Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 184–192
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 184–192
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-184-192, EDN: SHEHGU

Научная статья
УДК 531.011

О потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантах бесконечномерных систем Биркгофа

В. М. Савчин✉, Ф. Т. Чинь

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Савчин Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. С. М. Никольского, savchin-vm@rudn.ru, https://orcid.org/0000-0003-3850-6747, AuthorID: 14052
Чинь Фыок Тоан, аспирант Математического института им. С. М. Никольского, tr.phuoctoan@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7707-322X

Аннотация. При исследовании уравнений движения систем различной физической природы появляются задачи определения качественных показателей и свойств движения по известным структуре и свойствам рассматриваемых уравнений. Такими качественными показателями для конечномерных систем являются, в частности, интегральные инварианты — интегралы от некоторых функций, сохраняющие свое значение в процессе движения системы. Они были введены в аналитическую механику А. Пуанкаре. В дальнейшем была установлен связь интегральных инвариантов с рядом фундаментальных понятий классической динамики. Основная цель данной работы — распространить некоторые положения теории интегральных инвариантов на широкие классы уравнений движения бесконечномерных систем. Используя заданное действие по Гамильтону, получены уравнения движения потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, обобщающие известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация соответствующего интегрального инварианта первого порядка.

Ключевые слова: бесконечномерные системы Биркгофа, дискретизация, интегральные инварианты, потенциальность

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы (проект № 002092-0-000).

Для цитирования: *Савчин В. М., Чинь Ф. Т.* О потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантах бесконечномерных систем Биркгофа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 184–192. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-184-192, EDN: SHEHGU

Article

On potentiality, discretization, and integral invariants of the infinite-dimensional Birkhoff systems

V. M. Savchin✉, P. T. Trinh

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia

Vladimir M. Savchin, savchin-vm@rudn.ru, https://orcid.org/0000-0003-3850-6747, AuthorID: 14052
Phuoc Toan Trinh, tr.phuoctoan@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7707-322X

Abstract. In the study of the equations of motion of systems of various physical nature, there are problems in determining the qualitative indicators and properties of motion according to the known structure and properties of the equations under consideration. Such qualitative indicators for finite-dimensional systems are, in particular, integral invariants — integrals of some functions that retain their value during the system movement. They were introduced into analytical mechanics by A. Poincaré. In the future, the connection of integral invariants with a number of fundamental concepts of classical dynamics was established. The main purpose of this work is to extend some notions of the theory of integral invariants to broad classes of equations of motion of infinite-dimensional systems. Using a given Hamilton's action, the equations of motion of potential systems with an infinite number of degrees of freedom are obtained, generalizing the well-known Birkhoff equations. A difference analog with discrete time is constructed for them. Based on it, a difference approximation of the corresponding integral invariant of the first order is found.
Keywords: infinite-dimensional Birkhoff systems, discretization, integral invariants, potentiality
Acknowledgements: This work was partially supported by the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (project No. 002092-0-000).
For citation: Savchin V. M., Trinh P. T. On potentiality, discretization, and integral invariants of the infinite-dimensional Birkhoff systems. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 184–192 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-184-192, EDN: SHEHGU

Введение

В работе [1] получены необходимые и достаточные условия вариационности (потенциальности) операторного уравнения с первой производной по времени

$$\begin{gathered} \widehat{N}\left(u\right) \equiv P_{u,t}u_t - Q\left(t,u\right) = 0, \\ u \in D\left(\widehat{N}\right) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in \left[\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1\right] \subset R, \quad u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\forall\, t \in \left[\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1\right]$, $\forall\, u \in U_1$ оператор $P_{u,t} : U_1 \longrightarrow V_1$ является линейным; $Q : \left[\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1\right] \times U_1 \to$ $\to V_1$ — произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D\left(\widehat{N}\right)$ — область определения оператора $\widehat{N}$,

$$D\left(\widehat{N}\right) = \left\{u \in U : u\left(t\right) \in W \;\forall\, t \in \left[\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1\right],\; u|_{t=\widetilde{T}_0} = \varphi_1,\; u|_{t=\widetilde{T}_1} = \varphi_2,\; \varphi_i \in U_1,\; i = 1,2\right\};$$

$U = C^1\left(\left[\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1\right]; U_1\right)$, $V = C^1\left(\left[\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1\right]; V_1\right)$, U_1, V_1 — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $U_1 \subseteq V_1$. Множество W определяется внешними связями, наложенными на систему.

Операторное уравнение (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением в частных производных, интегро-дифференциальным уравнением, уравнением с отклоняющимися аргументами и другими, а также системой таких уравнений.

На этом пути, в частности, выявлена взаимосвязь полученного операторного вариационного уравнения с классическими уравнениями Биркгофа [2, 3], являющимися обобщениями канонических уравнений Гамильтона.

Будем использовать обозначения и терминологию работ [4–7].

1. Постановка задач

Пусть состояние бесконечномерной потенциальной системы определяется вектор-функцией $u(x,t) = \left(u^1(x,t), u^2(x,t), \cdots, u^{2n}(x,t)\right)$, $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^m$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$.

Предположим, что при этом действие по Гамильтону имеет вид

$$F[u] = \int_0^T \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i \left(x, t, u_\alpha\right) u_t^i - B\left(u_\alpha\right) \right] dx\, dt,$$
$$\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\right), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \quad |\alpha| = \overline{0, s}, \tag{2}$$

где $R_i = R_i\left(x, t, u_\alpha\right)$, $B = B\left(u_\alpha\right)$ — заданные достаточно гладкие функции, $u_t^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial t}$, $i = \overline{1, 2n}$, $u_\alpha = D_\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\left(\partial x_1\right)^{\alpha_1} \left(\partial x_2\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\partial x_m\right)^{\alpha_m}}$.

Будем рассматривать функционал (2) на множестве

$$D(N) = \Big\{ u \in U = \left(U^1, \cdots, U^{2n}\right) : u^i \in U^i = C_{x,t}^{2s,1}\left(\overline{\Omega} \times [0, T]\right) : u^i\big|_{t=0} = \varphi_0^i(x),$$
$$u^i\big|_{t=T} = \varphi_1^i(x), \quad \frac{\partial^\nu u^i}{\partial n_x^\nu}\Big|_{\Gamma_T} = \psi_\nu^i(x, t), \ i = \overline{1, 2n}, \ |\nu| = \overline{0, s-1} \Big\}, \tag{3}$$

где $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, n_x — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; φ_0^i, φ_1^i, $\psi_\nu^i(x, t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Цель работы — найти уравнения движения, определяемые действием по Гамильтону (2), построить их разностный аналог с дискретным временем и на этой основе найти разностную аппроксимацию соответствующего линейного интегрального инварианта.

2. Система уравнений движения

Обозначим плотность функции Лагранжа

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(x, t, u_\alpha, u_t\right) = \sum_{k=1}^{2n} R_k u_t^k - B. \tag{4}$$

Первая вариация (2) равна

$$\delta F\left[u, \delta u\right] = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left(\sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \delta u_\alpha^i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t^i} \delta u_t^i \right) dx\, dt. \tag{5}$$

Введем плотности обобщенных импульсов p_i, $i = \overline{1, 2n}$ по формулам

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta u_t^i} = R_i, \quad i = \overline{1, 2n},$$

где $L = \displaystyle\int_\Omega \mathscr{L} dx$; $\dfrac{\delta L}{\delta u_t^i}$ — вариационная производная.

Поскольку

$$\delta u^i\big|_{t=0} = 0, \quad \delta u^i\big|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial^\nu \left(\delta u^i\right)}{\partial n_x^\nu}\Bigg|_{\Gamma_T} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}, \quad |\nu| = \overline{0, s-1},$$

то, интегрируя по частям, из (5) получаем

$$\delta F\left[u, \delta u\right] = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{dp_i}{dt} \right] \delta u^i \, dx\, dt.$$

Приравнивая эту вариацию к нулю, находим систему уравнений движения в виде

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{dp_i}{dt} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}. \tag{6}$$

Отметим, что

$$D_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \right) = D_\alpha \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial R_k}{\partial u_\alpha^i} u_t^k - \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial R_k}{\partial u_\alpha^i} \right) D_\beta u_t^k - D_\alpha \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{dR_i}{dt} = \frac{\partial R_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \frac{\partial R_i}{\partial u_\beta^k} D_\beta u_t^k,$$

где

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_m}{\beta_m}, & \text{если } \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, m\} : \alpha_i \geqslant \beta_i, \\ 0, & \text{если } \exists\, i \in \{1, 2, \cdots, m\} : \alpha_i < \beta_i, \end{cases}$$

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i! \, (\alpha_i - \beta_i)!}.$$

С учетом этого система уравнений (6) может быть представлена в виде

$$N_i \equiv \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \left[\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial R_k}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{\partial R_i}{\partial u_\beta^k} \right] D_\beta u_t^k - \frac{\partial R_i}{\partial t} -$$
$$- \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}. \tag{7}$$

Справедлива

Теорема 1. *Экстремали функционала* (2) *являются решениями системы уравнений* (7).

Отметим, что из (7) как частный случай следуют уравнения Биркгофа [3].

3. Дискретизация по времени

Разобьем отрезок $[0, T]$ на l равных частей узлами $t_j = j\tau$, $j = \overline{0, l}$, где $\tau = l^{-1} T$. Введем операторы сужения [8]

$$\overline{T}_r u^i(x, t) = \overline{u}_r^i = \left(u^i \left(x, t_k \right) \right)_{k=0}^{l}, \quad i = \overline{1, 2n}$$

(столбцы высоты $r = l + 1$). Такие столбцы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r^i$. Для удобства обозначим $\overline{u}_r = \left(\overline{u}_r^1, \overline{u}_r^2, \cdots, \overline{u}_r^{2n} \right)$, $\widetilde{u}_j = u\left(x, t_j \right)$, $\widetilde{u}_j^i = u^i\left(x, t_j \right)$.

Обозначим $\overline{N}$ оператор дискретного аналога задачи (7), (3), полученной на основе функционала (2).

Положим

$$D\left(\overline{N} \right) = \Big\{ \overline{u}_r \in \overline{U}_r = \left(\overline{U}_r^1, \cdots, \overline{U}_r^{2n} \right) : \widetilde{u}_r^i \in C^{2s}\left(\overline{\Omega} \right) : \widetilde{u}_0^i = \varphi_0^i(x), \; \widetilde{u}_l^i = \varphi_1^i(x),$$
$$\left. \frac{\partial^\nu \widetilde{u}_j^i}{\partial n_x^\nu} \right|_{\partial\Omega} = \psi_\nu^i \left(x, t_j \right), \; i = \overline{1, 2n}, \; |\nu| = \overline{0, s}, \; j = \overline{0, l} \Big\}.$$

Заменим (4) на

$$\overline{\mathscr{L}}_j = \overline{\mathscr{L}}\left(x, t, D_\alpha \widetilde{u}_j, \widetilde{u}_{j+1}\right) = \sum_{i=1}^{2n} R_{i,j} \frac{\widetilde{u}^i_{j+1} - \widetilde{u}^i_j}{\tau} - B_j, \quad j = \overline{0, l-1},$$

где $R_{i,j} = R_i\left(x, t_j, D_\alpha \widetilde{u}_j\right)$, $B_j = B\left(D_\alpha \widetilde{u}_j\right)$.

Далее аппроксимируем интегралы

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{\Omega} \mathscr{L}\, dx\, dt \approx \frac{T}{l} \int\limits_{\Omega} \overline{\mathscr{L}}_j dx.$$

Функционал (2) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$\overline{F}\left[\overline{u}_r\right] = \frac{T}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \int\limits_{\Omega} \overline{\mathscr{L}}_j dx. \tag{8}$$

Тогда

$$\delta\overline{F}\left[\overline{u}_r, \delta\overline{u}_r\right] = \frac{T}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial \overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right)} \delta\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right) + \frac{\partial \overline{\mathscr{L}}_j}{\partial \widetilde{u}^k_{j+1}} \delta\widetilde{u}^k_{j+1}\right] dx. \tag{9}$$

Поскольку

$$\delta\widetilde{u}^i_0 = 0, \quad \delta\widetilde{u}^i_l = 0, \quad \left.\frac{\partial^\nu\left(\delta\widetilde{u}^i_j\right)}{\partial n^\nu_x}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}, \quad j = \overline{0, l}, \quad |\nu| = \overline{0, s-1},$$

то, интегрируя по частям, из (9) имеем

$$\delta\overline{F}\left[\overline{u}_r, \delta\overline{u}_r\right] = \frac{T}{l} \sum_{j=1}^{l-1} \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial \overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right)}\right) + \frac{\partial \overline{\mathscr{L}}_{j-1}}{\partial \widetilde{u}^k_j}\right] \delta\widetilde{u}^k_j dx. \tag{10}$$

Отметим, что

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[\frac{\partial \overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right)}\right] = \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{2n} D_\alpha \left[\frac{\partial R_{i,j}}{\partial\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right)} \frac{\widetilde{u}^i_{j+1} - \widetilde{u}^i_j}{\tau}\right] - \frac{R_{k,j}}{\tau} -$$
$$- \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[\frac{\partial B_j}{\partial\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right)}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left[\frac{\partial R_{i,j}}{\partial\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right)}\right] D_\beta \left(\frac{\widetilde{u}^i_{j+1} - \widetilde{u}^i_j}{\tau}\right) - \frac{R_{k,j}}{\tau} -$$
$$- \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[\frac{\partial B_j}{\partial\left(D_\alpha \widetilde{u}^k_j\right)}\right],$$
$$\frac{\partial \overline{\mathscr{L}}_{j-1}}{\partial \widetilde{u}^k_j} = \frac{R_{k,j-1}}{\tau}.$$

Из равенства нулю первой вариации (10) получаем систему уравнений движения в дискретном по времени случае

$$\overline{N}_{k,j} \equiv \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left[\frac{\partial R_{i,j}}{\partial \left(D_\alpha \widetilde{u}_j^k \right)} \right] D_\beta \left(\frac{\widetilde{u}_{j+1}^i - \widetilde{u}_j^i}{\tau} \right) -$$

$$- \frac{R_{k,j} - R_{k,j-1}}{\tau} - \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[\frac{\partial B_j}{\partial \left(D_\alpha \widetilde{u}_j^k \right)} \right] = 0, \quad k = \overline{1,2n}, \quad j = \overline{1,l-1}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Уравнения* (11) *являются разностным по времени аналогом* (7).

4. Интегральные инварианты

4.1. Непрерывный случай

Пусть $u = u(\lambda; x, t)$, $\lambda \in \Lambda = [0,1]$ — произвольное однопараметрическое множество элементов из U непрерывно дифференцируемых по λ. Его можно рассматривать как кривую C в U. Будем считать, что $u(0; x, t) = u(1; x, t)$ для всех $(x,t) \in Q_T$, т.е. кривая замкнута.

Введем обозначение $\delta u = \dfrac{\partial u(\lambda; x, t)}{\partial \lambda} d\lambda$. Возьмем произвольный отрезок $[T_0, T_1]$ из $[0, T]$.

Вариация функционала $F[u(\lambda; x, t)] = \int\limits_{T_0}^{T_1} L\, dt$ принимает вид

$$\delta F[u, \delta u] = \int\limits_{T_0}^{T_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left(\sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \delta u_\alpha^i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_t^i} \delta u_t^i \right) dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{T_0}^{T_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left\{ (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \right) \delta u^i + \left[\frac{d}{dt} \left(p_i \delta u^i \right) - \frac{dp_i}{dt} \delta u^i \right] \right\} dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{T_0}^{T_1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{dp_i}{dt} \right] \delta u^i\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Big|_{t=T_1} dx - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Big|_{t=T_0} dx.$$

Вдоль действительных траекторий — решений системы (6) — вариация $\delta F[u, \delta u]$ принимает вид

$$\delta F[u, \delta u] = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Bigg|_{t=T_1} dx - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Bigg|_{t=T_0} dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_1} dx - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_0} dx.$$

Поскольку для замкнутой кривой C интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \delta F = 0$, то получаем равенство

$$\int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_1} dx = \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_0} dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_i\delta u^i dx=\oint\limits_{C}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_i\delta u^i dx \tag{12}$$

является относительным линейным интегральным инвариантом первого порядка системы, описываемой лагранжианом (4).

Теорема 3. *Система уравнений* (7) *имеет относительный интегральный инвариант первого порядка вида* (12).

4.2. Дискретный случай

Используя (8), запишем функционал

$$\overline{F}\left[\overline{u}_r\right]=\frac{T}{l}\sum_{j=j_0}^{j_1}\int\limits_{\Omega}\overline{\mathscr{L}}_j dx, \tag{13}$$

считая, что $0<j_0<j_1<l$.

Находим первую вариацию (13)

$$\delta\overline{F}\left[\overline{u}_r,\delta\overline{u}_r\right]=\frac{T}{l}\sum_{j=j_0}^{j_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}\left[\sum_{|\alpha|=0}^{s}\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\left(D_\alpha\widetilde{u}_j^k\right)}\delta\left(D_\alpha\widetilde{u}_j^k\right)+\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\widetilde{u}_{j+1}^k}\delta\widetilde{u}_{j+1}^k\right]dx=$$

$$=\frac{T}{l}\sum_{j=j_0}^{j_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left[\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\left(D_\alpha\widetilde{u}_j^k\right)}\right]\delta\widetilde{u}_j^k+\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\widetilde{u}_{j+1}^k}\delta\widetilde{u}_{j+1}^k\right\}dx=$$

$$=\frac{T}{l}\sum_{j=j_0}^{j_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left[\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_j}{\partial\left(D_\alpha\widetilde{u}_j^k\right)}\right]+\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{j-1}}{\partial\widetilde{u}_j^k}\right\}\delta\widetilde{u}_j^k dx+$$

$$+\frac{T}{l}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{j_1-1}}{\partial\widetilde{u}_{j_1}^k}\delta\widetilde{u}_{j_1}^k dx-\frac{T}{l}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{j_0-1}}{\partial\widetilde{u}_{j_0}^k}\delta\widetilde{u}_{j_0}^k dx.$$

Вдоль действительных траекторий его первая вариация (13) равна

$$\delta\overline{F}\left[\overline{u}_r,\delta\overline{u}_r\right]=\frac{T}{l}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{j_1-1}}{\partial\widetilde{u}_{j_1}^k}\delta\widetilde{u}_{j_1}^k dx-\frac{T}{l}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{j_0-1}}{\partial\widetilde{u}_{j_0}^k}\delta\widetilde{u}_{j_0}^k dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}R_{k,j_1-1}\delta\widetilde{u}_{j_1}^k dx-\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}R_{k,j_0-1}\delta\widetilde{u}_{j_0}^k dx.$$

Далее, повторяя приведенные выше рассуждения, получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}R_{k,j_1-1}\delta\widetilde{u}_{j_1}^k dx=\int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}R_{k,j_0-1}\delta\widetilde{u}_{j_0}^k dx.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{C}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{2n}R_{k,j-1}\delta\widetilde{u}_j^k dx,\ j=\overline{1,l} \tag{14}$$

являются аналогами линейных интегральных инвариантов первого порядка системы (11).

Теорема 4. *Формула* (14) *определяет дискретный по времени аналог относительно интегрального инварианта первого порядка* (12).

5. Пример

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:

$$\widetilde{N}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2k^2\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{15}$$

описывающее движение мембраны.

Здесь $u = u(x, y, t)$ — неизвестная функция; a, k — константы, $(x, y, t) \in Q_T = (0, l^1) \times \times (0, l^2) \times (0, T)$.

Положим

$$D\left(\widetilde{N}\right) = \Big\{u \in U = C^2\left(\overline{Q}_T\right) : u\big|_{x=0} = u\big|_{y=0} = u\big|_{x=l^1} = u\big|_{y=l^2} = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(x),\ u\big|_{t=T} = \varphi_2(x)\Big\},$$

где φ_1, φ_2 — заданные функции.

Обозначим $\begin{cases} u^1 = u, \\ u^2 = u^1_t. \end{cases}$ Уравнение (15) эквивалентно системе вида

$$\widetilde{N}_1 \equiv e^{2k^2t}u^2_t - e^{2k^2t}a^2\left(\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2}\right) + 2k^2e^{2k^2t}u^2 = 0, \quad \widetilde{N}_2 \equiv -e^{2k^2t}u^1_t + e^{2k^2t}u^2 = 0. \tag{16}$$

Ей соответствует лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\int\limits_0^{l^2}\int\limits_0^{l^1} e^{2k^2t}\left\{-u^2u^1_t + u^1u^2_t + 2k^2u^1u^2 + \left(u^2\right)^2 + a^2\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy$$

и функции Биркгофа

$$R_1 = -\frac{1}{2}e^{2k^2t}u^2, \quad R_2 = \frac{1}{2}e^{2k^2t}u^1,$$
$$B = -\frac{1}{2}e^{2k^2t}\left[2k^2u^1u^2 + \left(u^2\right)^2 + a^2\left(\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)^2\right)\right].$$

Отсюда можно вывести систему уравнений в дискретном по времени случае

$$\overline{N}_{1,j} \equiv \frac{1}{2}e^{2k^2t_j}\frac{\widetilde{u}^2_{j+1} - \widetilde{u}^2_j}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{e^{2k^2t_j}\widetilde{u}^2_j - e^{2k^2t_{j-1}}\widetilde{u}^2_{j-1}}{\tau} +$$
$$+ e^{2k^2t_j}\left[k^2\widetilde{u}^2_j - a^2\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}^1_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widetilde{u}^1_j}{\partial y^2}\right)\right] = 0,$$
$$\overline{N}_{2,j} \equiv -\frac{1}{2}e^{2k^2t_j}\frac{\widetilde{u}^1_{j+1} - \widetilde{u}^1_j}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{e^{2k^2t_j}\widetilde{u}^1_j - e^{2k^2t_{j-1}}\widetilde{u}^1_{j-1}}{\tau} + e^{2k^2t_j}\left(k^2\widetilde{u}^1_j + \widetilde{u}^2_j\right) = 0.$$

Используя формулы (12) и (14), находим относительные линейные интегральные инварианты первого порядка системы (16) в непрерывном случае

$$\oint\limits_C\int\limits_0^{l^2}\int\limits_0^{l^1}\left(-\frac{1}{2}e^{2k^2t}u^2\delta u^1 + \frac{1}{2}e^{2k^2t}u^1\delta u^2\right) dx\, dy$$

и в дискретном случае

$$\oint\limits_C\int\limits_0^{l^2}\int\limits_0^{l^1}\left(-\frac{1}{2}e^{2k^2t_{j-1}}\widetilde{u}^2_{j-1}\delta\widetilde{u}^1_j + \frac{1}{2}e^{2k^2t_{j-1}}\widetilde{u}^1_{j-1}\delta\widetilde{u}^2_j\right) dx\, dy.$$

Заключение

Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем. Как частный случай из них следуют известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация относительного линейного интегрального инварианта первого порядка.

Список литературы

1. *Savchin V. M.* Operator approach to the Birkhoff equations // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. 1995. Т. 2, №. 2. С. 111–123.
2. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. Ижевск : Удмуртский ун-т, 1999. 408 с.
3. *Santilli R. M.* Foundations of theoretical mechanics II. New York : Springer, 1983. 370 c.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. Москва : Наука, 1989. 656 с.
5. *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. Москва : Изд-во Университета дружбы народов, 1991. 237 с.
6. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новейшие достижения». 1992. № 40. С. 3–176.
7. *Галиуллин А. С., Гафаров Г. Г., Малайшка Р. П., Хван А. М.* Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа и Намбу. Москва : Успехи физических наук, 1997. 324 с.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ : учебник. 3-е изд. Москва : Физматлит, 2002. 488 с.

References

1. Savchin V. M. Operator approach to the Birkhoff equations. *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriia: Matematika*, 1995, vol. 2, iss. 2. pp. 111–123 (in Russian).
2. Birkhoff G. D. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 9. New York, American Mathematical Society, 1927. 305 p. (Russ. ed.: Izhevsk, Udmurt University Publ., 1999. 408 p.).
3. Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics II*. New York, Springer, 1983. 370 p.
4. Samarsky A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1989. 656 p. (in Russian).
5. Savchin V. M. *Matematicheskie metody mekhaniki beskonechnomernykh nepotentsial'nykh sistem* [Mathematical Methods of Mechanics of Infinite-dimensional Non-potential Systems]. Moscow, RUDN University Publ., 1991. 237 p. (in Russian).
6. Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G. Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 68, pp. 275–398.
7. Galiullin A. S., Gafarov G. G., Malayshka R. P., Khvan A. M. *Analiticheskaya dinamika sistem Gel'mgol'tsa, Birkgofa i Nambu* [Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems]. Moscow, Uspekhi fizicheskikh nauk, 1997. 324 p. (in Russian).
8. Trenogin V. A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. 3rd ed. Moscow, Fizmatlit, 2002. 488 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.01.2023
Принята к публикации / Accepted 19.02.2023
Опубликована / Published 31.05.2024