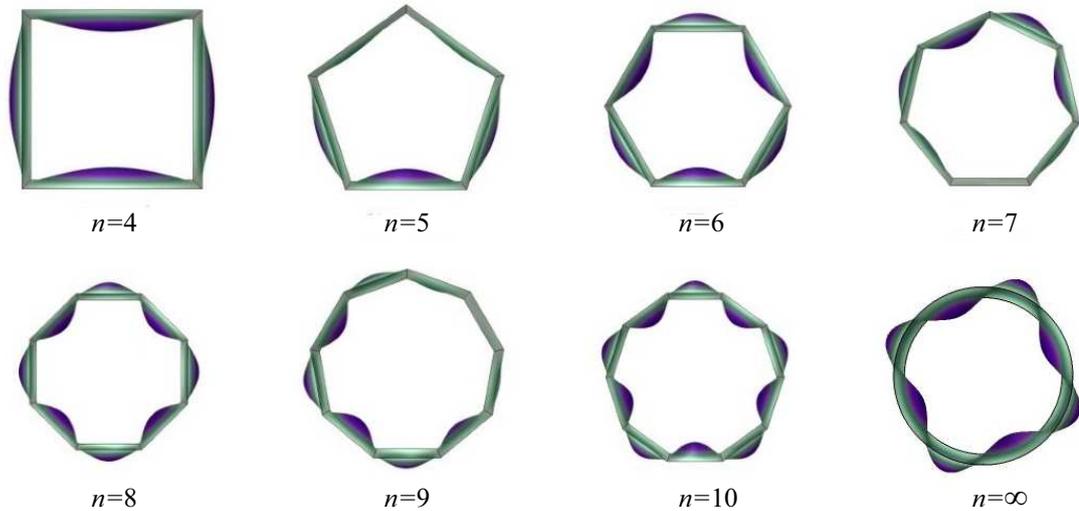


Рис. 5. Фундаментальная форма колебаний призматической оболочки при разных n (цвет онлайн)

Fig. 5. Fundamental mode of vibrations of a prismatic shell for different n (color online)

Заметим, что при увеличении числа n призматическая оболочка с сечением в виде правильного многоугольника становится близкой к круговой цилиндрической оболочке радиуса R . Рассмотрим призматическую и круговую цилиндрическую оболочки с равными периметрами сечений. Тогда длина стороны n -угольной призматической оболочки $a = 2\pi R/n$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда оболочка имеет четное число сторон. Случай нечетного числа сторон был изучен в [9].

Угол β между смежными сторонами определяется формулой $\beta = \pi(1 - 2/n)$. Если число сторон оболочки четное, то можно предположить, что форма собственных колебаний, соответствующая фундаментальной частоте призматической оболочки с небольшим числом сторон, будет похожа на форму колебаний оболочки с квадратным сечением, когда две смежные пластины испытывают равные прогибы соответственно вовнутрь и вовне. Действительно, при небольших значениях $n \sin \beta \approx 1$, а $\cos \beta \ll 1$, и для оценки частотного параметра вместо точных условий сопряжения пластин (2) мы можем использовать условия (4). Используя R в качестве характерного размера, запишем формулу для параметра фундаментальной частоты колебаний в виде

$$\lambda_0^p = \pi^4 \left(\frac{n^2}{4\pi^2} + \frac{1}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad (6)$$

где $L = l/R$, $H = h/R$. Условия (2) более жесткие, чем условия (4), поэтому формула (6) задает верхнюю границу для параметра фундаментальной частоты колебаний при малых n . Точность этой оценки быстро падает с ростом n .

При больших значениях n первая форма колебаний начинает напоминать первую форму колебаний круговой цилиндрической оболочки. В работе [11] получена асимптотическая формула для низших частот колебаний круговой тонкостенной цилиндрической оболочки. В наших обозначениях для шарнирно опертой оболочки она имеет вид

$$\lambda(m) = \frac{\pi^4}{m^4 L^4} + \frac{m^4 H^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad (7)$$

где m — число волн в окружном направлении.

Минимизируя значение $\lambda(m)$ по m , получаем оценку для волнового числа, соответствующего нижней собственной частоте, и значение параметра частоты

$$\lambda_0^s = \frac{\pi^2 H}{L^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad m_0^4 = \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}\pi^2}{L^2 H}.$$

Поскольку значение m_0 ($m^l \leq m_0 \leq m^r$) должно быть целым, следует положить $\lambda_0^s = \min(\lambda(m^l), \lambda(m^r))$. Это значение является верхней границей для частотного параметра призматической оболочки с большим числом сторон, причем при больших значениях числа сторон n частоты призматической оболочки мало отличаются от частот круговой оболочки.

4. Численный анализ

В качестве примера рассмотрим шарнирно опертую на торцах стальную призматическую оболочку длины $L = 3$ с сечением в виде правильного n -угольника. Для численного анализа используем конечноэлементный пакет COMSOL.

Зависимость фундаментальной частоты призматической оболочки толщины $H = 0.01$ и $H = 0.001$ от числа граней изображена на рис. 6.

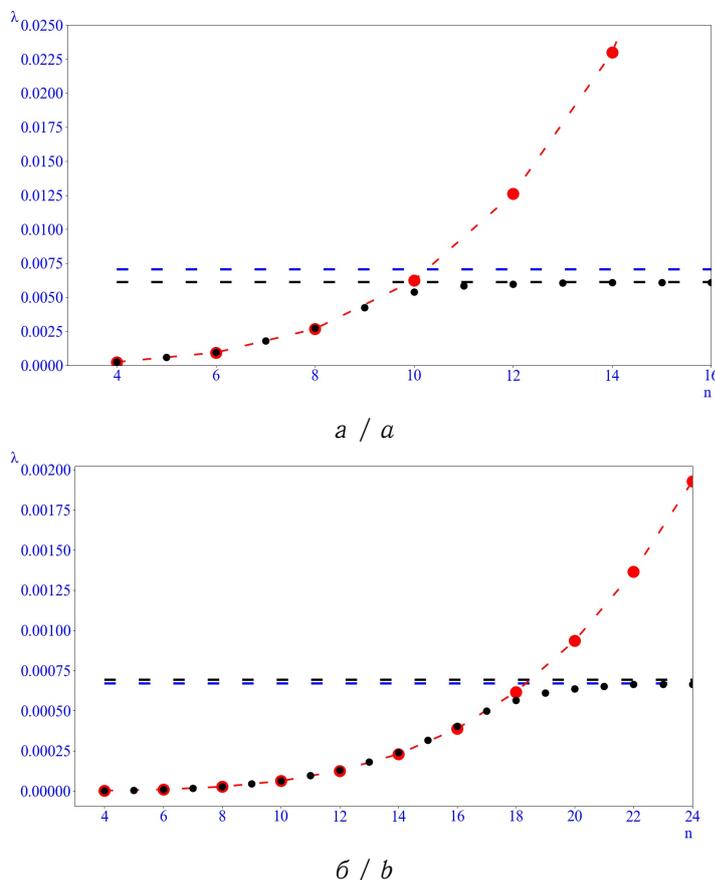


Рис. 6. Параметр фундаментальной частоты призматической оболочки с n -угольным сечением: a — при $H = 0.01$; b — при $H = 0.001$. Красные точки — формула (6), синяя штриховая линия — формула (7), черные точки — частота n -угольной оболочки (COMSOL), черная штриховая линия — частота круговой оболочки (COMSOL) (цвет онлайн)

Fig. 6. Fundamental frequency parameter of a prismatic shell with a regular n -sided cross-section: a — for $H = 0.01$; b — for $H = 0.001$. Red dots — formula (6), blue dashed line — formula (7), black dots — n -sided shell frequency (COMSOL), black dashed line — circular shell frequency (COMSOL) (color online)



Кривая зависимости фундаментальной частоты от числа граней оболочки имеет S -образный вид. При малых значениях n первая форма колебаний близка к форме колебаний шарнирно опертой пластины, при больших значениях n — к форме колебаний круговой оболочки. Для промежуточных значений n обе формулы дают завышенные оценки.

Параметр частоты цилиндрической оболочки имеет порядок H , а для пластины — H^2 . Это связано с тем, что в потенциальную энергию оболочки входят деформации растяжения-сжатия и изгиба, а в потенциальную энергию пластины — только деформации изгиба. При уменьшении толщины частота многоугольной оболочки убывает гораздо быстрее, чем частота цилиндрической оболочки. Поэтому чем меньше толщина призматической оболочки, тем больше должно быть число граней, чтобы фундаментальная частота приблизилась к частоте круговой оболочки. Кроме того, число волн в окружном направлении m_0 , соответствующее фундаментальной частоте круговой оболочки, имеет порядок $H^{-1/4}$ и увеличивается с уменьшением H , в частности, $m_0 = 4$ при $H = 0.01$ и $m_0 = 8$ при $H = 0.001$. При малом числе граней реализация формы с большим волновым числом m затруднена.

Заключение

Фундаментальные частоты оболочек с многоугольным поперечным сечением при большом числе сторон мало отличаются от частот круговой цилиндрической оболочки с тем же периметром сечения. С ростом числа сторон форма колебаний призматической оболочки приближается к форме колебаний круговой цилиндрической оболочки.

При малом (четном) числе сторон форма колебаний, соответствующая фундаментальной частоте, состоит из первых форм колебаний пластин, образующих оболочку. Соответствующее аналитическое решение имеет малую, уменьшающуюся с толщиной оболочки погрешность по сравнению с конечно-элементным решением.

В статье исследованы только фундаментальные частоты оболочек, однако представляет интерес исследование нижней части спектра частот призматических оболочек при малом числе граней.

Список литературы

1. *Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // *Mechanics Research Communications*. 2000. Vol. 27, iss. 4. P. 457–464. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(00\)00118-X](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00118-X), EDN: LGGAGP
2. *Дзедзисашвили Г. Т.* Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2017–2018 г. Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского гос. ун-та, 2019. С. 13–29. EDN: VMRBFC
3. *Амосов А. С.* Колебания тонкой цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2004. Вып. 1. С. 67–72. EDN: RTSPCN
4. *Chen Y., Jin G., Liu Z.* Free vibration of a thin shell structure of rectangular cross-section // *Key Engineering Materials*. 2011. Vol. 486. P. 107–110. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.486.107>
5. *Dzедзисашвили Г. Т., Filippov S. B.* Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1479. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (дата обращения: 26.02.2021).
6. *Gonçalves R., Camotim D.* The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes // *Thin-Walled Structures*. 2014. Vol. 84. P. 177–188. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.011>
7. *Krajcinovic D.* Vibrations of prismatic shells with hexagonal cross section // *Nuclear Engineering and Design*. 1972. Vol. 22, iss. 1. P. 51–62. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(72\)90061-1](https://doi.org/10.1016/0029-5493(72)90061-1)
8. *Borković A., Kovačević S., Milašinović D. D., Radenković G., Mijatović O., Golubović-Bugarški V.* Geometric nonlinear analysis of prismatic shells using the semi-analytical finite strip method // *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 117. P. 63–88. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.033>
9. *Liang S., Chen H. L., Liang T. X.* An analytical investigation of free vibration for a thin-walled regular polygonal prismatic shell with simply supported odd/even number of sides // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 284, iss. 1–2. P. 520–530. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.011>
10. *Leissa A. W.* *Vibration of Plates*. Washington : US Government Printing Office, 1969. 353 p.



11. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва : Наука, 1979. 384 с.

References

1. Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L. Free vibrations of square elastic tubes with a free end. *Mechanics Research Communications*, 2000, vol. 27, iss. 4, pp. 457–464. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(00\)00118-X](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00118-X), EDN: LGGAGP
2. Dzebisashvili G. T. Free vibrations of cylindrical shells with the square cross-section. *Trudy seminara "Komp'yuternye metody v mekhanike sploshnoy sredy" 2017–2018* [Proceedings of the seminar "Computer methods in continuum mechanics" 2017–2018]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Publ., 2019, pp. 13–29 (in Russian). EDN: VMRBFC
3. Amosov A. S. Free vibrations of a thin rectangular elastic tube. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2004, iss. 1, pp. 67–72 (in Russian). EDN: RTSPCN
4. Chen Y., Jin G., Liu Z. Free vibration of a thin shell structure of rectangular cross-section. *Key Engineering Materials*, 2011, vol. 486, pp. 107–110. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.486.107>
5. Dzebisashvili G. T., Filippov S. B. Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1479. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (accessed February 26, 2021).
6. Gonçalves R., Camotim D. The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes. *Thin-Walled Structures*, 2014, vol. 84, pp. 177–188. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.011>
7. Krajcinovic D. Vibrations of prismatic shells with hexagonal cross section. *Nuclear Engineering and Design*, 1972, vol. 22, iss. 1, pp. 51–62. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(72\)90061-1](https://doi.org/10.1016/0029-5493(72)90061-1)
8. Borković A., Kovačević S., Milašinović D. D., Radenković G., Mijatović O., Golubović-Bugarški V. Geometric nonlinear analysis of prismatic shells using the semi-analytical finite strip method. *Thin-Walled Structures*, 2017, vol. 117, pp. 63–88. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.033>
9. Liang S., Chen H. L., Liang T. X. An analytical investigation of free vibration for a thin-walled regular polygonal prismatic shell with simply supported odd/even number of sides. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, vol. 284, iss. 1–2, pp. 520–530. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.011>
10. Leissa A. W. *Vibration of Plates*. Washington, US Government Printing Office, 1969. 353 p.
11. Goldenweiser A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free Vibrations of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 28.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024