



Научная статья  
УДК 534.131.2

## Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью

С. В. Лекомцев<sup>✉</sup>, В. П. Матвеевко

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Россия, 614068, г. Пермь, ул. Академика Королева, д. 1

**Лекомцев Сергей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, [lekomtsev@icmm.ru](mailto:lekomtsev@icmm.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

**Матвеевко Валерий Павлович**, доктор технических наук, академик РАН, заведующий отделом, [mvp@icmm.ru](mailto:mvp@icmm.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

**Аннотация.** В аэрокосмической промышленности часто применяются цилиндрические оболочки с эллиптическим профилем, которые изготавливаются из композиционного материала методом намотки. В процессе производства или эксплуатации конструкции существует вероятность возникновения несовершенства формы в виде отклонения от кругового поперечного сечения. Анализ колебаний таких изделий, содержащих внутри себя жидкость, требует тщательного изучения с целью определения эксплуатационных характеристик, влияющих на их жизненный цикл. В статье сформулирована математическая постановка и представлен соответствующий ей конечно-элементный алгоритм, предназначенные для определения собственных частот колебаний слоистых композитных эллиптических цилиндрических оболочек, наполненных жидкостью. Решение задачи осуществляется в трехмерной постановке методом конечных элементов. Криволинейная поверхность оболочки представляется в виде совокупности плоских четырехугольных сегментов, в каждом из которых выполняются соотношения классической теории слоистых пластин. Мембранные перемещения описываются с использованием билинейных функций формы Лагранжа. Прогиб в направлении нормали к боковой поверхности и углы поворота аппроксимируются несовместными кубическими полиномами Эрмита. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости описываются в рамках акустического приближения волновым уравнением относительно гидродинамического давления, которое вместе с граничными условиями и условием непроницаемости на смоченной поверхности преобразуется к слабой форме. Верификация разработанного численного алгоритма осуществлена путем сравнения полученных собственных частот колебаний с известными данными, представленными в литературе для круговых цилиндрических оболочек с разными схемами укладки слоистого композиционного материала. В примерах оценено влияние геометрических размеров конструкции, граничных условий на ее краях и отношения полуосей эллипса. Получены новые количественные и качественные закономерности, показана возможность управления собственными частотами колебаний за счет подбора параметров композиционного материала.

**Ключевые слова:** собственные колебания, эллиптические цилиндрические оболочки, гидроупругость, идеальная жидкость, слоистый композиционный материал

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания.

**Для цитирования:** Лекомцев С. В., Матвеевко В. П. Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 71–85. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85>, EDN: QFMMAH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Natural vibration of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid

S. V. Lekomtsev<sup>✉</sup>, V. P. Matveenko

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 1 Academician Korolev St., Perm 614068, Russian Federation

Sergey V. Lekomtsev, lekomtsev@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

Valerii P. Matveenko, mvp@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

**Abstract.** The aerospace industry often uses cylindrical shells with elliptical cross-section, which are manufactured from composite material using a filament winding method. During the fabrication process or operation of the structure, there is a probability of shape imperfection in the form of deviation from a circular cross-section. The vibration analysis of such structures containing fluid requires an in-depth study to determine the performance characteristics affecting their life cycle. In this article we develop a mathematical formulation and present the corresponding finite element algorithm for determining the natural frequencies of vibrations of layered composite elliptical cylindrical shells filled with fluid. The problem is solved in a three-dimensional formulation by the finite element method. The curvilinear surface of the shell is represented as a set of flat rectangular segments, in which the relations of the classical laminated plate theory are fulfilled. The membrane displacements are described using bilinear Lagrange shape functions. The deflection in the direction normal to the lateral surface and the rotation angles are approximated by incompatible cubic Hermite polynomials. Small vibrations of an ideal compressible fluid are described in the framework of the acoustic approximation by a wave equation for hydrodynamic pressure, which, together with the boundary conditions and the impermeability condition on the wetted surface, is transformed to a weak form. The verification of the developed numerical algorithm is carried out by comparing the obtained natural frequencies of vibration with the known data presented in the literature for layered composite circular cylindrical shells. A number of examples are considered to evaluate the influence of geometrical dimensions of the structure, boundary conditions at the shell edges and the ratio of ellipse semi-axes. New quantitative and qualitative dependencies have been established, and the possibility of the natural frequency control through the selection of parameters of composite material has been shown.

**Keywords:** natural vibration, elliptical cylindrical shells, hydroelasticity, ideal fluid, layered composite material

**Acknowledgements:** The research was carried out in the framework of the government order.

**For citation:** Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 71–85 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85>, EDN: QFMMAH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Цилиндрические оболочки с жидкостью нередко являются важными элементами сложных изделий, используемых в авиационной промышленности. Широкие возможности в области формирования требуемых динамических характеристик такого рода конструкций открываются за счет использования слоистых композиционных материалов. Подбирая схему армирования и укладки, можно добиться безопасного функционирования изделия в необходимом спектре частот при ограниченных габаритах и массе. Однако отклонение поперечного сечения оболочки от идеального кругового профиля, возникающее в процессе ее изготовления или эксплуатации, приводит к изменению заложенных при проектировании механических и динамических параметров. Самым простым способом учета такой неправильности формы



является использование в геометрической модели овального или эллиптического сечения вместо круглого.

Некоторые особенности в поведении эллиптических цилиндрических оболочек без жидкости были продемонстрированы экспериментально [1–3] и теоретически [1, 2, 4–7] еще в XX вв. Исчерпывающий обзор исследований по данному направлению приведен в статье [8]. В ней систематизированы публикации, посвященные различным задачам статики и динамики тонкостенных конструкций с некруговым поперечным сечением, их линейному и нелинейному анализу, устойчивости, а также учету пластических деформаций.

Исследованию круговых оболочек вращения, выполненных из слоистых композиционных материалов, посвящено значительное количество публикаций [9–11]. В меньшей степени изучены многослойные конструкции с некруговым поперечным сечением. Первоначально для этой цели во многих работах использовались классические теории оболочек [12–15], но в последующие годы широкое распространение получили более сложные модели и подходы [16–23]. В статье [16] для решения задачи о колебаниях овальных тонкостенных цилиндров использована теория композитных оболочек, учитывающая эффекты поперечной деформации сдвига и инерции вращения. Перемещения в окружном и продольном направлениях описываются с помощью комбинации функций Безье и балочных функций. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с представленными в литературе данными. В работе [17] решение уравнений движения осуществлено путем разложения перемещений и углов поворота в ряд по степеням. Проанализировано влияние параметра эллиптичности, числа слоев, схемы укладки и модуля упругости на собственные частоты колебаний свободно опертых на обоих краях эллиптических цилиндрических оболочек. В статье [18] рассмотрены различные варианты граничных условий, задаваемых на краях конструкции, и их комбинации: свободный край, сдвиговая диафрагма, шарнирное опирание, жесткая заделка и три вида упругого опирания разной жесткости. Решение осуществлено методом Рэлея – Ритца с помощью модифицированного вариационного принципа и техники многоуровневого разбиения. Перемещения и углы поворота каждого сегмента оболочки в меридиональном и окружном направлениях аппроксимируются полиномами Якоби. В примерах оценено влияние количества слоев, схемы их укладки, длины конструкции и отношения модулей упругости слоистого композиционного материала на собственные частоты колебаний эллиптических цилиндрических оболочек.

В [16–18] применяются теории первого порядка по толщине, учитывающие поперечные деформации сдвига (first order shear deformation theory – FSDT). Более высокий порядок аппроксимации перемещений использован в работах [19–23]. Анализ динамических характеристик эллиптических и овальных композитных цилиндрических оболочек выполнен с помощью метода конечных элементов в статьях [19, 20] соответственно. Оценено влияние геометрических параметров (толщина, длина, размеры поперечного сечения), угла намотки и количества слоев на собственные частоты колебаний рассматриваемых конструкций. В [20] дополнительно решена нестационарная задача динамики, в которой учтено действие давления и температурной нагрузки. В работах [19, 20] использована модель, в которой изгибные перемещения оболочки имеют второй порядок по координате в направлении толщины. При описании мембранных перемещений учитываются слагаемые вплоть до третьей степени и применяются кусочно-однородные «зиг-заг» функции. Полученные результаты сравнены с расчетами на основе модели первого порядка (FSDT). Показано, что она позволяет получить качественно похожие зависимости, но количественное различие является довольно существенным и зависит от ряда параметров (эксцентриситет, угол намотки). Собственные частоты и формы колебаний эллиптических цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного материала, исследованы в [21]. Решение осуществлено методом конечных элементов с использованием теории, приведенной в статьях [19, 20], но без учета «зиг-заг» функций. Представлены численные результаты, демонстрирующие влияние параметра эллиптичности, показателя объемной доли функционально-градиентного материала и толщины оболочки. Семимодальная теория, допускающая независимое движение верхней и



нижней поверхностей конструкции, использована в [22] для анализа собственных колебаний свободно опертых на обоих краях эллиптических цилиндрических оболочек. Численное решение осуществлено методом Рунге. Исследовано влияние параметра эллиптичности, длины и толщины оболочки. Показано, что частоты, соответствующие симметричным и антисимметричным модам высоких окружных гармоник, совпадают. Собственные колебания ортотропных эллиптических и овальных цилиндрических оболочек рассмотрены в работе [23]. Решение осуществлено обобщенным методом дифференциальных квадратур с использованием различных теорий оболочек. Проанализировано влияние угла намотки и геометрических параметров поперечного сечения. Показано, что применение оболочечных теорий высокого порядка позволяет получить более достоверные значения частот без использования поправочного коэффициента для поперечных деформаций сдвига.

Отметим, что исследование статического и динамического поведения некруговых цилиндрических оболочек может быть осуществлено с помощью обобщенного подхода, предназначенного для анализа трехмерных конструкций двойной кривизны [24–30], выполненных из композитного, функционально-градиентного [26, 29] и пьезоэлектрического [30] материалов. Используемые в [28–30] конечные элементы позволяют сохранить компромисс между временем вычислений и точностью получаемых результатов. Они обладают хорошей сходимостью на грубой сетке, не подвержены проблеме сдвигового запираания и способны конкурировать со своими аналогами в коммерческих комплексах программ.

В литературе представлено незначительное количество работ, посвященных собственным колебаниям некруговых цилиндрических оболочек с жидкостью. Исследования по данному направлению ограничены, традиционно, конструкциями с круглым поперечным сечением. За исключением статей самих авторов [31–33] можно указать публикации [34–38]. В работах [34, 35] аналитически проанализированы изгибные колебания эллиптической колонны, частично погруженной в воду. В [36] представлен полуаналитический метод для исследования акустического излучения от бесконечной некруговой цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости и погруженной в воду. Выражение для акустического давления получено из уравнения Гельмгольца с помощью спектрального метода виртуальной границы. В [37] для оболочек с произвольной геометрией предложен смешанный подход, основанный на использовании метода граничных элементов для моделирования динамики потенциальной жидкости и метода конечных элементов для упругой конструкции. В примерах рассмотрены задачи гидроупругой устойчивости оболочек. Анализ собственных и вынужденных установившихся гармонических колебаний эллиптической цилиндрической оболочки, погруженной в идеальную жидкость, выполнен в [38]. Математическая постановка задач основана на теории оболочек Флюгге и уравнении Гельмгольца, применяемого для описания поведения идеальной акустической среды. Решение выполнено путем разложения перемещений и звукового давления в ряды Фурье. В работе исследовано влияние параметра эллиптичности, толщины и длины оболочки, положения возбуждающей гармонической силы на динамические характеристики конструкции.

Большинство из перечисленных выше моделей, предназначенных для описания динамического поведения некруговых композитных цилиндрических оболочек, пригодно для использования в задачах гидроупругости. Однако публикации по данной тематике не представлены в доступной литературе. Между тем при проектировании таких тонкостенных конструкций необходима не только предварительная оценка спектра их собственных частот колебаний, но и оптимизация параметров пакета композиционного материала. Это позволит повысить эксплуатационные характеристики изделия за счет незначительного изменения исходной геометрии.

С целью получения новых качественных и количественных закономерностей о собственных частотах колебаний композитных эллиптических цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, в данной статье сформулирована математическая постановка задачи и представлен соответствующий ей конечно-элементный алгоритм.



## 1. Математическая постановка и численная реализация

При моделировании пространственной тонкостенной оболочки ее криволинейная поверхность аппроксимируется совокупностью плоских сегментов [39]. В каждом из них выполняются соотношения классической теории слоистых пластин [40], согласно которой малые деформации представляются в виде

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}\}^T &= \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} \right\}^T + \bar{z} \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \right\}^T, \\ \bar{\varepsilon}^{(0)} &= \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right\}^T, \\ \bar{\varepsilon}^{(1)} &= \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \right\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}\bar{y}} \right\}^T, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$  — перемещения точек серединной поверхности сегмента в направлении осей  $O\bar{x}$ ,  $O\bar{y}$ ,  $O\bar{z}$  декартовой системы координат  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  (рис. 1, а).

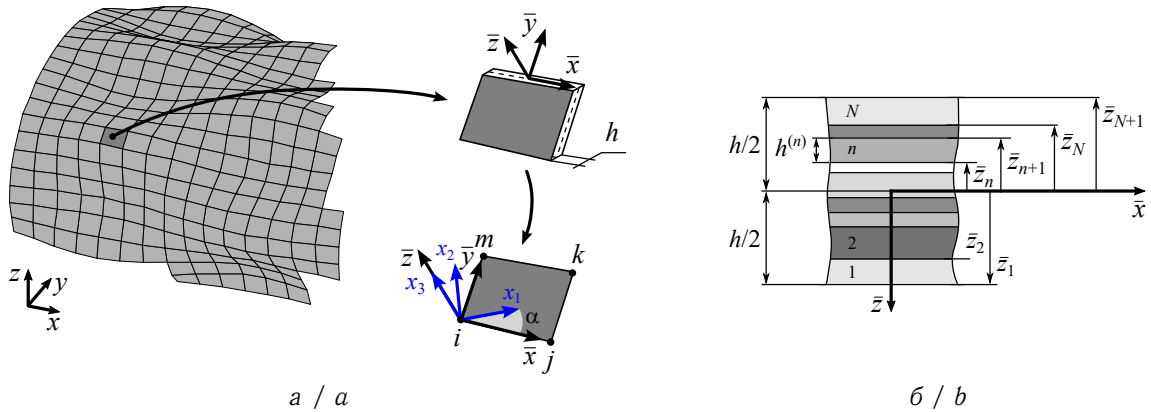


Рис. 1. Оболочка в виде совокупности плоских сегментов (а) и схема расположения слоев (б)  
Fig. 1. Shell as an assembly of flat segments (a) and layers layout (b)

Вектор  $\bar{\varepsilon}$ , содержащий деформации серединной поверхности  $\bar{\varepsilon}^{(0)}$  и кривизны  $\bar{\varepsilon}^{(1)}$ , записывается следующим образом:

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \bar{\varepsilon}^{(0)}, \bar{\varepsilon}^{(1)} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \right\}^T. \quad (2)$$

Соотношения упругости, связывающие вектор усилий и моментов  $\bar{\mathbf{m}}$  с вектором обобщенных деформаций  $\bar{\varepsilon}$ , представляются в виде [40, 41]:

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} N_{\bar{x}\bar{x}} \\ N_{\bar{y}\bar{y}} \\ N_{\bar{x}\bar{y}} \\ M_{\bar{x}\bar{x}} \\ M_{\bar{y}\bar{y}} \\ M_{\bar{x}\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \bar{\varepsilon}, \quad (3)$$

где элементы матрицы  $\mathbf{S}$  вычисляются с помощью выражений

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(n)} (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(n)} (\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2), \quad (4)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(n)} (\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3), \quad i, j = 1, 2, 6.$$

Коэффициенты матрицы упругих констант  $\bar{Q}_{ij}^{(n)}$  ортотропного материала  $n$ -го слоя определяются через характеристики материала  $Q_{ij}^{(n)}$  в системе координат волокна  $Ox_1x_2x_3$  и преобразуются с помощью матрицы поворота  $\mathbf{T}$ :

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(n)} = \mathbf{T}^{(n)} \mathbf{Q}^{(n)} (\mathbf{T}^{(n)})^T, \tag{5}$$

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)}, \quad \mathbf{T}^{(n)} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix}^{(n)}.$$

Коэффициенты  $Q_{ij}^{(n)}$  записываются для каждого  $n$ -го слоя материала в терминах инженерных констант [40]:

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E_{11}^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)}\nu_{21}^{(n)}}, \quad Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu_{12}^{(n)}E_{22}^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)}\nu_{21}^{(n)}}, \quad Q_{22}^{(n)} = \frac{E_{22}^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)}\nu_{21}^{(n)}}, \quad Q_{66}^{(n)} = G_{12}^{(n)}, \tag{6}$$

где  $E_{11}^{(n)}$  и  $E_{22}^{(n)}$  — модули упругости материала в направлении осей координат  $Ox_1$  и  $Ox_2$ ,  $\nu_{ij}^{(n)}$  — коэффициенты Пуассона,  $G_{12}^{(n)}$  — модуль сдвига в плоскости  $Ox_1x_2$  (см. рис. 1, а).

Математическая постановка задачи о собственных колебаниях пространственной оболочки с жидкостью основана на вариационном принципе возможных перемещений, который записывается в матричном виде с учетом работы сил инерции:

$$\int_{S_s} \delta \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{e}} dS + \int_{S_s} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{J} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} dS - \int_{S_\sigma} \delta \bar{w} p dS = 0. \tag{7}$$

Здесь  $S_s$  — поверхность оболочки объема  $V_s$ ;  $\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}\}^T$  — вектор обобщенных перемещений, включающий углы поворота  $\theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}$  относительно соответствующих осей системы координат  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ;  $S_\sigma$  — часть поверхности оболочки, которая взаимодействует с жидкостью;  $p$  — гидродинамическое давление жидкости;  $\mathbf{J}$  — матрица инерции вида

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 \\ -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \sum_{n=1}^N \rho_s^{(n)} (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad J_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \rho_s^{(n)} (\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2), \quad J_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \rho_s^{(n)} (\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3),$$

где  $\rho_s^{(n)}$  — плотность  $n$ -го слоя материала оболочки.

Динамика идеальной жидкости в случае малых возмущений описывается в рамках акустического приближения. Соответствующее волновое уравнение формулируется относительно гидродинамического давления  $p$  и преобразуется к слабой форме вместе с граничными условиями и условием непроницаемости на смоченной поверхности  $S_\sigma$  [42]:

$$\int_{V_f} \delta p \left( \frac{1}{c^2} \ddot{p} + \nabla^T \nabla p \right) dV + \rho_f \int_{S_\sigma} \delta p \dot{w} dS = 0, \tag{8}$$



где  $V_f$  — объем, занимаемый жидкостью;  $c$  — скорость звука в жидкости;  $\rho_f$  — плотность жидкости.

При решении уравнения (8) используются следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{z=0} = 0, \quad p|_{z=L} = 0, \quad (9)$$

где  $L$  — длина оболочки.

Применяя известные процедуры метода конечных элементов и представляя движение конструкции и жидкости в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{d}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)\}^T = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad (10)$$

где  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \{\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}), \tilde{p}(\mathbf{x})\}^T$  — функция, зависящая только от координат  $\mathbf{x}$ ,  $i$  — мнимая единица,  $\omega$  — собственная частота колебаний,  $t$  — время, получим обобщенную задачу на собственные значения:

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}.$$

Типовые матрицы масс  $\mathbf{M}$ , жесткости  $\mathbf{K}$  и гидроупругого взаимодействия  $\mathbf{Q}$  для каждого конечного элемента определяются следующим образом:

$$\bar{\mathbf{M}}_s^e = \int_{S_s^e} \mathbf{N}^T \mathbf{J} \mathbf{N} dS, \quad \bar{\mathbf{K}}_s^e = \int_{S_s^e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} dS, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_f^e = \int_{V_f^e} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, \quad \mathbf{K}_f^e = \int_{V_f^e} (\nabla \mathbf{F})^T \nabla \mathbf{F} dV, \quad \bar{\mathbf{Q}}^e = \int_{S_s^e} \mathbf{N}_w^T \mathbf{F} dS,$$

где  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}_w$  — матрица функций формы для давления жидкости  $p$ , вектора обобщенных перемещений оболочки  $\bar{\mathbf{d}}$  и его нормальной составляющей  $\bar{w}$ ;  $\mathbf{B}$  — матрица, связывающая вектор обобщенных деформаций  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  с узловыми значениями вектора обобщенных перемещений.

Матрицы  $\bar{\mathbf{M}}_s^e$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_s^e$  и  $\bar{\mathbf{Q}}^e$  формируются в системе координат  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , связанной с боковой поверхностью конструкции. Их преобразование к глобальным декартовым координатам  $Oxyz$  осуществляется для каждого конечного элемента с помощью матрицы, содержащей направляющие косинусы, известным образом [42]. Оболочка представляется в виде совокупности прямоугольных сегментов, в которых мембранные перемещения  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  описываются с использованием билинейных функций формы Лагранжа. Изгибные перемещения  $\bar{w}$ , углы поворота  $\theta_{\bar{x}}$  и  $\theta_{\bar{y}}$  аппроксимируются несовместными кубическими полиномами Эрмита [42]. Дискретизация области жидкости осуществляется с использованием 8-узловых конечных элементов в форме призмы с билинейной аппроксимацией гидродинамического давления  $p$ .

Численная реализация приведенной выше постановки выполнена в среде MATLAB с привлечением возможностей пакета ANSYS для создания конечно-элементной сетки. Задача на собственные значения (11) решается с использованием неявно перезапускаемого метода Арнольди [43]. Более подробно особенности конечно-элементного алгоритма изложены в статьях авторов, посвященных изотропным оболочкам [32, 33, 44].

## 2. Верификация численного алгоритма

Достоверность получаемых численных результатов подтверждена асимптотическим поведением решения при увеличении числа узловых неизвестных и сравнением с работами других авторов, посвященными конструкциям из слоистого композиционного материала.



**Пример 1.** Рассмотрена задача о собственных колебаниях трехслойной круговой цилиндрической оболочки без жидкости. Характеристики пакета с углами намотки  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  и геометрические параметры конструкции принимались аналогично работе [45]:  $E_{11} = 25E_{22}$ ,  $E_{22} = 2$  ГПа,  $G_{12} = 0.5E_{22}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $\rho_s = 1500$  кг/м<sup>3</sup>, радиус  $R = 1$  м, длина  $L = 5R$ , толщина  $h = R/20$ . Результаты, полученные для разных вариантов закрепления, приведены в табл. 1. Они согласуются с данными из публикаций [45–47] в пределах относительной погрешности 1%. При обозначении граничных условий на краях оболочки используются следующие сокращения: F – свободный край, C – жесткая заделка ( $u = v = w = 0$ ,  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ), SD – ( $v = w = 0$ ,  $\theta_x = 0$ ). Безразмерные собственные частоты колебаний  $\Omega$  вычислялись по выражению

$$\Omega = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_s}{E_{22}}}. \tag{13}$$

Таблица 1 / Table 1

Безразмерные собственные частоты колебаний круговых цилиндрических оболочек, выполненных из трехслойного композиционного материала  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Dimensionless natural frequencies of vibration of circular cylindrical shells made of three-layer composite material  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

j	C-C				SD-C			SD-F	
	МКЭ	[45]	[46]	[47]	МКЭ	[46]	[47]	МКЭ	[47]
1	159.19	159.45	159.44	159.31	153.72	153.83	153.77	211.18	211.13
2	107.56	107.90	107.89	107.71	98.61	98.78	98.70	26.89	27.04
3	107.87	108.12	108.11	108.05	100.77	100.91	100.95	75.25	75.31
4	156.77	156.96	156.95	157.23	152.90	153.03	153.40	143.02	143.07
5	236.57	236.77	236.76	237.70	234.42	234.58	235.59	229.17	229.27

**Пример 2.** В расчетах используется пакет из четырех слоев  $[\alpha/ - \alpha/ - \alpha/\alpha]$  с разными углами намотки  $\alpha$ :  $R = 1$  м,  $L/R = 4$ ,  $R/h = 100$ ,  $E_{11} = 20E_{22}$ ,  $E_{22} = 10$  ГПа,  $G_{12} = 0.65E_{22}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $\rho_s = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. В табл. 2 представлены данные, полученные для третьей гармоники в окружном направлении ( $j = 3$ ), где  $m$  – число полуволн по длине оболочки. Относительное различие полученных результатов от значений из работ [46] и [48] составляет менее 1%. Безразмерные собственные частоты колебаний  $\Omega$  вычислялись следующим образом:

$$\Omega = \omega R \sqrt{\rho_s/E_{22}}. \tag{14}$$

Таблица 2 / Table 2

Безразмерные собственные частоты колебаний круговых цилиндрических оболочек из композиционного материала с разными углами намотки  $[\alpha/ - \alpha/ - \alpha/\alpha]$

Dimensionless natural frequencies of vibration of circular cylindrical shells made of composite material with various angles of ply  $[\alpha/ - \alpha/ - \alpha/\alpha]$

$\alpha,^\circ$	m	C-C			SD-SD		
		МКЭ	[46]	[48]	МКЭ	[46]	[48]
15	1	0.28939	0.28949	0.28948	0.21233	0.21239	0.21237
	4	0.86355	0.86438	0.86382	0.85596	0.85660	0.85610
30	1	0.32880	0.32932	0.32939	0.17523	0.17540	0.17534
	4	1.20162	1.20840	1.20290	1.20042	1.20380	1.20060
45	1	0.23738	0.23843	0.23808	0.11915	0.11953	0.11938
	4	1.66625	1.66810	1.66720	1.64987	1.65050	1.65010
65	1	0.17681	0.17776	0.17749	0.11032	0.11078	0.11049
	4	1.18182	1.18570	1.18390	1.04918	1.04940	1.04930





### 3. Численные результаты

В ходе серии расчетов проанализировано влияние профиля поперечного сечения на собственные частоты колебаний цилиндрической оболочки, содержащей жидкость и изготовленной из слоистого композиционного материала. Используются параметры, аналогичные примеру 2. Поперечное сечение представляет собой эллипс с отношением полуосей  $\beta = R_{\max}/R_{\min}$ . При изменении величины  $\beta$  значения  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$  выбираются таким образом, чтобы площадь поперечного сечения оставалась неизменной и была равной площади круга радиуса  $R$ .

По результатам вычислений построены зависимости относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Delta\omega$  как функции от угла намотки  $\alpha$  и отношения полуосей эллипса  $\beta$ . Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  изменялись с шагами  $1.8^\circ$  и  $0.01$  соответственно. Полученные для отношений  $L/R = 4$  и  $L/R = 10$  изоповерхности приведены на рис. 2 и 3 при разных условиях закрепления оболочки.

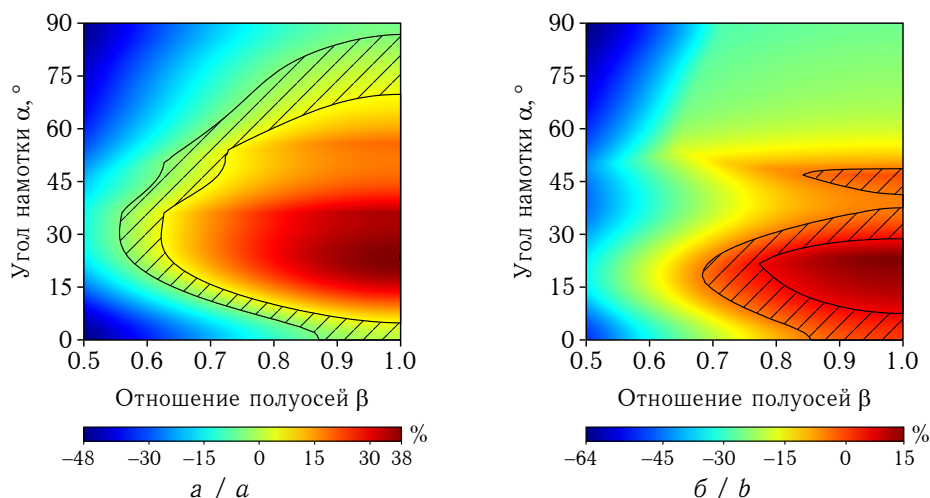


Рис. 2. Изменение низшей собственной частоты колебаний композитной эллиптической цилиндрической оболочки с жидкостью (C-C):  $a - L/R = 4$ ,  $b - L/R = 10$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Changing of the lowest natural vibration frequency of composite elliptical cylindrical shell (C-C):  $a - L/R = 4$ ,  $b - L/R = 10$  (color online)

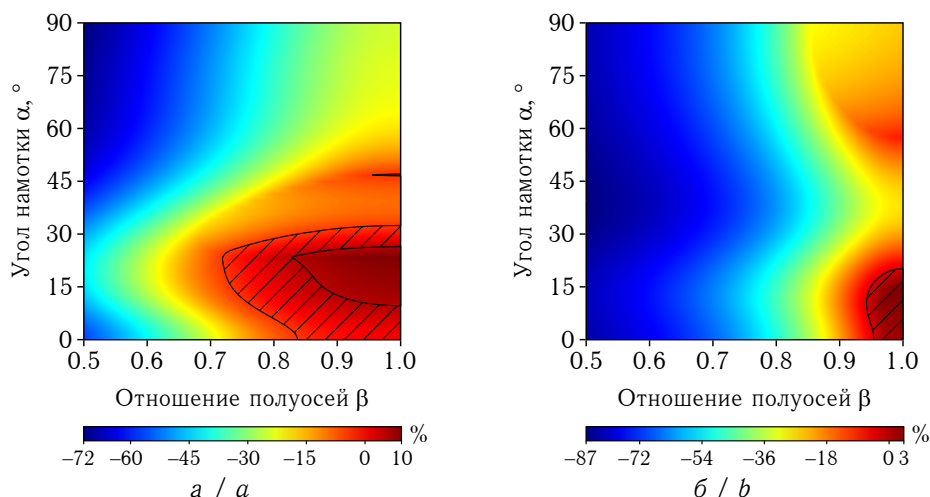


Рис. 3. Изменение низшей собственной частоты колебаний композитной эллиптической цилиндрической оболочки с жидкостью (C-F):  $a - L/R = 4$ ,  $b - L/R = 10$  (цвет онлайн)

Fig. 3. Changing of the lowest natural vibration frequency of composite elliptical cylindrical shell (C-F):  $a - L/R = 4$ ,  $b - L/R = 10$  (color online)

Величина  $\Delta\omega(\alpha, \beta)$  определялась выражением

$$\Delta\omega_i = (\omega_i - \omega_i^*)/\omega_i^*, \quad (15)$$

где  $\omega_i^*$  —  $i$ -я собственная частота колебаний, полученная при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\beta = 1$ .

С уменьшением параметра эллиптичности  $\beta$  собственные частоты колебаний оболочек снижаются. Сохранить их значение на прежнем уровне можно, подбирая угол намотки слоев композиционного материала. Это хорошо удается для коротких жестко закрепленных на обоих краях оболочек, где зона положительных значений  $\Delta\omega$  достаточно обширна (см. рис. 2, а).

В демонстрационных целях на рис. 2 и 3 заштрихована область, которая соответствует значениям параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , обеспечивающих изменение частоты  $\Delta\omega$  в пределах  $\pm 5\%$ . Видно, что эффективность такого способа управления частотой снижается с увеличением длины конструкции, особенно если она консольно закреплена (см. рис. 3, б).

На рис. 4 представлены срезы изоповерхностей  $\Delta\omega_1$ ,  $\Delta\omega_3$ ,  $\Delta\omega_5$ , полученные при  $\beta = 1$  и  $\beta = 0.75$ . Кривые демонстрируют сильно выраженное немонотонное поведение, которое обусловлено изменением формы колебаний, соответствующей  $i$ -й частоте. Данная особенность также наблюдается при других вариантах закрепления и геометрических размерах. Более того, она сохраняется и при отсутствии жидкости внутри оболочки. О подобном поведении собственных частот упоминалось ранее в работе [33], где рассматривались изотропные конструкции.

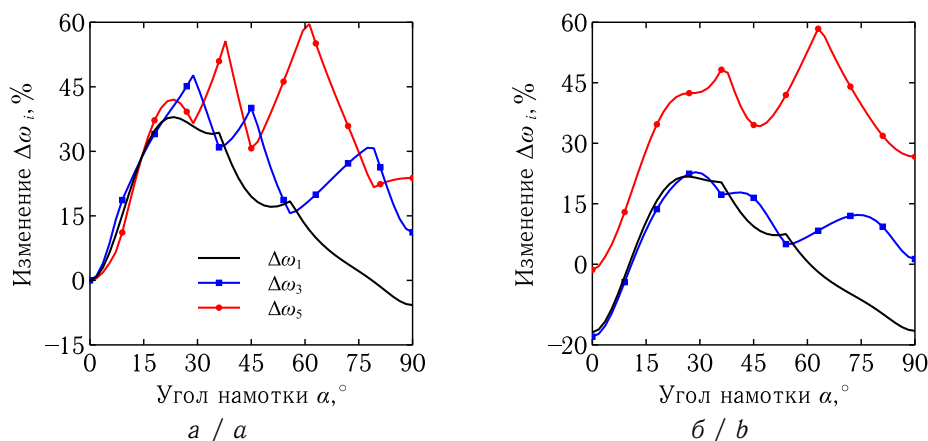


Рис. 4. Изменение собственных частот колебаний эллиптической цилиндрической оболочки с жидкостью (С-С,  $L/R = 4$ ): а —  $\beta = 1$ , б —  $\beta = 0.75$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Changing of natural vibration frequencies of composite elliptical cylindrical shell (С-С,  $L/R = 4$ ): а —  $\beta = 1$ , б —  $\beta = 0.75$  (color online)

Уменьшение параметра эллиптичности приводит к снижению собственных частот колебаний. Это объясняется тем, что часть конструкции с большим радиусом кривизны имеет меньшую жесткость. Она работает на изгиб подобно полой оболочке или пластине, шарнирно закрепленной вдоль двух сторон. Полученные зависимости носят немонотонный характер, поэтому необходимо использовать методы глобальной оптимизации при подборе параметров и схемы укладки композиционного материала, обеспечивающих требуемые динамические характеристики.

## Заключение

С использованием разработанного конечно-элементного алгоритма проанализировано влияние параметра эллиптичности поперечного сечения на собственные частоты колебаний цилиндрической оболочки, содержащей жидкость и изготовленной из слоистого композиционного материала. Показано, что с уменьшением отношения полуосей эллипса собственные



частоты колебаний оболочки падают. По результатам вычислений построены зависимости относительного изменения собственных частот колебаний как функции от угла намотки и отношения полуосей эллипса. Оценено влияние кинематических граничных условий, задаваемых на краях оболочки. Продемонстрирована возможность управления спектром собственных частот колебаний конструкции путем подбора угла намотки слоев композиционного материала. Показано, что эффективность данного механизма управления снижается с увеличением длины оболочки.

### Список литературы

1. Yao J. C., Jenkins W. C. Buckling of elliptic cylinders under normal pressure // AIAA Journal. 1970. Vol. 8, iss. 1. P. 22–27. <https://doi.org/10.2514/3.5600>
2. Sewall J. L., Pusey C. G. Vibration study of clamped-free elliptical cylindrical shells // AIAA Journal. 1971. Vol. 9, iss. 6. P. 1004–1011. <https://doi.org/10.2514/3.6324>
3. Andreev L. V., Antsiferov A. V., Kucherenko V. M., Pavlenko I. D. Regions of stability of elliptical cylinders under loading by static and impulsive external pressure // Strength of Materials. 1985. Vol. 17. P. 1606–1609. <https://doi.org/10.1007/BF01529952>
4. Heck O. S. The Stability of Orthotropic Elliptic Cylinders in Pure Bending. NACA-TM-834, 1937. 33 p.
5. Marguerre K. Stability of the Cylindrical Shell of Variable Curvature. NACA-TM-1302, 1951. 64 p.
6. Culberson L. D., Boyd D. E. Free vibrations of freely supported oval cylinders // AIAA Journal. 1971. Vol. 9, iss. 8. P. 1474–1480. <https://doi.org/10.2514/3.6388>
7. Shirakawa K., Morita M. Vibration and buckling of cylinders with elliptical cross section // Journal of Sound and Vibration. 1982. Vol. 84, iss. 1. P. 121–131. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90436-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90436-9)
8. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: A survey // Applied Mechanics Reviews. 1999. Vol. 52. P. 237–274. <https://doi.org/10.1115/1.3098937>
9. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Composite Structures. 2010. Vol. 93, iss. 1. P. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
10. Qatu M., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010 // Open Journal of Composite Materials. 2012. Vol. 2, iss. 3. P. 61–86. <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>
11. Sutar P., Mujawar A., Chougule R. Vibrational analysis of composite laminated shell: A review // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2716, iss. 1. Art. 040008. <https://doi.org/10.1063/5.0141337>
12. Soldatos K. P. A Flugge-type theory for the analysis of anisotropic laminated non-circular cylindrical shells // International Journal of Solids and Structures. 1984. Vol. 20, iss. 2. P. 107–120. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90002-7)
13. Hui D., Du H. Y. Effects of axial imperfections on vibrations of anti-symmetric cross-ply, oval cylindrical shells // Journal of Applied Mechanics. 1986. Vol. 53, iss. 3. P. 675–680. <https://doi.org/10.1115/1.3171830>
14. Kumar V., Singh A. V. Vibration Analysis of non-circular cylindrical shells using Bezier functions // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 161, iss. 2. P. 333–354. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1075>
15. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thin non-circular cylindrical shell // Journal of Applied Mechanics. 1994. Vol. 61, iss. 4. P. 861–871. <https://doi.org/10.1115/1.2901569>
16. Kumar V., Singh A. V. Vibrations of composite noncircular cylindrical shells // Journal of Vibration and Acoustics. 1995. Vol. 117, iss. 4. P. 471–476. <https://doi.org/10.1115/1.2874485>
17. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thick non-circular cylindrical shell // International Journal of Solids and Structures. 1996. Vol. 33, iss. 27. P. 4079–4100. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00227-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00227-8)
18. Zhao J., Choe K., Shuai C., Wang A., Wang Q. Free vibration analysis of laminated composite elliptic cylinders with general boundary conditions // Composites Part B: Engineering. 2019. Vol. 158. P. 55–66. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.009>
19. Ganapathi M., Haboussi M. Free vibrations of thick laminated anisotropic non-circular cylindrical shells // Composite Structures. 2003. Vol. 60, iss. 2. P. 125–133. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00339-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00339-2)



20. Ganapathi M., Patel B. P., Patel H. G., Pawargi D. S. Vibration analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells // *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 262, iss. 1. P. 65–86. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01025-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01025-8)
21. Patel B. P., Gupta S. S., Loknath M. S., Kadu C. P. Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory // *Composite Structures*. 2005. Vol. 69, iss. 3. P. 259–270. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.07.002>
22. Hayek S. I., Boisvert J. E. Vibration of elliptic cylindrical shells: Higher order shell theory // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2010. Vol. 128. P. 1063–1072. <https://doi.org/10.1121/1.3466873>
23. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // *Thin-Walled Structures*. 2015. Vol. 97. P. 114–129. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.08.023>
24. Вильде М. В., Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 56–64. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64>
25. Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N. General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels // *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 639–666. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.005>
26. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M. Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories // *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 67. P. 490–509. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.012>
27. Tornabene F. General higher-order layer-wise theory for free vibrations of doubly-curved laminated composite shells and panels // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23, iss. 9. P. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1121522>
28. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Finite rotation exact geometry solid-shell element for laminated composite structures through extended SaS formulation and 3D analytical integration // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2019. Vol. 119, iss. 9. P. 948–964. <https://doi.org/10.1002/nme.6075>
29. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry four-node solid-shell element for stress analysis of functionally graded shell structures via advanced SaS formulation // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020. Vol. 27, iss. 12. P. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1502380>
30. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry SaS-based solid-shell element for coupled thermoelectroelastic analysis of smart structures with temperature-dependent material properties // *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234. P. 163–189. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03086-2>
31. Лecomцев С. В., Бочкарев С. А. Собственные колебания частично заполненных жидкостью некруговых цилиндрических оболочек с учетом плескания свободной поверхности // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, вып. 4. С. 471–480. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.45>
32. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid // *Thin-Walled Structures*. 2015. Vol. 90. P. 12–22. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>
33. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016. Vol. 16, iss. 10. Art. 1550076. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500765>
34. Zhang X., Zhang W. Free bending vibration of elliptical column partially submerged in water // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1986. Vol. 7, iss. 9. P. 869–876. <https://doi.org/10.1007/BF01898128>
35. Zhu Y., Weng Z.-Y. Vibration analysis of elliptical column partially submerged in water // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1988. Vol. 9, iss. 4. P. 335–346. <https://doi.org/10.1007/BF02456114>
36. Xiang Y., Huang Y. A novel semi-analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non-circular cylindrical shells in water // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2005. Vol. 18, iss. 1. P. 1–12. <http://dx.doi.org/10.1007/s10338-005-0501-8>
37. Firouz-Abadi R. D., Noorian M. A., Haddadpour H. A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid // *Journal of Fluids and Structures*. 2010. Vol. 26. P. 747–763. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003>



38. Zhang G. J., Li T. Y., Zhu X., Yang J., Miao Y. Y. Free and forced vibration characteristics of submerged finite elliptic cylindrical shell // *Ocean Engineering*. 2017. Vol. 129. P. 92–106. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.11.014>
39. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London : McGraw-Hill, 1971. 521 p.
40. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
41. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
42. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method* : in 3 vols. Vol. 2: *Solid Mechanics*. 5th ed. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
43. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 1996. Vol. 17, iss. 4. P. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
44. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230, iss. 11. P. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
45. Xie X., Jin G., Li W., Liu Z. A numerical solution for vibration analysis of composite laminated conical, cylindrical shell and annular plate structures // *Composite Structures*. 2014. Vol. 111. P. 20–30. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.019>
46. Qu Y. G., Long X. H., Wu S. H., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // *Composite Structures*. 2013. Vol. 98. P. 169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>
47. Messina A., Soldatos K. P. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions // *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 27, iss. 4. P. 749–768. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2347>
48. Soldatos K. P., Messina A. The influence of boundary conditions and transverse shear on the vibration of angle-ply laminated plates, circular cylinders and cylindrical panels // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. Vol. 190, iss. 18–19. P. 2385–2409. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00242-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00242-5)

### References

1. Yao J. C., Jenkins W. C. Buckling of elliptic cylinders under normal pressure. *AIAA Journal*, 1970, vol. 8, iss. 1, pp. 22–27. <https://doi.org/10.2514/3.5600>
2. Sewall J. L., Pusey C. G. Vibration study of clamped-free elliptical cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, iss. 6, pp. 1004–1011. <https://doi.org/10.2514/3.6324>
3. Andreev L. V., Antsiferov A. V., Kucherenko V. M., Pavlenko I. D. Regions of stability of elliptical cylinders under loading by static and impulsive external pressure. *Strength of Materials*, 1985, vol. 17, pp. 1606–1609. <https://doi.org/10.1007/BF01529952>
4. Heck O. S. *The Stability of Orthotropic Elliptic Cylinders in Pure Bending*. NACA-TM-834, 1937. 33 p.
5. Marguerre K. *Stability of the Cylindrical Shell of Variable Curvature*. NACA-TM-1302, 1951. 64 p.
6. Culberson L. D., Boyd D. E. Free vibrations of freely supported oval cylinders. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, iss. 8, pp. 1474–1480. <https://doi.org/10.2514/3.6388>
7. Shirakawa K., Morita M. Vibration and buckling of cylinders with elliptical cross section. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, vol. 84, iss. 1, pp. 121–131. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90436-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90436-9)
8. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: A survey. *Applied Mechanics Reviews*, 1999, vol. 52, pp. 237–274. <https://doi.org/10.1115/1.3098937>
9. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite Structures*, 2010, vol. 93, iss. 1, pp. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
10. Qatu M., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010. *Open Journal of Composite Materials*, 2012, vol. 2, iss. 3, pp. 61–86. <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>
11. Sutar P., Mujawar A., Chougule R. Vibrational analysis of composite laminated shell: A review. *AIP Conference Proceedings*, 2023, vol. 2716, iss. 1, art. 040008. <https://doi.org/10.1063/5.0141337>



12. Soldatos K. P. A Flugge-type theory for the analysis of anisotropic laminated non-circular cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 2, pp. 107–120. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90002-7)
13. Hui D., Du H. Y. Effects of axial imperfections on vibrations of anti-symmetric cross-ply, oval cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, vol. 53, iss. 3, pp. 675–680. <https://doi.org/10.1115/1.3171830>
14. Kumar V., Singh A. V. Vibration Analysis of non-circular cylindrical shells using Bezier functions. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, vol. 161, iss. 2, pp. 333–354. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1075>
15. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thin non-circular cylindrical shell. *Journal of Applied Mechanics*, 1994, vol. 61, iss. 4, pp. 861–871. <https://doi.org/10.1115/1.2901569>
16. Kumar V., Singh A. V. Vibrations of composite noncircular cylindrical shells. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1995, vol. 117, iss. 4, pp. 471–476. <https://doi.org/10.1115/1.2874485>
17. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thick non-circular cylindrical shell. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, vol. 33, iss. 27, pp. 4079–4100. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00227-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00227-8)
18. Zhao J., Choe K., Shuai C., Wang A., Wang Q. Free vibration analysis of laminated composite elliptic cylinders with general boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 2019, vol. 158, pp. 55–66. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.009>
19. Ganapathi M., Haboussi M. Free vibrations of thick laminated anisotropic non-circular cylindrical shells. *Composite Structures*, 2003, vol. 60, iss. 2, pp. 125–133. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00339-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00339-2)
20. Ganapathi M., Patel B. P., Patel H. G., Pawargi D. S. Vibration analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 262, iss. 1, pp. 65–86. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01025-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01025-8)
21. Patel B. P., Gupta S. S., Loknath M. S., Kadu C. P. Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory. *Composite Structures*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 259–270. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.07.002>
22. Hayek S. I., Boisvert J. E. Vibration of elliptic cylindrical shells: Higher order shell theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2010, vol. 128, pp. 1063–1072. <https://doi.org/10.1121/1.3466873>
23. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method. *Thin-Walled Structures*, 2015, vol. 97, pp. 114–129. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.08.023>
24. Wilde M. V., Kossovich L. Yu., Shevtsova Y. V. Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 56–64 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64>
25. Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N. General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels. *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 639–666. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.005>
26. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M. Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories. *Composites Part B: Engineering*, 2014, vol. 67, pp. 490–509. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.012>
27. Tornabene F. General higher-order layer-wise theory for free vibrations of doubly-curved laminated composite shells and panels. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2016, vol. 23, iss. 9, pp. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1121522>
28. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Finite rotation exact geometry solid-shell element for laminated composite structures through extended SaS formulation and 3D analytical integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, vol. 119, iss. 9, pp. 948–964. <https://doi.org/10.1002/nme.6075>
29. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry four-node solid-shell element for stress analysis of functionally graded shell structures via advanced SaS formulation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, vol. 27, iss. 12, pp. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1502380>
30. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry SaS-based solid-shell element for coupled thermoelectroelastic analysis of smart structures with temperature-dependent material properties.



- Acta Mechanica*, 2023, vol. 234, pp. 163–189. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03086-2>
31. Lekomtsev S. V., Bochkarev S. A. Natural vibrations of non-circular cylindrical shells partially filled with fluid with sloshing of free surface. *Computational Continuum Mechanics*, 2014. vol. 7, iss. 4, pp. 471–480 (in Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.45>
  32. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*, 2015, vol. 90, pp. 12–22. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>
  33. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2016, vol. 16, iss. 10, art. 1550076. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500765>
  34. Zhang X., Zhang W. Free bending vibration of elliptical column partially submerged in water. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1986, vol. 7, iss. 9, pp. 869–876. <https://doi.org/10.1007/BF01898128>
  35. Zhu Y., Weng Z.-Y. Vibration analysis of elliptical column partially submerged in water. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, vol. 9, iss. 4, pp. 335–346. <https://doi.org/10.1007/BF02456114>
  36. Xiang Y., Huang Y. A novel semi-analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non-circular cylindrical shells in water. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005, vol. 18, iss. 1, pp. 1–12. <http://dx.doi.org/10.1007/s10338-005-0501-8>
  37. Firouz-Abadi R. D., Noorian M. A., Haddadpour H. A fluid–structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, vol. 26, pp. 747–763. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003>
  38. Zhang G. J., Li T. Y., Zhu X., Yang J., Miao Y. Y. Free and forced vibration characteristics of submerged finite elliptic cylindrical shell. *Ocean Engineering*, 2017, vol. 129, pp. 92–106. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.11.014>
  39. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London, McGraw-Hill, 1971. 521 p.
  40. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
  41. Alfutov N. A., Zinov'ev P. A., Popov B. G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of Layered Plates and Shells Made of Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1984. 264 p. (in Russian).
  42. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechanics*. 5th ed. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
  43. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1996, vol. 17, iss. 4, pp. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
  44. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, iss. 11, pp. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
  45. Xie X., Jin G., Li W., Liu Z. A numerical solution for vibration analysis of composite laminated conical, cylindrical shell and annular plate structures. *Composite Structures*, 2014, vol. 111, pp. 20–30. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.019>
  46. Qu Y. G., Long X. H., Wu S. H., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. *Composite Structures*, 2013, vol. 98, pp. 169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>
  47. Messina A., Soldatos K. P. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 27, iss. 4, pp. 749–768. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2347>
  48. Soldatos K. P., Messina A. The influence of boundary conditions and transverse shear on the vibration of angle-ply laminated plates, circular cylinders and cylindrical panels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, iss. 18–19, pp. 2385–2409. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00242-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00242-5)

Поступила в редакцию / Received 30.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024